Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

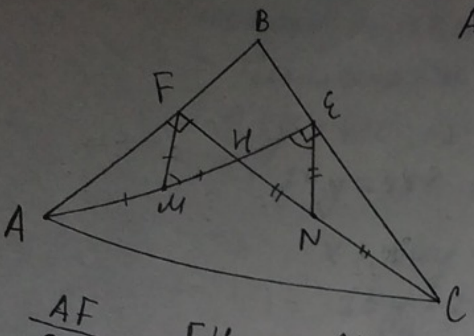
Шифр: **211006590**

ID профиля: **341430**

Вариант 14

№1.

△ABC; CF, AE - высоты
AM = MH, CN = NH
FM ∥ EN, FM = 2, EN = 11
Найти: ∠ABC, $S_{\triangle ABC}$, R.



Решение:

1) ∠FHA = ∠EHC (вертикальные)
∠AFH = ∠CEH = 90°
⇒ △AFH ∼ △CEH по двум углам

$$\frac{AF}{CE} = \frac{FH}{HE} = \frac{AH}{HC} = \frac{2MH}{2HN} = \frac{MH}{HN}$$

$$\frac{FH}{HE} = \frac{MH}{HN}; \quad FH \cdot HN = MH \cdot HE \quad (1)$$

2) FM ∥ EN ⇒ ∠FMH = ∠NEH как накрест лежащие (FM ∥ EN, ME-секущая)
∠FHM = ∠EHN (вертикальные) ⇒ △FHM ∼ △NHE по двум углам

$$\frac{FH}{HN} = \frac{MH}{HE} = \frac{FM}{EN} \Rightarrow FH \cdot HE = MH \cdot HN \quad (2)$$

(1) : (2) : $\frac{FH \cdot HN}{FH \cdot HE} = \frac{MH \cdot HE}{MH \cdot HN}$; $HN^2 = HE^2 \Rightarrow HN = HE \Rightarrow FH = MH$

FM = AM = MH, EN = HN = NC – медианы в прямоуг.△ из прямого угла
⇒ FH = MH = FM, HN = HE = EN, △FMH, △HEN – равносторонние
⇒ ∠MHF = 60°, ∠FAH = ∠BAE = ∠AFH − ∠MHF = 90° − 60° = 30°, ∠ABE =
= ∠ABC = ∠AEB − ∠BAE = 90° − 30° = 60°; ∠ABC = 60°.

FM = FH = MH = 2 = AM ⇒ $AF = \sqrt{AH^2 - FH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} =$
$= 2\sqrt{3}$; HE = EN = HN = NC = 11 ⇒ FC = 2 + 11 + 11 = 24; AC =
$= \sqrt{AF^2 + FC^2} = \sqrt{12 + 24^2} = \sqrt{588} = 14\sqrt{3}$; $\sin\angle ABC = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle ABC} \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{14\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 14$$

$EC = \sqrt{CH^2 - HE^2} = \sqrt{22^2 - 11^2} = 11\sqrt{3}$; $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CF}{BC} = \frac{24}{BC}$
$\Rightarrow BC = \frac{24 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16\sqrt{3} =$
$= 120\sqrt{3}$.

Ответ: ∠ABC = 60°, $S_{\triangle ABC} = 120\sqrt{3}$; R = 14.

№2. Пусть сумма всех чисел, кроме самого маленького и самого большого будет равна A, самое маленькое число x, самое большое y. Тогда

$30x + A + y = 450$ (1)

$x + A + 14y = 450$ (2)

(2) − (1): $x + 14y - 30x - y + A - A = 450 - 450$

$13y = 29x$, $\frac{y}{x} = \frac{29}{13}$, x и y − натуральные числа, 13 и 29 − взаимно простые числа $\Rightarrow y = 29k$, $x = 13k$ (k − натуральное число)

