Часть 1

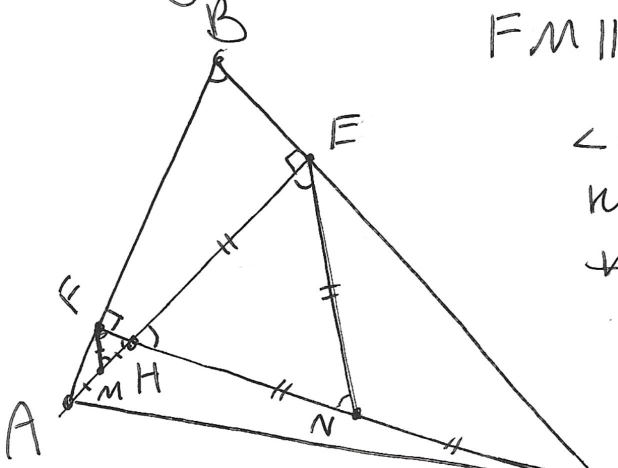
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006540**

ID профиля: **114793**

Вариант 14

Задача 1. (~~страница 4~~ часть 1)



$FM \parallel EN \Rightarrow \angle EMF = \angle MEN$, $\angle NFM = \angle ENF$. В прямоугольном треугольнике ~~выходящая по длине ровно вдвое мен~~ медиана с основанием ~~в~~ в середине гипотенузы по длине ~~вдво~~ ровно вдвое меньше самой гипотенузы.

$EN = NH \Rightarrow \angle NEM = \angle NHE$. $FM = MH \Rightarrow \angle MFH = \angle FHM$.
$\angle FHM = \angle EHN$ ~~AD~~ $= \angle$ ~~FMH~~ $MEN = \angle FMH \Rightarrow FM = FH$.
~~Получается~~ $\triangle FMH$ – равносторонний, $\triangle HEN$ – тоже равносторонний. ~~так как~~ Получается, что у ~~подобных~~ треугольников $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$, которые подобны, так как имеют равные углы, меньший из катетов вдвое короче гипотенузы, значит, $\angle ECH = \angle FAH = 30°$ (что и так было понятно).

В общем, мы знаем длину $AE = 15$ и длину $CF = 24$.
~~AB~~ $AB = AE : \sin 30$. $\sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \cancel{\frac{15 \cdot \sqrt{2}}{2}} \frac{30}{\sqrt{2}}$

Площадь треугольника $\triangle ABC = \frac{AB \cdot CF}{2} = \cancel{\frac{15 \cdot \sqrt{2} \cdot 24}{2 \cdot 2}} =$
$= \frac{30 \cdot 24}{2\sqrt{2}} = 180\sqrt{2}$

Если центром ~~о~~писанной вокруг $\triangle ABC$ окружности является точка O, то $\angle AOC = 120°$, так как $\angle ABC = 60°$.
$MN = \sqrt{\left(\frac{11-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{(11+2) \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2}$, так как MN – гипотенуза треугольника с вершинами в M, N и ~~точкой~~ точке основания высоты, опущенной из A на EN.

Задача 1. (продолжение – часть 2).

$MN = \sqrt{\left(\frac{11-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{(11+2)\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{20{,}25+84{,}5} = \sqrt{104{,}75}$

$AC = 2MN$

$AO = OC$.

Если провести высоту ~~из~~ к AC из O, то ее основание поделит AC на 2 равные части, и получится два прямоугольных треугольника с углом 30°. Гипотенуза такого треугольника равна $\frac{AC}{2} : \cos 30$, и, так ~~как O является из~~ как она является радиусом описанной вокруг ABC окружности, эта самая окружность имеет радиус $\frac{AC}{2} : \cos 30$.

$AO = OC = MN : \cos 30 = \frac{\sqrt{104{,}75}\cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{209{,}5}}{2} =$
$= \sqrt{209{,}5}$

Ответ: площадь $\triangle ABC = 180\sqrt{2}$;
радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности равен $\sqrt{209{,}5}$

Задача 2.

