Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006018**

ID профиля: **343302**

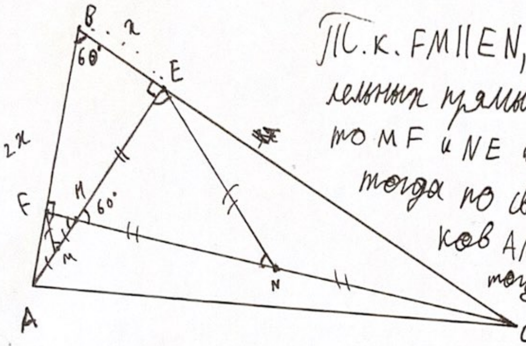
Вариант 14

Чистовик

№1.

Дано:
ΔABC
$AE \perp BC$
$CF \perp AB$
$AM = MH$
$HN = NC$
$FM = 2$
$EN = 11$
$FM \parallel EN$

$\angle ABC$ - ?
S_{ABC} - ?
R - ?



Т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle MFH = \angle HNE$ по св-ву параллельных прямых; т.к ΔAFH и ΔHEC - прямоугольные, то MF и NE их медианы соответственно, тогда по св-ву прямоугольных треугольников $AM = MF = MH$ и аналогично $HN = NE = NC$, тогда ΔMFH и ΔHNE - р/б, тогда $\angle MFH = \angle FHM$; по св-ву вертикальных углов $\angle FHM = \angle EHN$, тогда т.к. ΔHNE - р/б, то $\angle NHE = \angle HEN$, тогда $\angle HNE$ - равносторонний, то есть $\angle EHN = 60°$, тогда $\angle FHE = 180° - 60° = 120°$, тогда по св-ву четырехугольника $(FBEH)$:

$\angle FBE = 360° - \angle BEH - \angle EHF - \angle HFB = 360° - 90° - 120° - 90° = 180° - 120° = 60°$, а т.к. $\angle FBE = \angle ABC$, то $\angle ABC = 60°$; т.к. ΔHEN - равносторонний, то $HE = 11$, т.к $EN = 11$, $HC = 2EN = 22$, тогда найдем EC по теореме Пифагора из ΔHEC:

$HC^2 = HE^2 + EC^2 \Leftrightarrow 22^2 = 11^2 + EC^2 \Leftrightarrow EC = \sqrt{22^2 - 11^2} = \sqrt{11^2(4-1)} = 11\sqrt{3}$, тогда,

т.к. ΔABE - прямоугольный, $\angle ABE = 60°$, тогда $\frac{AB}{BE} = \frac{2}{1} = \frac{2x}{x}$, тогда по теореме Пифагора из ΔABE:

$AB^2 = BE^2 + AE^2 \Leftrightarrow$ т.к. $AE = 11 + 2 + 2 = 15$, то: $4x^2 = x^2 + 225 \Leftrightarrow 3x^2 = 225 \Leftrightarrow$

$x = \sqrt{\frac{225}{3}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 15}{3}} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$, тогда

$BC = CE + EB = 11\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$, тогда по формуле:

$S_{ABC} = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{15 \cdot 16\sqrt{3}}{2} = 15 \cdot 8\sqrt{3} = 30 \cdot 4\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$; для ΔABC найдем AC по теореме косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60°$, тогда:

$AC = \sqrt{300 + 256 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3(100 + 256 - 160)} = \sqrt{3 \cdot 196} = 14\sqrt{3}$, тогда

по теореме $a = R\sin\alpha$, где a - хорда, $\sin\alpha$ - угол на который хорда опирается; $R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{14\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 7 \cdot 3 = 21$

1

Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$, $R = 21$

Чистовик

№2

Пусть x - наименьшее число, z - наибольшее, y - сумма оставшихся чисел, тогда:

$$\begin{cases} 30x+y+z=450 \\ x+y+14z=450 \end{cases} \Leftrightarrow 30x+y+z=x+y+14z \Leftrightarrow 29x-13z=0 \Leftrightarrow x=\frac{13z}{29}, \text{ тогда } z \vdots 29,$$