при $k = 1$ $y = 29$, $x = 13$; k не может быть больше или равно 2, т.к. при $k \geq 2$ $14y \geq 14 \cdot 2 \cdot 29 = 812 > 450$ − второе выражение будет неверным, т.к. $x + A + 14y = 450$, x и A − натуральные

$\Rightarrow$ наименьшее число 13, наибольшее 29; $A = 450 - 30 \cdot 13 - 29 =$ $= 31$ − это число мы должны представить в виде суммы нескольких натуральных чисел, каждое из которых больше 13 и меньше 29, т.к. все числа попарно различны; если это представимо в виде суммы трёх и более чисел, то хотя бы одно число будет меньше или равно 13, т.к. если все числа больше 13, то их сумма $> 3 \cdot 13 = 39$, одно число тоже не может быть, т.к. это число будет равно 31, а это больше 29, значит, мы должны представить 31 в виде суммы двух натуральных чисел, каждое из которых больше 13 и меньше 29

$31 = 14 + 17 = 15 + 16$, т.к. наименьшее из этих двух чисел число обязательно меньше 16 (иначе наименьшее число хотя бы 16, наибольшее больше или равно наименьшему, их сумма хотя бы $16 + 16 = 32$)

Ответ: возможно два варианта: 13, 14, 17, 29

13, 15, 16, 29

№3 преобразуем уравнение окружности:

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=a^2(y-1)^2+$
$+a^2\left(x-\frac{a^2+3}{a}\right)^2-7a^2=0$

$(y-1)^2+\left(x-\frac{a^2+3}{a}\right)^2=7 \quad (a\neq 0)$

$\Rightarrow$ точка B имеет координаты $\left(\frac{a^2+3}{a};1\right)$

преобразуем первое уравнение:

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=x^2+2x(a-y)+a^2+y^2-2ay+$
$+y^2+a^2+2ay=(x+(a-y))^2+(a+y)^2=0$

т.к. квадрат числа всегда ≥ 0, то $(x+(a-y))^2=0$ и $(a+y)^2=0$ $\left((x+(a-y))^2\geq 0,\ (a+y)^2\geq 0,\ (x+(a-y))^2+(a+y)^2=0\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x+a-y=0 \\ a+y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+a-y=0 \\ y=-a \end{cases}$ $\Rightarrow x+a-(-a)=0$

$x+2a=0 \Rightarrow x=-2a$

$\Rightarrow$ точка A имеет координаты $(-2a;-a)$

рассмотрим условие того, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой $x=4$

1) $\begin{cases} \frac{a^2+3}{a}-4\geq 0 \\ -2a-4\leq 0 \end{cases}$ 2) $\frac{a^2+3}{a}-4\leq 0$

$-2a-4\geq 0$

211006590 (U341430 M1275364)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006590**

ID профиля: **341430**

Вариант 14

№4. $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 & (1) \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 & (2) \end{cases}$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 \Rightarrow x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2-2x^2y^2-x^2y^2=37$

$(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \quad (3)$

$(3)-(1)$:

$(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=30$

пусть $x^2+y^2=t$, $t\geq 0$, тогда $t^2-7t-30=0$

$D=169$

$t_1=\frac{7-13}{2}<0$ - не подходит

$t_2=\frac{7+13}{2}=10$

$\Rightarrow x^2+y^2=10$, тогда $x^2y^2=\frac{7(x^2+y^2)-7}{3}=\frac{70-7}{3}=\frac{63}{3}=21$

пусть $x^2=a$; $y^2=b$, тогда

$\begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases}$ $\quad b=10-a$ $\quad a\geq 0$