Самое маленькое число в ~~ряду~~ на доске обозначим за x, а самое большое — за y. a — число, на которое возросла сумма чисел на доске при увеличении x или y. В обоих случаях это число равно одному и тому же, так как сумма чисел в итоге и изначально в обоих случаях одинаковы.

$a = 29x = 13y$

a — натуральное, 29 и 13 — простые, следовательно, $a \vdots 377$, ~~следовательно~~ $x \vdots 13$, а $y \vdots 29$. ~~Ед~~ a не может превосходить 450, так как сумма чисел, записанных на доске, положительна. Единственное натуральное число, кратное 377 и не превосходящее $450 - 377$, значит $a = 377$, $x = 13$, $y = 29$. Сумма чисел, записанных на доске изначально равна 73. $13 + 29 = 42$, значит, сумма оставшихся чисел — 31. Каждое из ~~двух~~ оставшихся чисел ~~не меньше~~ больше 13 и ~~не больше~~ меньше 29, из чего можно сделать вывод, что их 2. Вот все возможные варианты того, какие числа могли быть написаны на доске:

13, 14, 17, 29

13, 15, 16, 29.

N3. ~~x~~ $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$x^2+2(a-y)x+2(a^2+y^2)=0$

$D=4(a-y)^2-8(a^2+y^2)=-8ay-4(a^2+y^2)$

$-8ay \geqslant 4(a^2+y^2)$

$$x_1=\frac{-2(a-y)\pm\sqrt{-8ay-4(a^2+y^2)}}{2}$$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$a^2x^2-\cancel{2a^3x}\,(2a^3+6)x+(a^2y^2-2a^2y+a^4+9)=0$

$D=(2a^3+6)-4a^2(a^2y^2-2a^2y+a^4+9)$

~~$x=\frac{-(2a^3+6)\pm\sqrt{4a2\ 2a}}{}$~~

$$x_2=\frac{-(2a^3+6)\pm\sqrt{(2a^3+6)-4a^2(a^2y^2-2a^2y+a^4+9)}}{2a^2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{-2(a-y)\pm\sqrt{-8ay-4(a^2+y^2)}}{2}>4\\ x_2<4\end{cases}\\ \begin{cases}x_1<4\\ x_2>4\end{cases}\end{array}\right.$$