т.к. x - натуральное, тогда:

$$\frac{13z}{29}+y+14z=450$$

$$\frac{419}{29}z+y=450, \text{ т.к. } y>0, \text{ то } 450-\frac{419}{29}z>0, \text{ если } z=29, (z \vdots 29), \text{ то}$$

$y=450-419=31>0$, если $z=29\cdot2=58$, то:

$y=450-419\cdot2=450-838<0 \Leftrightarrow z=29$, тогда $y=31$, найдем x:

$x=\frac{13z}{29}=13$, тогда все остальные числа больше 13, и меньше 29, тогда

остальные: число явно не одно, т.к. $31>29$, если их три то, т.к. $\frac{31}{3}<13$, то ~~это возможно и два тоже возможно, т.к.~~ ~~31 < 58,~~ это невозможно,

т.к. хотя бы одно число будет меньше 13, то есть числа два, тогда:

$y_1+y_2=31$; $y_1, y_2<29$; $y_1, y_2>13$, тогда возможные варианты:

$(13, 14, 17, 29)$, $(13, 15, 16, 29)$, т.к. $y'_{min}=14$, тогда $y'_{max}=31-14=17$, где y' одно из чисел

(не 13 и не 29)

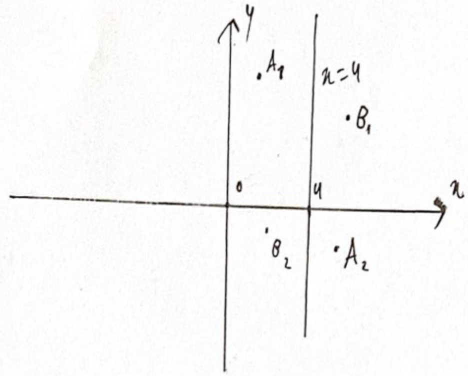
Ответ: $(13; 14; 17; 29)$ или $(13, 15, 16, 29)$

№3.

Возможны два случая:

1) $x_A < 4,\ x_B > 4$

2) $x_A > 4,\ x_B < 4$



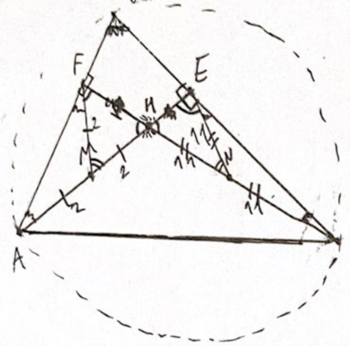
Рассмотрим:

$$\begin{cases} 2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0 \\ a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0 \\ x(xa^2-2a^3-6a)+y(a^2y-2a^2)+a^4+9=0 \Leftrightarrow a\neq 0 \end{cases}$$

Черновик

N1.



$\angle ABC - ? = 60$

$S_{ABC} - ?$

$R - ?$

N2.

$450 \cdot 29 - 29y - 29z = 0$

$450 - y - 14z = 0$

$450 = y + 14z$

$30x + y + z = 450$

$x + y + 14z = 450$

$x = 450 - y - 14z$

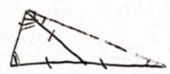
$450 \cdot 30 - 30y - 30 \cdot 14z + y + z = 450$

$x + y + 14z = y + 14z$

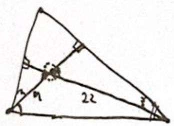
$x + 13z = 0$

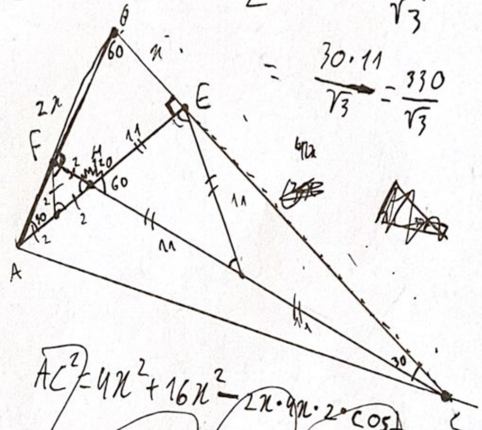
$x + y + 14z = y + 14z$

$x = 0$



$$S = \frac{\frac{4 \cdot 11}{\sqrt{3}} \cdot (11 + 4)}{2} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 15}{\sqrt{3}} = \frac{30 \cdot 11}{\sqrt{3}} = \frac{330}{\sqrt{3}}$$





