Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006161**

ID профиля: **332271**

Вариант 14

Чистовик 2

№2

Пусть были записаны числа $a_1, a_2 \dots, a_n$. где $a_1 > a_2 > \dots > a_n$.

Тогда из условия следует, что:

$$a_1 + a_2 + \dots + 30 \cdot a_n = 450$$

$$14 \cdot a_1 + a_2 + \dots + a_n = 450$$

Пусть $a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = y$, тогда:

$$\begin{cases} a_1 + y + 30 \cdot a_n = 450 \\ 14 \cdot a_1 + y + a_n = 450 \end{cases} \Rightarrow a_1 + \cancel{y} + 30 \cdot a_n = 14 \cdot a_1 + y + a_n$$

$$29 \cdot a_n = 13 \cdot a_1$$

Т.к. НОД$(29; 13) = 1$, то минимально возможные значения a_n и a_1 это: $a_n = 13$, $a_1 = 29$.

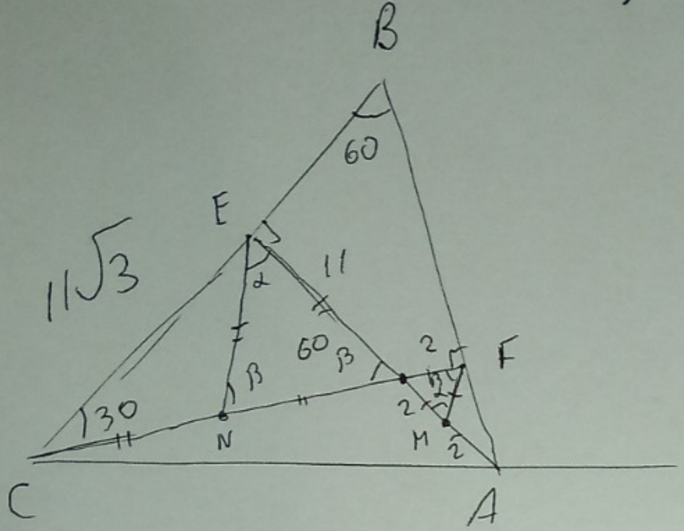
Заметим, что других решений не может быть, т.к. следующее решение $a_n = 26$, $a_1 = 58$, не удовлетворяет условию $14 \cdot a_1 + y + a_n = 450$, т.к. $14 \cdot a_1 > 450$; $14 \cdot 58 = 812 > 450$. Значит $a_n = 13$; $a_1 = 29$, тогда $y = 450 - a_n - 14 \cdot a_1 = 450 - 13 - 14 \cdot 29 = 437 - 406 = 31$

Т.к. $y = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 31$, где $a_2, a_3 \dots, a_{n-1}$ больше a_n и меньше a_1, значит в y входит строго два числа, т.к. если одно, то оно равно 31 что больше a_1, если 3 числа, то в сумме они дают 31 когда каждое из чисел больше 13, что невозможно. Значит: $y = a_2 + a_3 = 31$, $\min a_3 = 14$, тогда $a_2 = 17$, при $a_3 = 15$, $a_2 = 16$, в остальных случаях $a_3 > a_2$ что неверно, значит есть две вариации записанных чисел на доске.

Ответ: $a_1 = 29$, $a_2 = 17$, $a_3 = 14$, $a_4 = 13$ или $a_1 = 29$, $a_2 = 16$, $a_3 = 15$, $a_4 = 13$.

Черновик 1

№1



FM=2

$\boxed{AH=4}$

EN=11

$\boxed{CH=22}$

FM∥EN

$CE = \cos(30) = \frac{CE}{22}$

$CE = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 22 = 11\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 14 \\ \hline 232 \\ +\ 58\ \ \\ \hline 812 \end{array}$$

15·59

$$\begin{array}{r} 59 \\ \times\ 15 \\ \hline 295 \\ +\ 59\ \ \\ \hline 885 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 14 \\ \hline 116 \\ +\ 29\ \ \\ \hline 406 \end{array}$$

363+225

588

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ +\ 48\ \ \\ \hline 576 \end{array}$$

588=2·294

400

588

294=2·147

147

14+17

147 | 3

49

№2

$a_1, a_2 \ldots a_n$ $\{a_1 = x$

$a_1 > a_2 > \ldots > a_n$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = x$

