Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006520**

ID профиля: **852668**

Вариант 14

Чистовик

Задача 3

Координаты точки A $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

Решим квадратное ур-ие

$\cancel{D=2^2(y-a)^2}$ $D=2^2(a-y)^2-8a^2-8y^2=\cancel{8a}-4a^2-4y^2-8ay=$

$=-4(a+y)^2$

$D\geq 0$, т.к. точка x - существует $\Rightarrow a+y=0 \Rightarrow a=-y$

$$x=\frac{2y-2a}{2}=y-a=2y$$

Точка A лежит на прямой $y=\frac{x}{2}$.

Рассмотрим ур-ие окружности.

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$(ax-3)^2+a^2y^2-2a^3x-2a^2y+a^4=0$

$(ax-3)^2+a^2(y-1)^2-2a^3x+a^4-a^2=0$

$(ax-3)^2+a^2(y-1)^2=a^2(1-a^2+2ax) \;|:a^2$

$(x-\frac{3}{a})^2+(y-1)^2=1-a^2+2ax$

$B(\frac{3}{a};1)$

Заметим, что $1-a^2+2ax\geq 0 \Rightarrow a^2-2ax-1\leq 0$

$$a_{1,2}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}=\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x^2+1}=-a-\sqrt{a^2+1} \\ x+\sqrt{x^2+1}=-a+\sqrt{a^2+1}\end{array}\right.$$

$a\in[-a-\sqrt{a^2+1};-a+\sqrt{a^2+1}]$

$2a=-\sqrt{a^2+1} \Rightarrow a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $2a=\cancel{a}\sqrt{a^2+1} \Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a\in[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$

Координата абсциссы $A=x=-a$, абсциссы $B=\frac{3}{a}$

Если $-a>4$, то $\frac{3}{a}<4 \Rightarrow 4a>3; a<4 \Rightarrow a\in(\frac{3}{4};4)$

• Если $-a<4$, то $\frac{3}{a}>4 \Rightarrow 3>4a; a>-4 \Rightarrow a\in(-4;\frac{3}{4})$

С учётом ОДЗ $a\in[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$

Ответ: $[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$

3

211006520 (U852668 M1275588)

Чистовик

Чистовик

Задача 2.

Допустим сумма всех чисел S

(1) $450 = S + 29a$ – a – самое маленькое число

(2) $450 = S + 13b$ – b – самое большое число

$(1) - (2) = 29a - 13b = 0 \Rightarrow 29a = 13b$

Числа a и $b \in \mathbb{N}$, 29 и 13 взаимнопросты $\Rightarrow a \vdots 13$; $b \vdots 29$

1 вариант: $a = 13$; $b = 29$

Сумма оставшихся чисел: $450 - 30 \cdot 13 - 29 = 31$

Заметим, что осталось 2 числа, т.к. если осталось 1, то $31 > 29$, оно больше наибольшего – противоречие, а если осталось 3, то найдется число меньшее 11, а $11 < 13$, оно меньше наименьшего – противоречие.

$c + d = 31$ 1) ~~вари~~ $c = 14$, $d = 17$ 2) $c = 15$; $d = 16$ $(c > 13, d < 29)$

2 вариант: $a = 13 \cdot 2 = 26$, $b = 29 \cdot 2 = 58$

Сумма оставшихся чисел $450 - 26 \cdot 30 - 58 < 0$ – противоречие, т.к. числа натуральные.

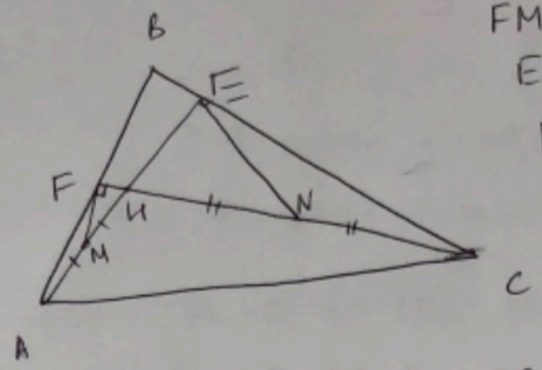
Остальные варианты будут больше 2 варианта, поэтому они тоже выбрасываются.

Ответ: 1) 13, 14, 17, 29 2) 13, 15, 16, 29

2

Чистовик

Задача 1.