$a(10-a)=21$ $\quad b\geq 0$

$a^2-10a+21=0$

$D=16$

$a_1=3$, $b_1=7$ $\quad x=\pm\sqrt{a}$

$a_2=7$, $b_2=3$ $\quad y=\pm\sqrt{b}$

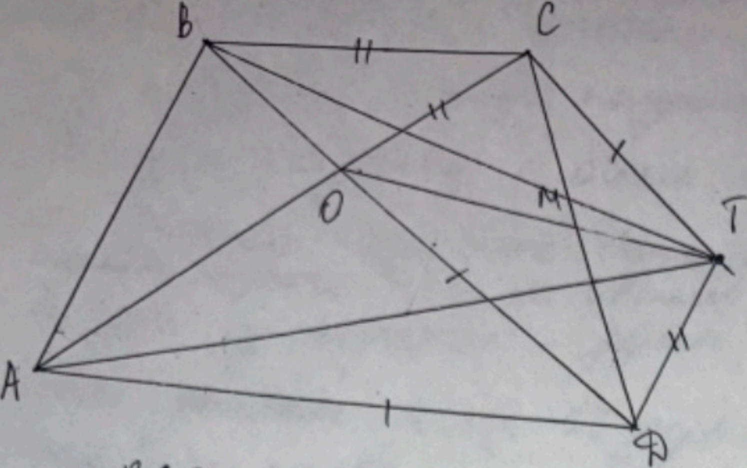
Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$ $\quad (\sqrt{7};\sqrt{3})$

$(-\sqrt{3};\sqrt{7})$ $\quad (\sqrt{7};-\sqrt{3})$

$(\sqrt{3};-\sqrt{7})$ $\quad (-\sqrt{7};\sqrt{3})$

$(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$ $\quad (-\sqrt{7};-\sqrt{3})$.

N6. а)



$\triangle OBC$, AOD – правильное

$OM = MT$

$CM = MD$

Решение:

1) т. к. $OM = MT$, $CM = MD$, $OCTD$ – параллелограмм

$\Rightarrow CT = OD = AO = AD$

$DT = OC = OB = BC$

$\angle BCO = \angle ADO = 60^\circ$ (р/с $\triangle$) ; $\angle OCT = \angle ODT$ – противоположные углы в параллелограмме

$\Rightarrow \triangle BCT = \triangle ADT$ по СУС: $BC = DT$, $CT = AD$, $\angle BCT = \angle ADT$

$\Rightarrow BT = AT$

$\angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \angle COD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (смежное)

$\Rightarrow \cancel{\angle OCD}\ \angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (т. к. $CT \parallel OD$)

$\Rightarrow \angle BCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$\angle CTD = \angle COD = 120^\circ$

$\Rightarrow \triangle BCT = \triangle CTD$ по УСУ ($BC = TD$, CD – общ., $\angle BCD = \angle DTC = 120^\circ$)

$\Rightarrow BT = CD$

$\triangle ABO = \angle COD$ по СУС: $\underbrace{BO = OC,\ AO = OD}_{\text{в р/с } \triangle}$,

$\angle AOB = \angle COD$ – вертикальное

$\cancel{\Rightarrow \triangle}$ $AB = CD = BT$

$AB = BT = AT$, $\triangle ABT$ – правильный

чтд.

N5. Рассмотрим два варианта:
т.к. у нас 15^2 карточек и все различно, то у нас есть все возможные комбинации чисел на карточках (учитывая раскраску)

1) обе вытащенные карточки — дубли

Эту ситуацию можно получить $\frac{15 \cdot 14}{2}$ способами: на одной карточке с обеих сторон одно из 15 чисел, на другой карточке одно из оставшихся 14, порядок карточек нам не важен.

2) одна из карточек — дубль, другая — нет. Сначала мы достаём 1 из 15 дублей, пусть на этой карточке изображено число x. Всего это число есть на 29 картах: одном дубле, который мы уже достали, потом на 14 картах число x с красной стороны, а с синей одно из оставшихся 14 чисел (все числа кроме x). Ещё на 14 картах число x с синей стороны, а с красной одно из оставшихся 14 чисел (все числа кроме x). То есть вторая карта выбирается $15^2 - 29 = 225 - 29 = 196$ способами.

Значит фокусник может осуществить задуманное
$15 \cdot 7 + 15 \cdot 196 = 15 \cdot 203 = 3045$ способами

Ответ: 3045 способами