$a_1 + a_2 + \ldots + 30\cdot a_n = 450$

$14\cdot a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 450$

$a_1 + 30\cdot a_n = 14\cdot a_1 + a_n$

$\boxed{29\cdot a_n = 13\cdot a_1}$

Т.к. НОД$(a_1; a_n)=1$

то $\min a_n = 13$, $\min a_1 = 29$

$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} = y$

Тогда $a_1 + y + 30\cdot a_n = 450$

$14\cdot a_1 + y + a_n = 450$

Черновик 2

$a_1 = 29, \quad a_n = 13$

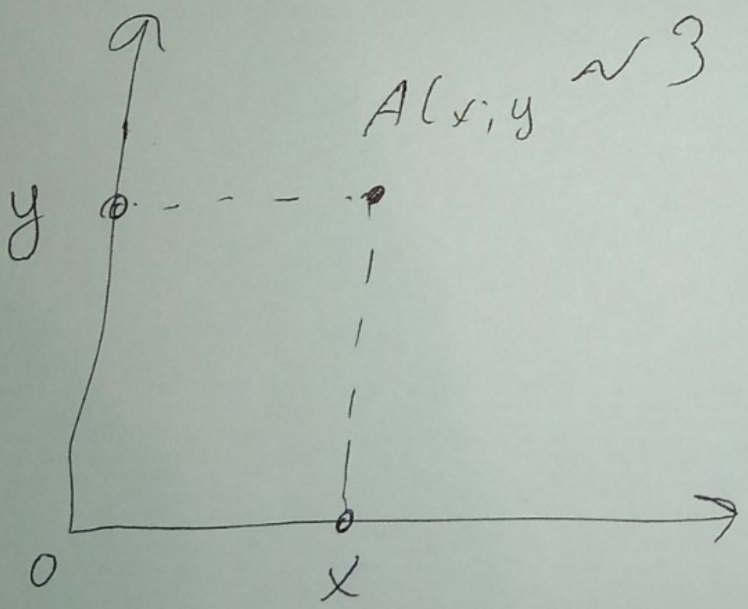
$a_1 + y + 30 \cdot a_n = 450$

$14 \cdot a_1 + y + a_n = 450$

$y = 450 - \underbrace{30 \cdot 13}_{390} - 29 = 31$

Среди чисел в подмножестве у нет чисел ≤ 13 или ≥ 29, т.е. ~~максимум~~ два числа

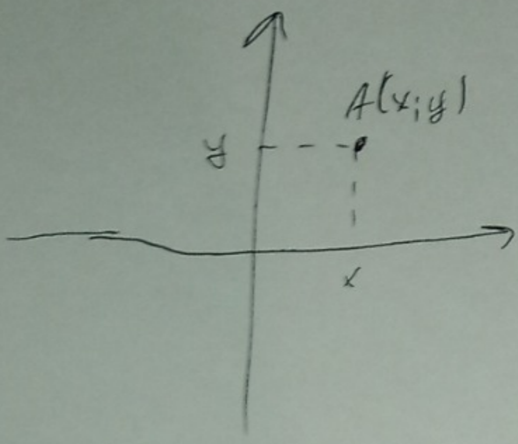
№ 3



$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$

Черновик 3



$$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$$

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$$

Чистовик 1

Дано:

CF и AE - высоты

M и N - середины AH и CH

$FM=2$, $EN=11$

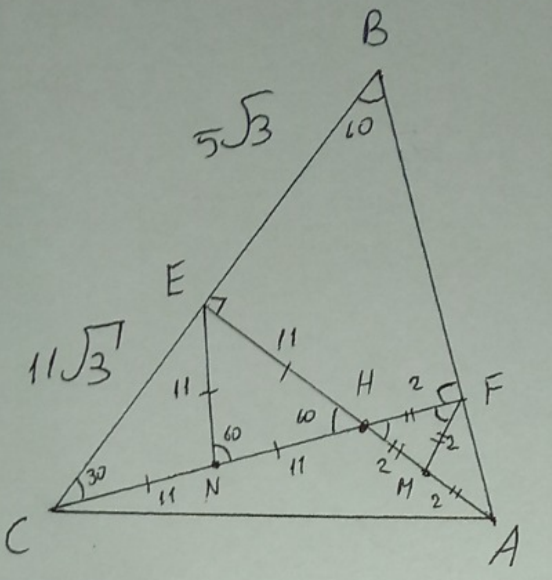
$FM \parallel EN$

$\angle ABC$ - ?