$FM = 2$

$EN = 11$

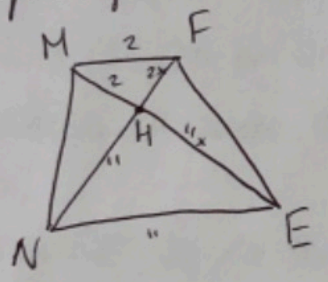
$FM \parallel EN$

найти: $\angle ABC$, S_{ABC}, $R_{окр}$

Заметим, что $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$ прямоугольные, а FM и EN медианы к гипотенузе $\Rightarrow FM = \frac{1}{2}AH = HM = AM$, $EN = \frac{1}{2}HC = HN = CN$.

Видно, что $\triangle AFH$ подобен $\triangle CEN$ по трём углам (90°, вертикальные и оставшийся) $\Rightarrow F\overset{H}{\cancel{N}} = 2x$, $EH = 11x$, т.к. коэффициент подобия 2 к 11.

Перерисуем FMEN как трапецию.



Т.к. $MF \parallel NE$, то $\triangle MFH \sim \triangle ENH$ по трём углам. $\frac{MF}{NE} = \frac{HF}{NH} \Rightarrow HF = 2 \Rightarrow HE = 11$

Получаются правильные треугольники: $\angle NHE = 60° = 180° - \angle FHE =$

$= 180 - (180 - \angle ABC) = \angle ABC$.

$MN = \frac{1}{2}\cancel{NE}\,AC$

Из теоремы косинусов находим

$MN^2 = 2^2 + 11^2 - 2\cos 120° \cdot 2 \cdot 11 = 147 \Rightarrow MN = \sqrt{147}$; $\overset{AC}{\cancel{NE}} = 2\sqrt{147}$ $\left(\cos 120 = -\frac{1}{2}\right)$

Теорема синусов: $R_{окр} = \frac{AC}{\sin\angle ABC \cdot 2} = \frac{2\sqrt{147}\cdot\cancel{2}}{\sqrt{3}\cdot\cancel{2}} = 2\sqrt{49} = 2 \cdot 7 = 14$

$\angle FAH = 90° - 60° = 30° \Rightarrow BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AF + \frac{1}{2}FB$ $\left(\sin 30° = \frac{1}{2}\right)$

$\angle FCB = 90° - 60° = 30° \Rightarrow FB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}EC + \frac{1}{4}AF + \frac{1}{4}FB \Rightarrow \frac{3}{4}FB = \frac{1}{2}EC + \frac{1}{4}AF =$

$= \frac{1}{2}\cdot\overset{11}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{3} = \frac{11\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow FB = 8\sqrt{3}$

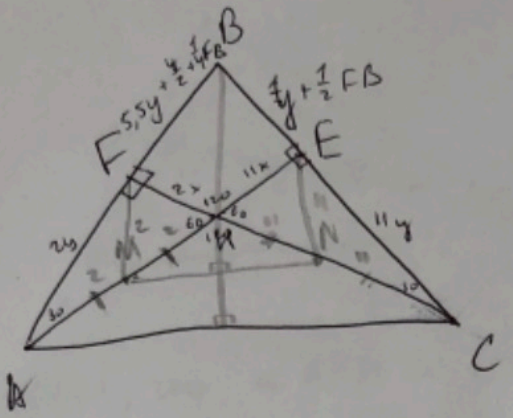
$S_{ABC} = FC \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = (11 + 11 + 2)\cdot(2\sqrt{3} + 8\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2} = 120\sqrt{3}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S_{\triangle ABC} = 120\sqrt{3}$, $R_{окр} = 14$.