$2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 10 = 20 \cdot 21 = 420$

419

290

580

$AC^2 = 4x^2 + 16x^2 - 2x \cdot 4x \cdot 2 \cdot \cos\angle$

$22^2 = 11^2 + 9x^2$

$AC = \sqrt{20x^2 - 16x^2 \cdot \cos\angle}$

$121 \cdot 4 = 121 + 9x^2$

$121 \cdot 3 = 9x^2$

$AC = \sqrt{20x^2 - 8x^2}$

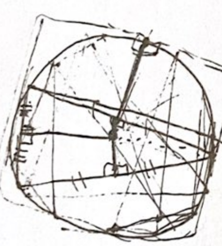
$AC = \sqrt{12x^2}$

$x^2 = \frac{121 \cdot 3}{9} = \frac{121}{3}$

$x = \frac{11}{\sqrt{3}}$

$x - 5\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$



$a = R \sin\angle$

$14 \cdot 29 = 58 \cdot 7$

$4x^2 = 4 \cdot 25 \cdot 3$

16

$32 \cdot 2$

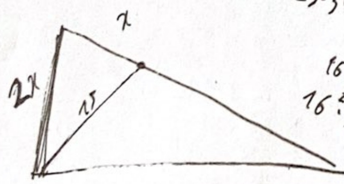
$64 \cdot 4$

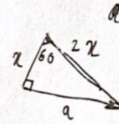
$128 \cdot 8$

$256 \cdot 16$

$16\sqrt{3}$

$16^2 \cdot 3$





$a = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2}$

$\frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$50 + 45 + 3 = 50 + 48 = 98$

$4x^2 = 15^2$

$2 \cdot 5\sqrt{3}$

$196 \mid 2$

$45 + 4 = 49$

$49 \cdot 4$

$4 \cdot 5 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 16 = 10 \cdot 16 = 160$

$$\frac{a}{\sin\angle} = \frac{14\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 7 \cdot 3 = 21$$

$356 - 160 = 256 - 60 = 200 - 4 = 196$

Черновик

N2

$$\begin{cases} 30x+y+z=450 \\ x+y+14z=450 \end{cases}$$

$x=450-y-14z$

$450\cdot30-30y-14\cdot30z+y+z=450$

$450\cdot29-29y-(14\cdot30-1)z=0$

$450=\dfrac{29y+(14\cdot30-1)z}{29}=y+\dfrac{419}{29}z$

$z \vdots 29$

$30x+y+z=x+y+14z$

$29x-13z=0$

$x=\dfrac{13z}{29}$

$z \vdots 29$

$\cancel{\dfrac{13z}{29}+y+14z=y+\dfrac{419}{29}z}$

$\cancel{\dfrac{13z}{29}+14z-\dfrac{419}{29}z=0}$

$\cancel{14z-\dfrac{406}{29}z=0}$

$\dfrac{13z}{29}+y+14z=450$

$\dfrac{13z+406z}{29}+y=450$

$\dfrac{419}{29}z+y=450$

$y>0$

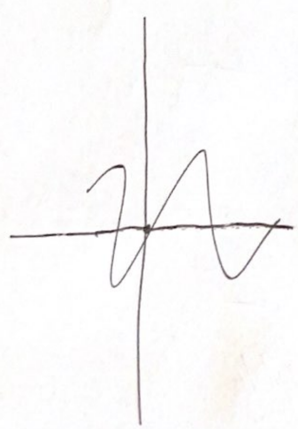
$450-\dfrac{419}{29}z>0$

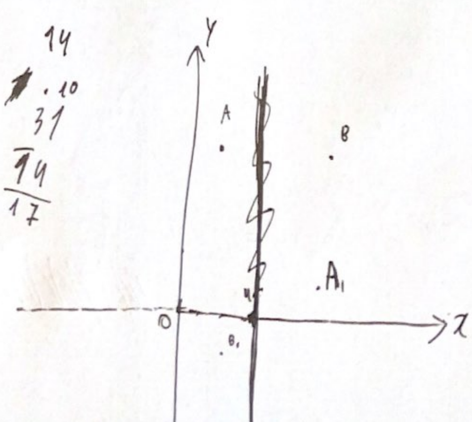
$z=29$

$450-419=50-19=40-9=31$

$20+18=38$

14
$\cdot10$
31
$\overline{14}$
17





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006018**

ID профиля: **343302**

Вариант 14

Чистовик.