$S_{\triangle ABC}$ - ?

$R_{\triangle ABC}$ - ?

Решение: №1



Т.к. EN и FM - медианы в прямоугольном треугольнике из прямого угла, то $EN=CN=NH$, $FM=NM=AM$.

Т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle ENH = \angle MFH$ (накрест лежащие).

Т.к. $FM=HM$, то $\angle MFH = \angle MHF = \angle NHE$, значит $EN=EH=NH$, значит $\triangle ENH$ равносторонний как и $\triangle HFM$ из аналогичных рассуждений.

$\angle EHF = 180^\circ - \angle EHN = \cancel{180-120}\ 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, тогда $\angle ABC =$
$= 360^\circ - (\angle BEH + \angle BFH + \angle EHF) = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$.

из т. Пифагора: $EC = \sqrt{CH^2 - EH^2} = \sqrt{(11\cdot 2)^2 - 11^2} = 11\sqrt{2^2-1} = 11\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

~~из т. Пифагора:~~ $\sin(\angle ABC) = \frac{AE}{AB}$; $AB = \frac{AE}{\sin(\angle ABC)} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}} =$
$= \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$, тогда $BE = \sin(30)\cdot AB = 5\sqrt{3}$.

Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{AE\cdot BC}{2} = \frac{15}{2}\cdot(BE+EC) = \frac{15}{2}(11\sqrt{3}+5\sqrt{3}) =$
$= \frac{16\sqrt{3}\cdot 15}{2} = 120\sqrt{3}$

из т. Пифагора: $AC = \sqrt{EC^2 + AE^2} = \sqrt{121\cdot 3 + 15^2} = \sqrt{363+225} = 2\sqrt{147} =$
$= 14\sqrt{3}$. По т. Синусов: $\frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = 2R$; $R = \frac{AC}{2\cdot\sin(60)} = \frac{14\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{2}} =$
$= 14$;

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{\triangle ABC} = 120\sqrt{3}$; $R_{\triangle ABC} = 14$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006161**

ID профиля: **332271**

Вариант 14

Чистовик 1

№4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Заменим x^4+y^4 на:

$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$;

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

Получим следующее:

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-7=3x^2y^2 \\ (x^2+y^2)^2-37=3x^2y^2 \end{cases}$$

Приравняем эти значения:

$7(x^2+y^2)-7=(x^2+y^2)^2-37$

Пусть $x^2+y^2=\alpha$, тогда:

$\alpha^2-7\alpha-30=0$; $D=49-4\cdot(-30)=169$

$\alpha_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{169}}{2}$; Т.к. $\alpha=x^2+y^2$, то $\alpha>0$, значит

$\alpha_1=\frac{7-13}{2}$ не подходит, т.к. меньше 0. Значит

$\alpha=\alpha_2=\frac{7+13}{2}=10$; Тогда подставим α в (1) ур-ние

$7\cdot10=7+3x^2y^2$; $21=x^2y^2$. Получим систему:

$$\begin{cases} x^2y^2=21 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \begin{cases} x^2y^2=21 \\ x^2=10-y^2 \end{cases} \Rightarrow (10-y^2)y^2=21$$, пусть $y^2=\beta$, тогда:

$\beta^2-10\beta+21=0$; $D_1=5^2-\cancel{1}\cdot21=4$; $\beta_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{4}}{1}$;

$\beta=5\pm2$; Т.е. $\left[\begin{array}{l} y^2=7 \\ y^2=3 \end{array}\right.$ если $y^2=7$, то $x^2=10-7=3$, если $y^2=3$, то $x^2=10-3=7$.

Если $y^2=7$, $x^2=3$, пары возможных решений это: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$. Если $y^2=3$, $x^2=7$, то парами решений являются: $(\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$. Значит всего 8 решений.

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$.