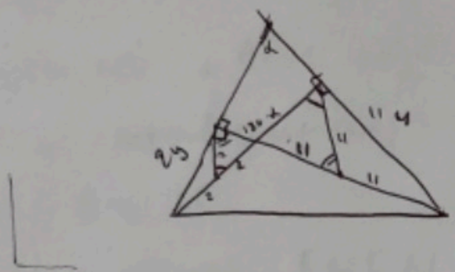
1

211006520 (U852668 M1275588)

Черновик

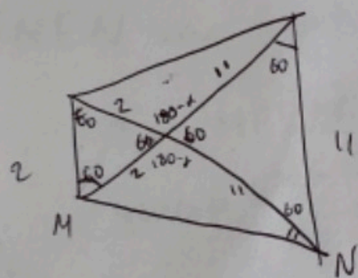


$k=\frac{4}{22}=\frac{2}{11}$



$FB=6y+\frac{1}{4}FB$

$\frac{3}{4}FB=6y \Rightarrow FB=8y$



$\frac{2}{11x}=\frac{2}{11} \Rightarrow x=1$

$\cos 120=\cos(90+30)=$

$-\sin 30=-\frac{1}{2}$

$11y=\sqrt{22^2-11^2}=11\sqrt{4-1}=11\sqrt{3} \Rightarrow y=\sqrt{3}$

$MN^2=4+121-2\cos 120\cdot 22=125+22=147$

$MN=\sqrt{147}$

$AC=2\sqrt{147}$

$2R=\frac{2\sqrt{147}}{\sin 60}=\frac{2\sqrt{147}\cdot 2}{\sqrt{3}}=$

$=4\sqrt{49}=4\cdot 7=28 \Rightarrow R=\frac{28}{2}=14$

$S=\frac{1}{2}\cancel{AE}FC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot(11+11+2)\cdot(2+8)\sqrt{3}=$

$=12\cdot 10\sqrt{3}=120\sqrt{3}$

211006520 (U852668 M1275588)

Черновик

$a, b, c, d \ldots$

$a + b + c \ldots + x = S$

$\cancel{30}$

$30a + b + c + \ldots + x = 450$

$a + b + c \ldots + 14x = 450$

$29a - 13x = 0$

$29a = 13x \Rightarrow a = 13,\ x = 29$

1) $13 + 29 = 42$

$450 - 42 = 408$

$14 + \ldots + 28 = \frac{14+28}{2} \cdot 15 = 21 \cdot 15 = 315 < 408$

2) $a = 26,\ x = 58$

$450 - 58 - 26 = 366$

$\cancel{27 + 28 + 29 + 30}$ + ($\cancel{55 \quad 84 \quad 114}$)

$\cancel{\frac{27+x}{a}}$ $\cancel{\frac{27+28+36}{2}} \cdot 10 =$

$\frac{27+31}{2} \cdot 5 =$ $\cancel{\frac{27+35}{2} \cdot 9} =$

$\cancel{\frac{27+39}{2} \cdot 6} =$ $\frac{27+36}{2} \cdot 10 = 315$

$27 \ldots 36, 53$

$\cancel{27 \ldots 3}$

3) $a = 39,\ x = 87$

450

211006520 (U852668 M1275588)