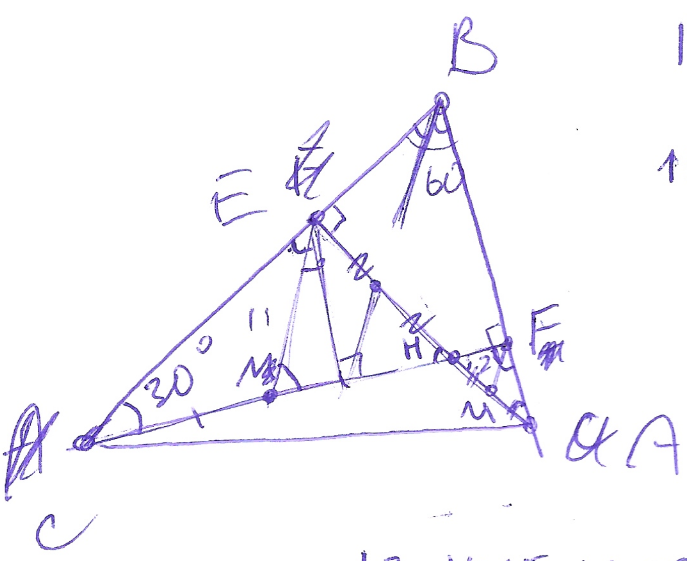
13·29=247

13x=29y

:7

203

13 29



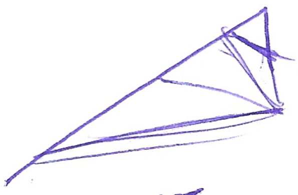
13 14 15 16 17 18 29

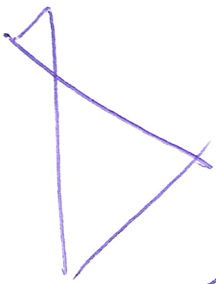
42·4

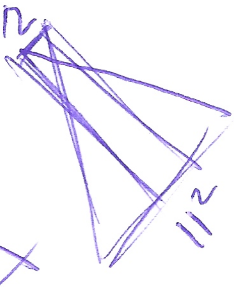
35

13 14 15 16 17 18

26 27 28 29







10,2

45
×45
225
180
2025

4,5

$$\sqrt{\left(\frac{13\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2+4{,}5^2}=\sqrt{\frac{169}{2}+20{,}25}=\sqrt{84{,}5+20{,}25}=\sqrt{104{,}75}$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\times 11\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{13\cdot\sqrt{2}}{2}$$

Черновик

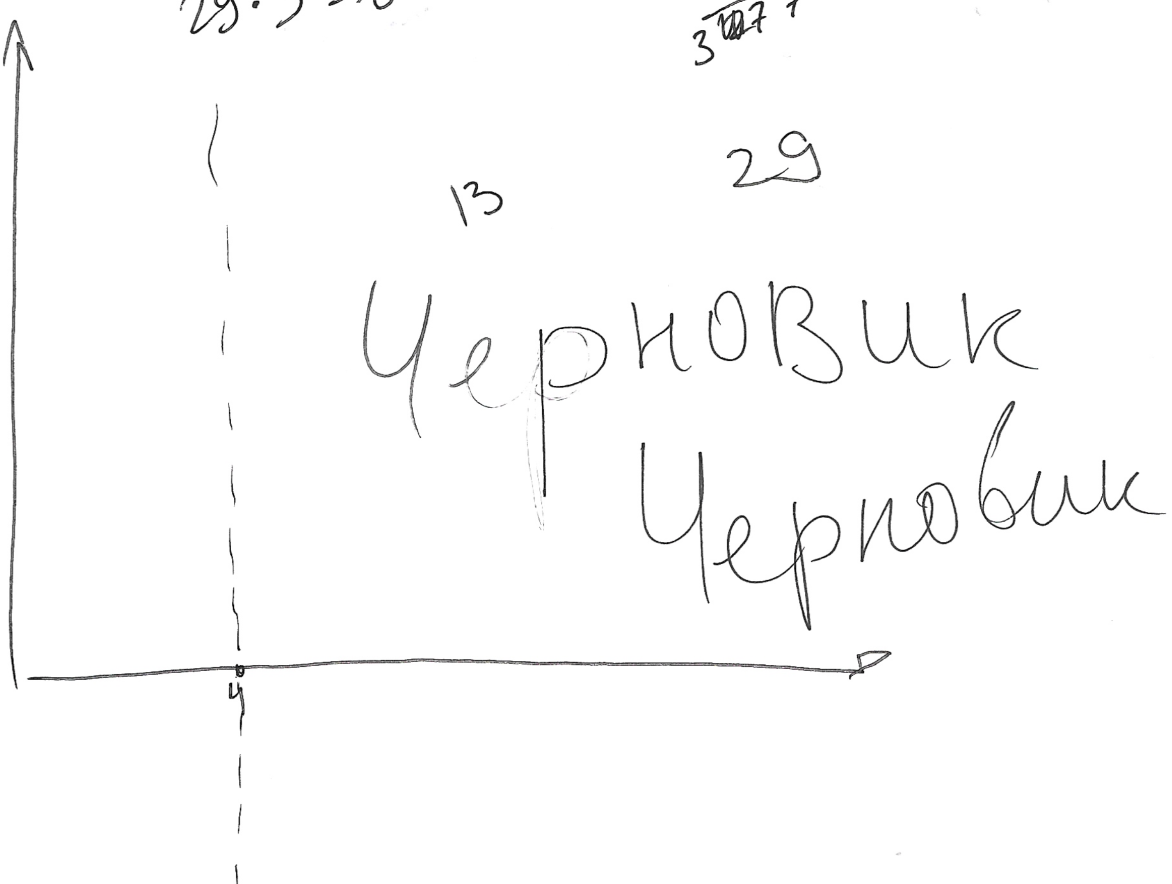
38

~~Задача 2~~.