Чистовик 2

Дано:

$AC \cap BD = O$

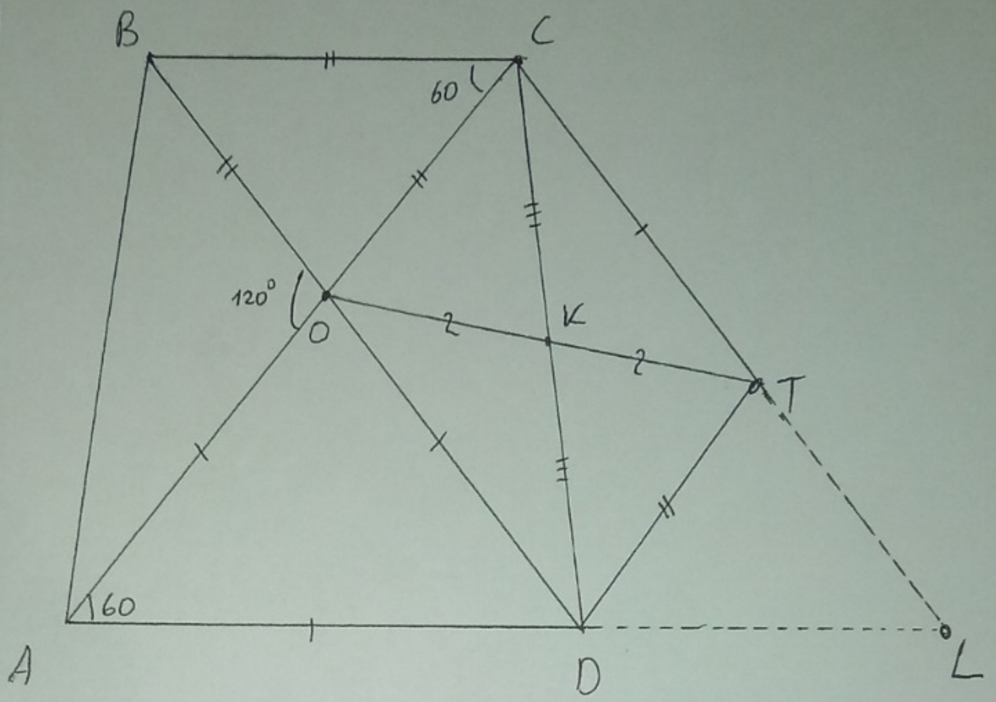
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильные

T симметрична O относ. серед. CD

а) Док-ть: $\triangle ABT$ – правильный

б) если $BC = 3$, $AD = 4$, найти $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Решение: №6



Заметим, что $BC \parallel AD$, т.к. $\angle BCA = \angle CAD = 60°$ (т.к. $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – равносторонние). Тогда $\triangle BOA = \triangle COD$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит $AB = CD$, т.е. $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Пусть точка K – середина CD. Тогда по условию $OK = KT$, и $CK = KD$, значит $OCTD$ – параллелограмм (диагонали точкой пересечения делятся пополам). Значит $OC = DT$, $TC = OD$, $AC \parallel DT$. Тогда из параллельности следует, что: $\angle AOD = \angle ODT = 60°$, тогда $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120°$. $\angle AOB = 180° - \angle AOD = 120°$. Тогда $\triangle ADT = \triangle AOB$ (по двум сторонам и углу между ними). Аналогично доказывается равенство $\triangle BCT = \triangle AOB$, и тогда $BT = AB$, $AT = AB$. Значит $\triangle ABT$ – равносторонний.

б) Т.к. $AD = 4$, $BC = 3$, то зная что $BC = OC = DT$, получим, что $DT = 3$, тогда по теореме косинусов для $\triangle ADT$: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot DT \cdot \cos(\angle ADT)$

2110061641 (U332271, M1273678)

$AT = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(120°)} = \sqrt{16 + 9 - 24 \cdot (-0{,}5)} = \sqrt{25 + 12} = \sqrt{37}$

Чистовик № 3

№ 6

Т.к. $AT=\sqrt{37}$, и треугольник ABT - правильный, то его площадь легко найти. Используем формулу $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$, где α - угол между a и b.