Черновик

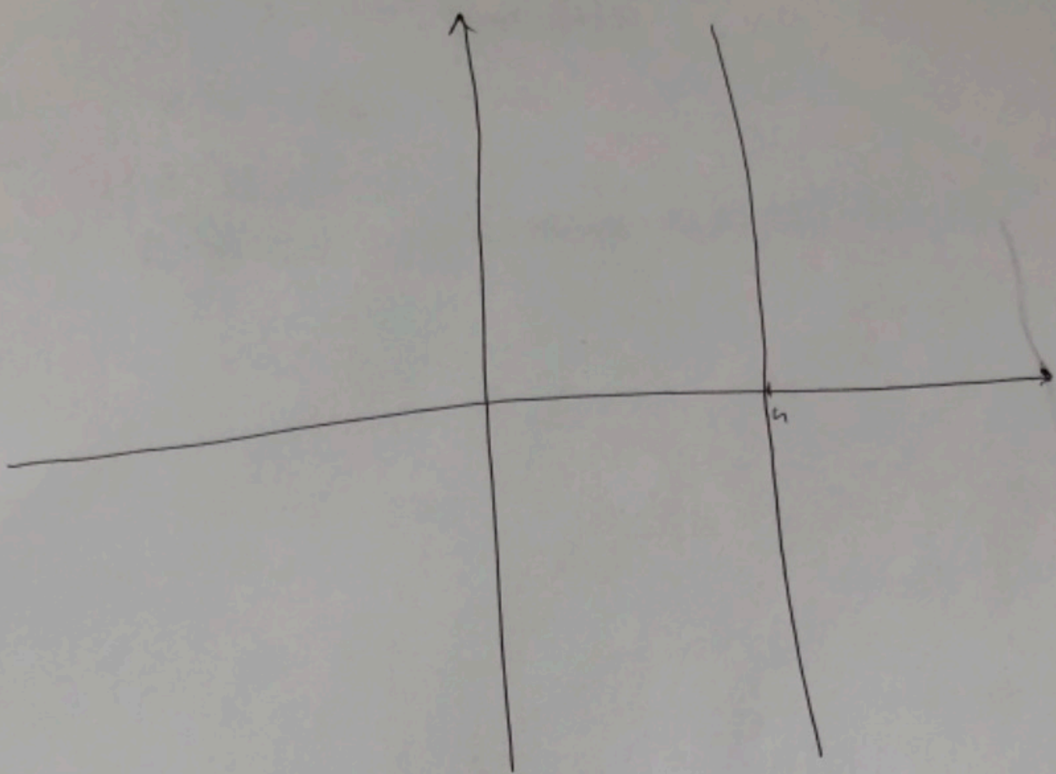
$29a = 13x$

1) $a = 13;\ x = 29$

$\overset{390}{13 \cdot 30} + 29 = 419$ $\quad 450 - 419 = 31$ $\quad (14, 17); (15; 16)$

211006520 (U852668 M1275588)

Черновик



$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0 \quad (x<4)$

$\underline{a^2x^2}+a^2y^2-2a^3x\,\underline{-6ax}-2a^2y+a^4+\underline{9}=0 \quad (x\geq 4)$

$a^2+a^2+2ax+x^2-2xy+y^2+y^2$

$(x-y)^2+(a+x)^2+y^2+a^2-x^2=0$

$\cancel{(a^2-3)^2}\ (ax-3)^2-2a^2(ax+y)+a^2(1+y^2)=0$

$(ax-3)^2-a^2(2xa+2y-1-y^2)$

$(ax-3)^2=a^2(2ax-(y-1)^2)$

$(ax-3)^2+a^2(y-1)^2=2a^3x$

$x^2+2x(a-y)+2a^2+2y^2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{y-a\pm\sqrt{(a-y)^2\cdot 4-8a^2-8y^2}}{2}=\dfrac{y-a\pm\sqrt{-4a^2-8ay-4y^2}}{2}=y-a\pm 2\sqrt{-(a+y)^2}$

$a+y=0 \Rightarrow x=\dfrac{y-a}{2}$

$y=-a \quad \Rightarrow x=\dfrac{-2a}{2}=-a=y$

211006520 (U852668 M1275588)

Черновик

Если $x = a > 4$

то $\frac{3}{a} < 4$

$\frac{3}{4}$, 4

$-a > 4 \Rightarrow a < 4$

$\frac{3}{a} < 4 \Rightarrow a > \frac{3}{4}$

~~Если $x = a$~~

Если $x = -a < 4 \Rightarrow a > -4$

то $\frac{3}{a} > 4$ $3 > 4a \Rightarrow a < \frac{3}{4}$

$x = -a$

$[-a - \sqrt{a^2+1}; -a + \sqrt{a^2+1}]$

$a = -a - \sqrt{a^2+1}$

$\cancel{0 - \sqrt{a^2+1}}$

$2a = -\sqrt{a^2+1}$ $\cancel{a^2+1 > 0}$

$4a^2 = a^2+1 \Rightarrow$

$3a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{3}$

$a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$a = -a + \sqrt{a^2+1}$

$2a = \sqrt{a^2+1}$

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cancel{\frac{2}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{1}{3}+1} = -}$

Черновик

$a^2x^2 - 2x(a^2+3a) + a^2y^2 - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$