При увеличении самого маленького числа, обозначим его за x, сумма всех чисел увеличивается на $29x$, так как само число увеличивается в 30 раз, то есть на $29x$. При увеличении самого большого числа в 14 раз ~~сумма~~ обозначим его за y, сумма возрастает на $13y$. Так как в итоге суммы окажутся равны, возрастали они на одно и то же число, то есть, $13y = 29x$. Числа на доске натуральны, поэтому ~~13y~~ число, на которое увеличилась их сумма ~~так же~~ также натурально ~~...~~ и кратно 29 и 13. Так как 29 и 13 — простые числа, это число обозначим его за a

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 13 \\ \hline 87 \\ +29 \\ \hline 377 \end{array}$$

$29 \cdot 3 = 87$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006540**

ID профиля: **114793**

Вариант 14

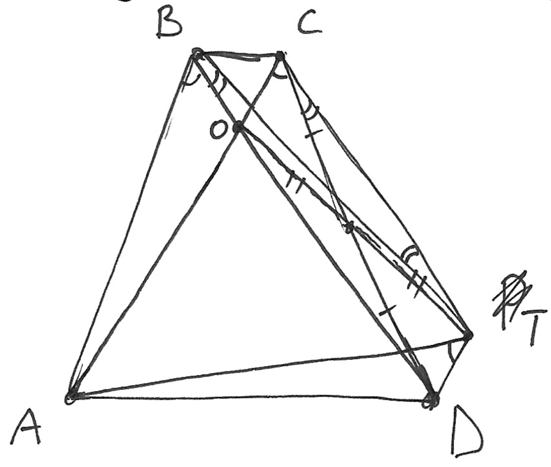
Задача 5. Чистовик страница 1

Всего карточек среди 225 имеющихся, содержащих хотя бы одно число x (где x – каждое из 15 чисел от одного до 15) 29 (15 с x на синей стороне, 15 с x на красной, и одна из них имеет x на обеих сторонах). Получается, что когда фокусник берет карточку с x на обеих сторонах, помимо нее, среди оставшихся 224 карточек находится ровно 28, ~~содержа~~ имеющих на себе x. То есть, у фокусника имеется ровно 196 способов вытащить карточки для каждого x, являющегося числом на дубле. То есть, всего способов у него $15 \cdot 196$, так как дублей всего 15. Но в таком случае ~~считается~~ каждое вытягивание одновременно двух дублей считается дважды - по одному разу при подсчете вариантов для каждого из них. Значит, из получившегося числа $15 \cdot 196 = 2940$ мы должны вычесть число способов вытянуть два дубля одновременно. А таковых всего $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

$2940 - 105 = 2835$

Ответ: 2835.

Задача 6. а) Чистовик. страница 2



OCTD − параллелограмм, так как его диагонали делят друг друга пополам. $\angle COD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle CTD = 120^\circ$.

$\angle CAD + \angle CTD = 180^\circ \Rightarrow ACTD$ − вписанный четырехугольник. $\angle ACD$ и $\angle ATD$ опираются на одну дугу AD в окружности, описанной вокруг ACTD, следовательно, $\angle ACD = \angle ATD$.

$\angle CBD + \angle CTD = 180^\circ \Rightarrow BCTD$ − вписанный четырехугольник. $\angle DBT$ и $\angle DCT$ опираются на одну дугу DT в окружности, описанной вокруг $BCTD \Rightarrow \angle DBT = \angle DCT$.

$\angle COD = 120^\circ \Rightarrow \angle OCT = 60^\circ$.

$\angle BTC$ и $\angle TBD$ − накрестлежащие, следовательно, они равны. $\angle ACD = \angle ATD$; $\angle DCT = \angle BTC$; $\angle ACD + \angle DCT = 60^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ATD + \angle BTC = 60^\circ$. $\angle ATD + \angle BTC + \angle BTA = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BTA = 60^\circ$.