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{37} \cdot \sqrt{37} \cdot \sin(60) = \frac{37\sqrt{3}}{4}$$

Теперь найдем площадь $ABCD$. Продлим CT до пересечения с AD. Пусть $CT \cap AD = L$. Тогда $\triangle ACL$ равносторонний, т.к. $\angle LAC = 60^\circ$, и $\angle ACL = 60^\circ$. Его площадь равна площади $ABCD$, т.к. $\triangle CDL = \triangle ABC$, а значит $S_{\triangle CDL} = S_{\triangle ABC}$, а S_{ACD} - общая площадь. $\triangle CDL = \triangle ABC$, т.к. $BCLD$ - параллелограмм ($BC \parallel DL$, $BD \parallel CL$), и тогда $BC = DL$, $CD = AB$, $\angle CDL = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \angle ABC = 120^\circ$, значит $\triangle CDL = \triangle ABC$. Площадь $\triangle ACL$ легко найти, это равносторонний треугольник со стороной $AC = AO + OC = 4 + 3 = 7$. $S_{\triangle ACL} = 7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(60) = \frac{49\sqrt{3}}{4}$,

Тогда $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37\sqrt{3}}{4} : \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{37\cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 49\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{37}{49}$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$.

Чистовик 4

№5

Фокусник выбирает две карты, пусть сначала он выбирает дубль. Т.к. всего дублей 15 штук, то и вариантов выбрать дубль 15. Следующая карта не должна содержать число записанное на дубле. Пусть на дубле записано число n, тогда карт которые содержат n 28 штук. Первые 14 карт с n это варианты когда n на одной стороне, а оставшееся число от 1 до 15 кроме n на другой стороне. И 14 карт когда мы берем n в другую сторону, а от 1 до 15 кроме n на другой. Т.е. 14 вариантов когда n на красной стороне, и 14 вариантов когда на синей. Т.к. фокуснику нужно вытащить карту без n, то вариантов выбрать такую карту $224 - 28 = 196$, значит всего вариантов вытащить такие 2 карты $15 \cdot 196 = 2940$ вариантов.

Мы могли полагать, что фокусник вытаскивает сначала дубль, так как набор карточек AB и BA одно и то же.

Ответ: 2940 вариантов.

Черновик 1

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} = \begin{cases} 7(x^2+y^2)=7+3x^2y^2 \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2=37+x^2y^2 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2 \qquad \begin{cases} 7(x^2+y^2)-7=3x^2y^2 \\ (x^2+y^2)^2-37=3x^2y^2 \end{cases}$$

$$7(x^2+y^2)-7=(x^2+y^2)^2-37$$

$$x^2+y^2=\alpha$$

$$\alpha^2-30-7\alpha=0$$

$$D=49+120=169$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{7\pm13}{2}$$

$$\alpha\geqslant0 = 10$$

$\boxed{x^2+y^2=10}$, тогда

$$70-7=3x^2y^2$$

$$63=3x^2y^2$$

$$\boxed{21=x^2y^2}$$

$$x^2=\frac{21}{y^2}$$

$$\frac{21}{y^2}+y^2=10 \quad \cdot y^2$$

$$21+y^4=10y^2$$

$$y^2=\beta$$

$$\beta^2-10\beta+21=0$$

$$D_1=25-21=4$$

$$\beta_{1,2}=5\pm2$$

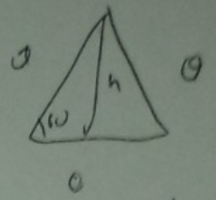
$$\beta=7,\ \beta=3$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2=7\ ;\ x^2=3 \\ y^2=3\ ;\ x^2=7 \end{array}\right.$$

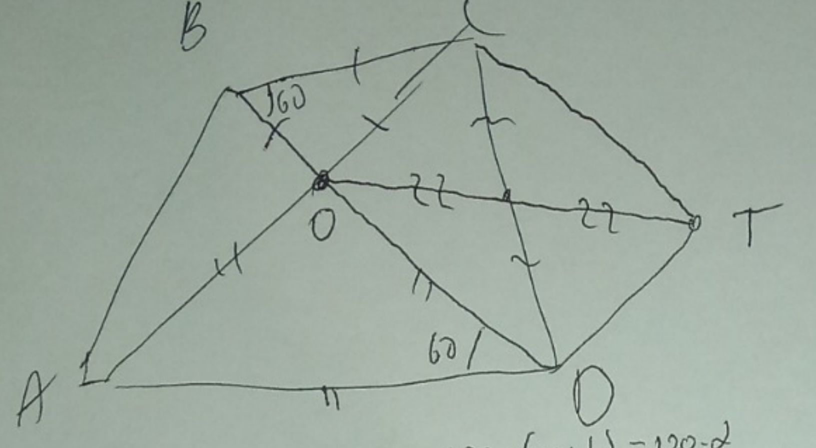
$\to (\sqrt{3};\sqrt{7});\ (-\sqrt{7};\sqrt{3}),\ (\sqrt{7};-\sqrt{3})\ (-\sqrt{7};-\sqrt{3})$