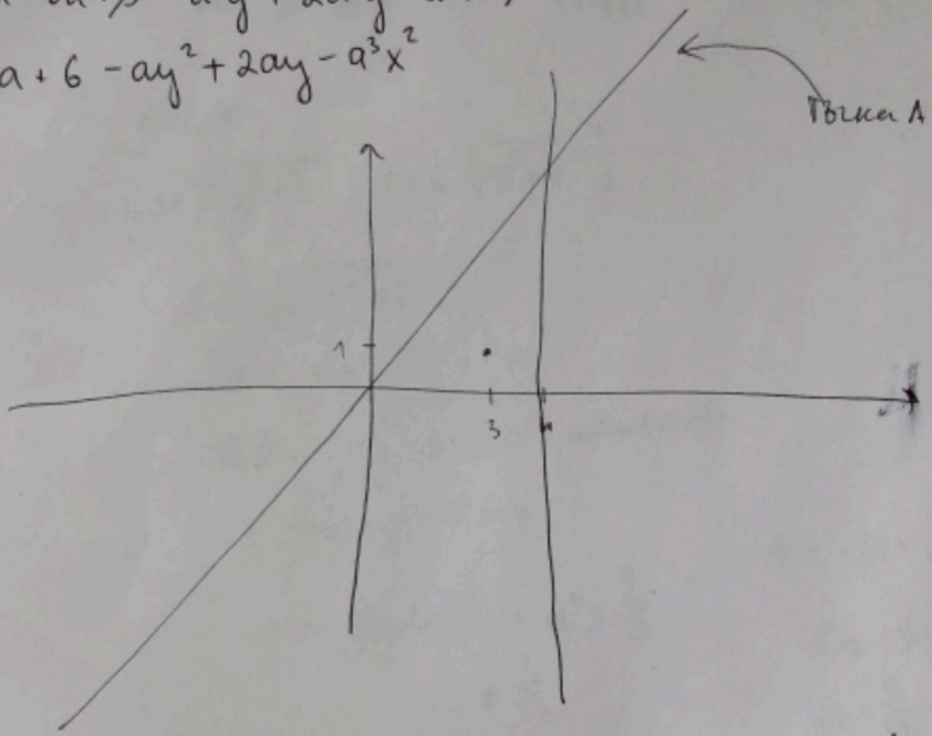
$x_{1,2} = \dfrac{2a^2+6a \pm \sqrt{4(a^2+3a)^2 - 4a^4y^2 + 8a^4y \cancel{+} 4a^6x^2 - 36a^2}}{2}$

$4a^4 + 24a^3 + 36a^2 - 4a^4y^2 + 8a^4y - 4a^6x^2 - 36a^2 \geq 0 \mid :4$

$a^4 + 6a^3 + 9a^2 - a^4y^2 + 2a^4y - a^6x^2 - 9a^2 \mid :a^2$

$a^2 + 6a + \cancel{9} - a^2y^2 + 2a^2y - a^4x^2 - \cancel{9} \mid :a$

$a + 6 - ay^2 + 2ay - a^3x^2$



$(ax-3)^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 2a^2y + a^4 = 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{3}{4}$

$(ax-3)^2 + a^2(y^2 - 2ax - 2y + a^2) = 0$ $\quad \frac{1}{3} \quad \frac{9}{16}$

Центр окр. 3 и 1

$(ax-3)^2 + a^2((y-1)^2 + (a-x)^2 - 1 - x^2) = 0$

$a^2 - 2ax - 1 < 0$

$a_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$a = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$a \in (x - \sqrt{x^2+1}; x + \sqrt{x^2+1})$

$(ax-3)^2 + a^2((y-1)^2 + (a-x)^2) = a^2(x^2+1)$

$ax = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{a}$

$\cancel{a^2}\left((y-1)^2 + \left(\frac{a^2-3}{a}\right)^2\right) = \cancel{a^2}\left(\frac{9}{a^2} + 1\right)$

$\left(x - \frac{3}{a}\right)^2 + (y-1)^2 = 1 - a^2 + 2ax$

$a \in \sim (0; 2x)$

$1 - a^2 + 2ax \geq 0$

$(y-1)^2 + \frac{(a^2-3)^2}{a^2} = \frac{9+a^2}{a^2}$

$\frac{3}{a} < \frac{1,5}{x}$

$x = \frac{3}{a};\ y = \sqrt{7-a^2} + 1$

$(y-1)^2 = \frac{\cancel{9} + a^2 - a^4 + 6a^2 \cancel{-9}}{a^2} = \frac{-a^4 + 7a^2}{a^2} = 7 - a^2$

$a^2(1 - a^2 + 2ax)$

$\frac{3}{2x} < 4 \Rightarrow 3 < 8x \Rightarrow x > \frac{8}{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

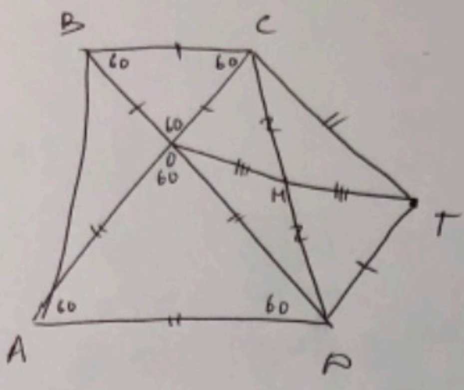
Шифр: **211006520**

ID профиля: **852668**

Вариант 14

Чистовик

Задача 3.