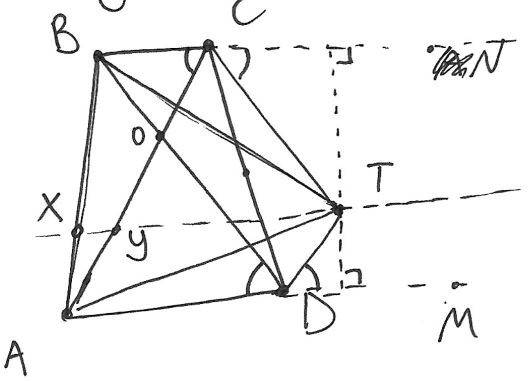
Если провести прямую, перпендикулярную BC и AD, которые, кстати говоря, параллельны, что доказывается накрест лежащими углами, которая также будет пересекать точку O, и отразить относительно этой прямой плоскость, то ~~B → C, C → B; A → D, D → A, то~~ ~~есть ABCD~~ $B \to C$; $A \to D \Rightarrow AB \to DC \Rightarrow ABCD$ − равнобедренная трапеция (хотя это итак было очевидно).

Получается, что $\angle ABC = \angle BCD \Rightarrow \angle ABD = \angle ACD$.

$\angle ACD + \angle DCT = 60^\circ \Rightarrow \angle ABD + \angle DBT = 60^\circ \Rightarrow \angle ABT = 60^\circ$

$\angle ABT = 60^\circ$; $\angle BTA = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABT$ − равносторонний

Задача 6 б).



Чистовик. страница 3.

Заметим, что $\angle TCN = \angle TDM = 60^\circ$, где M и N - точки, лежащие на ~~прод~~ продолжениях сторон AD и BC соответственно.

~~Тогда~~ Проведем прямую, параллельную BC и AD, проходящую через точку T.

Точку ее пересечения с AB назовем X.

~~Площадь треугольника $\triangle BTA$ равна TX.~~

~~Высот~~ $OD = CT = 4$; $TD = CO = 3$. Высота, опущенная на прямую BC из точки T равна $\frac{4\sqrt{2}}{2}$; из этой же точки на прямую AD - $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Площадь $\triangle BTA$ равна сумме произведений XT на эти высоты, разделенная на 2.

Назовем точку пересечения XT и AB - Y.

$XY = \frac{3 \cdot 3}{7}$; так как $AX : XB = 3:4$.

$YT = 4$, так как $CT = 4$, а $\triangle YCT$ - равносторонний.

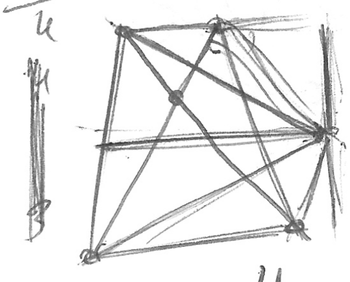
Таким образом, площадь $\triangle AXT =$ ~~$\frac{37}{7} \cdot \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$~~

$$= \frac{\frac{37}{7} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{37}{7} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{37 \cdot 7\sqrt{2}}{28} = \frac{37}{4}\sqrt{2}$$

Площадь ABCD равна $\frac{4+3}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{49\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{\frac{37\sqrt{2}}{4}}{\frac{49\sqrt{2}}{4}} = \frac{37}{49}$$

Ответ: $\frac{37}{49}$



$$4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \cancel{28\sqrt{7}}$$

$$14\sqrt{2}$$

$$10{,}5\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$7x^2+7y^2-3x^4-3y^4=$$