Чернови 2

15^2 різлична карт



№6



$\sqrt{37} = AT$

$\sin 60 = \frac{h}{a}$

$h = \sin 60 \cdot a$

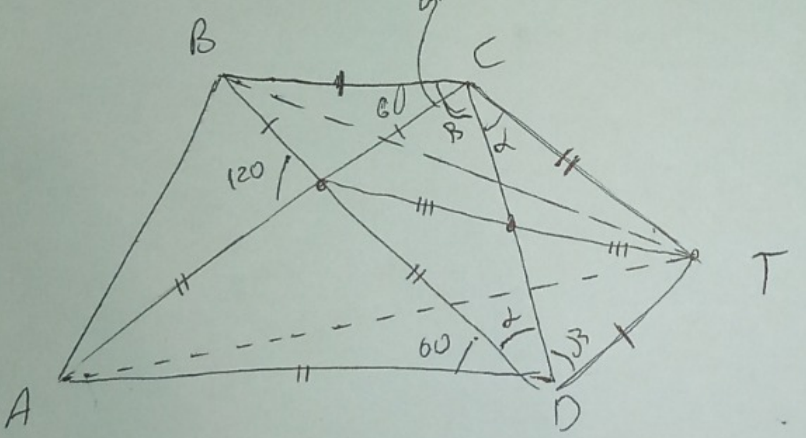
$\frac{\sin 60 \cdot a^2}{2} = S$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

$180 - (60+\alpha) = 120 - \alpha$

$BT = AB$

$\frac{49}{37}$

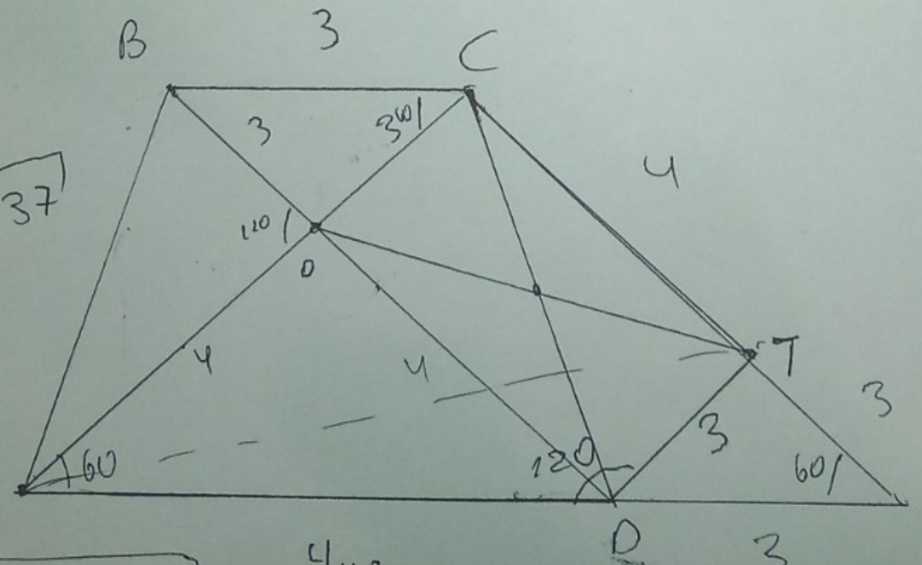


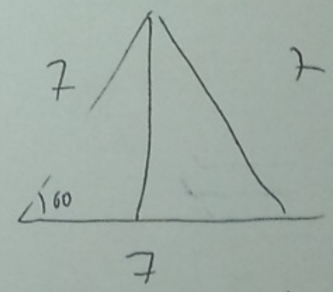
$AB^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120$

$AB^2 = 25 - 24 \cdot (-0{,}5)$

$AB^2 = 25 + 12 = \sqrt{37}$

$\sqrt{37}$





$\sin 60 = \frac{h}{7}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = h$

$\frac{7\sqrt{3}}{2} = h$

$\frac{ah}{2} = S = \frac{7 \cdot 7\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{S_{тр} = \frac{49\sqrt{3}}{4}}$