а) Заметим, что точка T продолжает медиану OM на её же длину, значит мы получаем параллелограмм OCTD, где OC = TD, а OD = CT.

$\triangle BCT = \triangle TDA$ по 1 признаку, а BT = AT как соответственные элементы.

Если $\angle ATD = x = \angle TBC$, то $\angle CTB = \cancel{\angle TBC}\ 180 - (\angle TBC + \angle BCT) = 180 - x - 120 = 60 - x$ ($\angle BCT = 120$, т.к. $\angle OCT = \angle AOD$, т.к. $CT \parallel OD$)

$\angle BTA = 120 - (60 - x) - x = 60°$

Угол, между BT = AT равен $60° \Rightarrow \triangle BTA$ - правильный

б) Найдём длину BT из теоремы косинусов

$BT^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cos 120° \cdot 3 \cdot 4 = 37 \Rightarrow BT = \sqrt{37}$

Найдём высоту ABCD. $H = \sin 60 (4+3)$

$S_{\triangle BTA} = \sqrt{37} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60 \cdot \sqrt{37} = \frac{1}{2} \sin 60 \cdot 37$

$S_{ABCD} = \frac{4+3}{2} \cdot (4+3) \sin 60° = \frac{1}{2} \sin 60° \cdot 49$

$\frac{S_{\triangle BTA}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$

Ответ: $\frac{37}{49}$.

3

211006520 (U852668 M1275589)

Чистовик

Задача 4.

Чистовик

Задача 5.

Всего карт $15^2 = 225$

Фокусник хочет: $\boxed{X|X}$ $\boxed{Y|Z}$
1 карта 2 карта

~~Зали~~ Допустим, он достал карту дубль с числом X.

Всего карт с числом X – 15 штук (1-X; 2-X… 15-X), значит всего карт без X: 225 – 15 = 210 штук.

Сколько же может быть вариаций с картой XX.

1 карта: 1 вариант 2 карта: 210 вариантов

всего вариантов $1 \cdot 210 = 210$

Но это мы рассмотрели с картой X, а X может принимать 15 различных значений ⇒ всего вариантов $15 \cdot 210 = 3150$.

Ответ: 3150.

2

211006520 (U852668 M1275589)

Чистовик

Задача 4.

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$

$x^4+y^4-x^2y^2=37$

Т.к. и x, и y даны в чётных степенях, то их положительность не важна, берётся всегда их модуль.

$a=x^2$

$b=y^2$

$7a+7b-3ab=7$

$a^2+b^2-ab=37$

$(a+b)^2-3ab=37$

$(a+b)(a+b-7)=30 \Rightarrow (a+b)^2-7(a+b)-30=0$

$a+b=\frac{7\pm\sqrt{49+120}}{2}=\left[\begin{array}{l}-3 \text{ - не подх.}\\ 10\end{array}\right.$

$7\cdot 10-3ab=7 \Rightarrow ab=\frac{63}{3}=21$

$\begin{cases} a+b=10\\ ab=21\end{cases}$

$a(10-a)=21 \Rightarrow a^2-10a+21=0$

$a_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{2}=\left[\begin{array}{l}3\\ 7\end{array}\right.$

$x=\pm\sqrt{3}$

$y=\pm\sqrt{7}$

Ответ: $x=\pm\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{7}$ или наоборот, это не важно, т.к. x и y представлены одинаково.

1

Черновик

Всего пары 225

Всего дублей 15 штук.