Черновик

$$3+\frac{4\cdot 4}{7}=\frac{37}{7}$$

$$4+\frac{3\cdot 3}{7}=\frac{37}{7}$$

$$7x^2+7y^2+x^4+y^4-4x^2y^2=42$$

$$7x^2+7y^2-3x^4-3y^4=-104$$

$$x^4+y^4-2x^2y^2=7x^2+7y^2+2x^2y^2+42$$

$$(x^2-y^2)^2=7x^2+7y^2+2x^2y^2+42$$

$$x^2\left(x^2-\frac{y^2}{2}\right)+y^2\left(y^2-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$x^2(7-1{,}5y^2)+y^2(7-1{,}5x^2)$$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Черновик

29 карточек с +

15

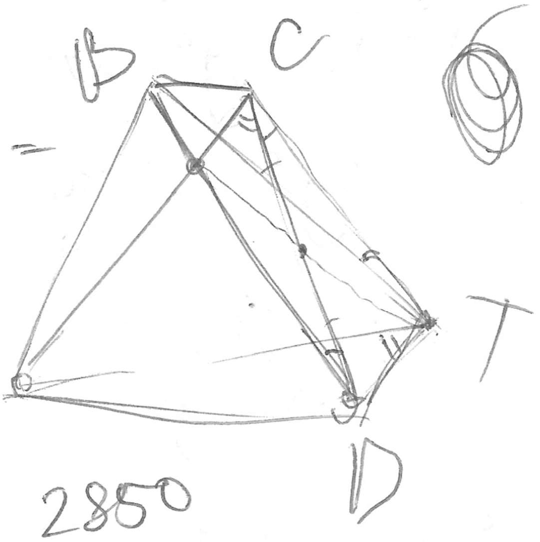
15 дублей

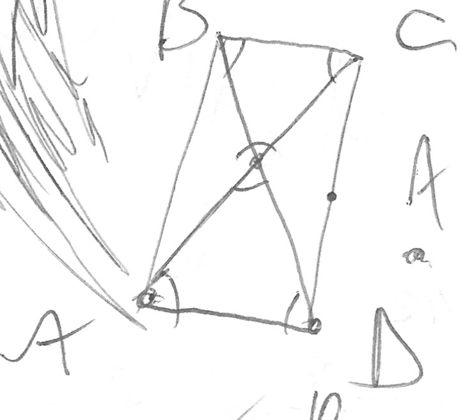
$15\cdot(15^2-28)=15^3$ - зачем я это блин пишу

15· 197 способов

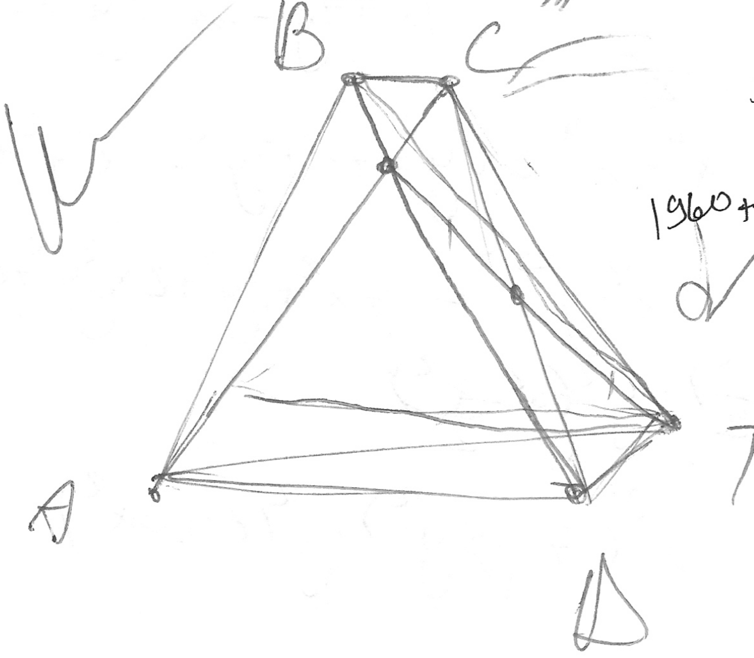
$\frac{15\cdot 14}{2}=15\cdot 7$

$15\cdot 190=$





2850



98

$1960+980=2940$