443

$\times \frac{196}{15}$

980

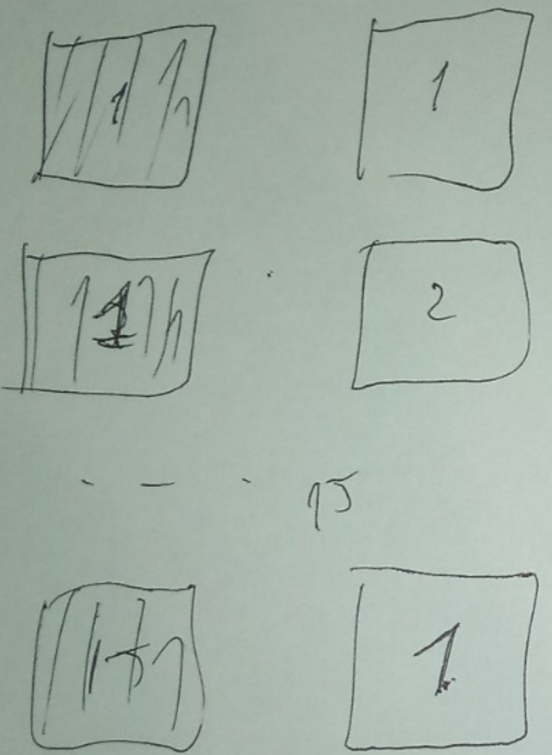
$+196$

2940

Черновик 3

$$\begin{array}{r} \times\,196 \\ 15 \\ \hline \end{array}$$

15^2 игры



15

Если фишки вытаскивают два дубля, то таких вариантов:

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{13!\cdot 2!} = \frac{14\cdot 15}{2} = 7\cdot 15 = 105$$

Если 1 дубль и 1 не дубль

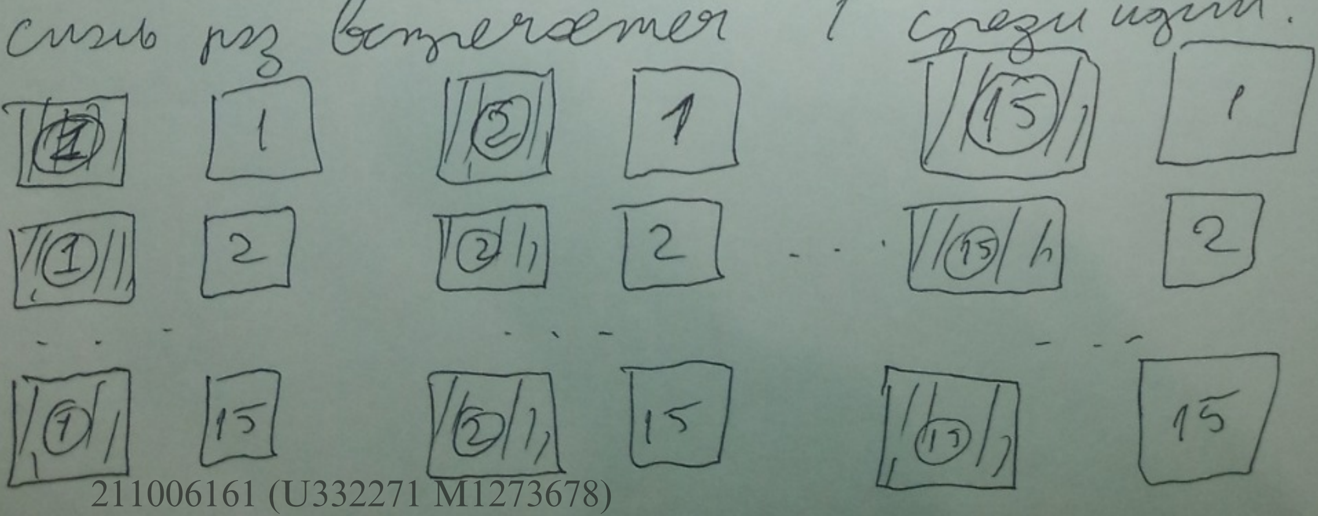
$15\cdot 28$ $196\cdot 15$

$224-28$ не считая дубль

28 раз

Если фишки вытащены дубль с числом n, то на другой карте n быть не может, таких игр

сколько раз встречается 1 среди игр?



15 штук 15 штук 15 штук