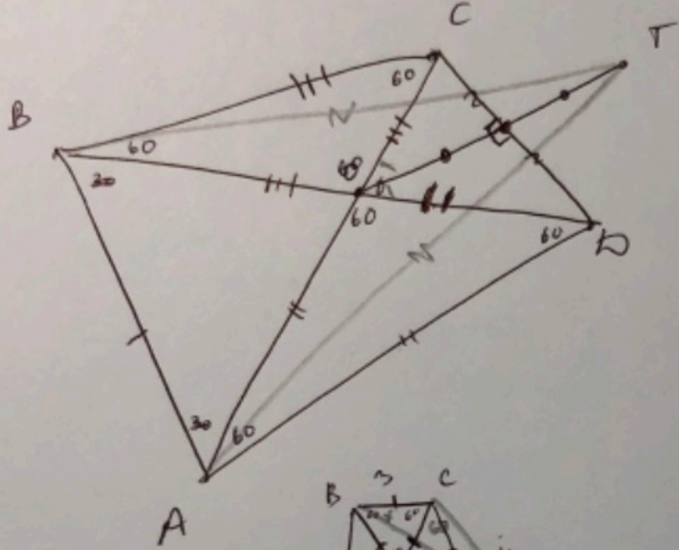
Допустим, на них число X.

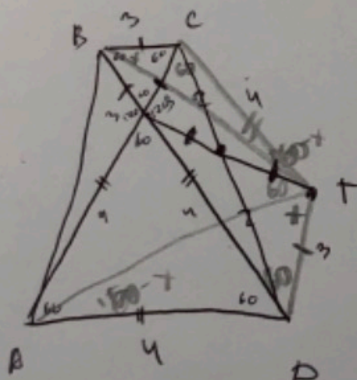
Число X всего встречается на 15 карточках.

~~Одна из этих дублей~~.

Значит X не встречается на 225-15=210 карточках

~~11~~ Всего вариации пары с числом x 1·210·210





$\cos 120 = \cos 90 \cdot \cos 30 - \sin 90 \cdot \sin 30 = -\frac{1}{2}$

$BT^2 = 9 + 16 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 4 = 25 + 12 = 37$

$BT = \sqrt{37}$

$S_{ABT} = \sin 60^\circ \cdot \sqrt{37} \cdot \sqrt{37} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 37 = 9{,}25\sqrt{3} = \frac{37}{4}\sqrt{3}$

$H = 4 \cdot \sin 60 + 3 \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = 3{,}5\sqrt{3}$

$3{,}5 \times 3{,}5$: 175, 105, $12{,}25$

$S_{ABCD} = \frac{3+4}{2} \cdot 3{,}5\sqrt{3} = 12{,}25\sqrt{3} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$

Черновик

№4 $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$

$(x^2-y^2)^2=37-x^2y^2$

$\cancel{x^2-y^2=\pm\sqrt{37}}$

$\cancel{43=x^4+y^4-2x^2y^2+7(x^2+y^2)=(x^2-y^2)^2+7(x^2+y^2)}$

$30=-7(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2$ $\quad 44=x^4+y^4-4x^2y^2+7x^2+7y^2$

$30=(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2-7)$ $\quad 44=\cancel{(x^2-y^2)^2}(x^2+y^2)(x^2+y^2+7)-6x^2y^2$

1 - 30

2 - 15

3 - 10

4

$a=x^2;\ b=y^2$

$30=(a+b)^2-7(a+b)=(a+b)(a+b-7)$

$44=(a+b)^2-6ab+7a+7b=(a+b)(a+b+7)-6ab$

$14=14(a+b)-6ab$

$7=7(a+b)-3ab$

$3ab=7(a+b-1)$

$\frac{3}{7}=\frac{a+b-1}{ab}$

Черновик

$7a+7b-3ab=7$

$a^2+b^2-ab=37$

$(a+b)^2-3ab=37$

$7(a+b)-3ab=7$

$(a+b)(a+b-7)=30$

$x(x-7)=30$

$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+120}}{2}=\left[\begin{array}{l}-3 \text{ - не подх.}\\ 10\end{array}\right.$

$x=10 \Rightarrow a+b=10$

$70-3ab=7 \Rightarrow ab=\frac{63}{3}=21$

$a(10-a)=21$

$a^2-10a+21=0$

$a_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{2}=\left[\begin{array}{l}3\\ 7\end{array}\right.$

Ответ: 1) $x=\pm3$, $y=\pm7$ 2) $x=\pm7$; $y=\pm3$.