№4.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$, $x^2y^2=b$, то, т.к. $(x^2+y^2)=x^4+2x^2y^2+y^4$, то:

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-2b-b=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases} \Leftrightarrow a^2-7a=37-7 \Leftrightarrow a^2-7a-30=0,$$ через дискриминант:

$a=\frac{7\pm 13}{2}$, откуда $a_1=10$, $a_2=-3$, но т.к. $x^2+y^2\geqslant 0$, т.к. квадрат всегда $\geqslant 0$, откуда:

$a=10$, тогда:

$$\begin{aligned} 70-3b&=7 \\ 63-3b&=0 \\ 21-b&=0 \\ b&=21 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7} \\ x=-\sqrt{7} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$

Чистовик

N5.

Пусть фокусник сначала вытаскивает дубль, дубль он может вытянуть 15 способами (дубль 1, 1; дубль 2, 2 … дубль 15, 15), пусть он вытянул дубль с числом x, тогда других карточек с числом x:

где на синей стороне x: (перечислим числа на красной стороне)

$\underbrace{1;2;3\ldots15}_{15\text{ чисел}}$ минус дубль x, то есть таких чисел 14

аналогично для красной стороны тоже 14 чисел, тогда фокусник может взять любую из 15^2 карт, кроме $14\cdot2+1$ (+1, т.к. дубль фокусник уже вынул из колоды, тогда способов:

$$15\cdot(15^2-29)=15\cdot(225-29)=15\cdot196=2940$$

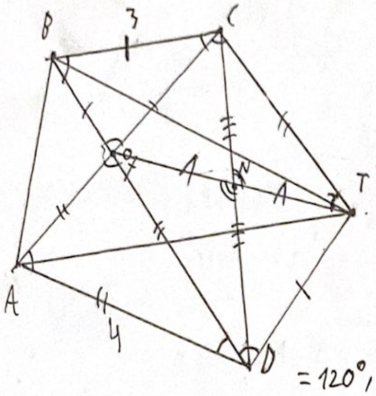
Ответ: 2940 способов

Чистовик

N6.

Дано:
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные
$ABCD$ - выпуклый четырехугольник
$BD \cap AC = O$
$ON = NT$
$CN = ND$
$N \in OT$
$BC = 3, AD = 4$

Док-ть
$\triangle ABT$ - правильный
$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?



$\angle CNT = \angle OND$ по св-ву верт. углов, тогда $\triangle OND = \triangle NCT$ по двум сторонам и углу между ними, тогда: $CT = OD$, аналогично $\angle OCN = \angle DNT$, откуда $\triangle OCN = \triangle DNT \Leftrightarrow OC = DT$, откуда $OCTD$ - параллелограм; т.к. $\triangle BOC$ правильный, то $\angle BOC = 60°$, откуда $\angle COD = 180° - 60° = 120°$, откуда по св-ву параллелограма $\angle OCT = \angle ODT = 180° - \angle COD = 60°$, т.к.

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120°$ и $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120°$ (из того, что $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные), т.к. $BC = DT$, $AD = CT$, то

$\triangle BCT = \triangle TDA$ по двум сторонам и углу между ними, то BT=AT,

$\triangle ATD = \triangle DCO$, по двум сторонам и углу между ними, то $BT = AT$,

$= 120°$ и $\angle ADT = 120°$; то $AT = CD$, т.к. $\angle COD = 180° - \angle BOC =$

$\angle BOA = \angle COD$ по св-ву верт. углов, то $\triangle BOA = \triangle COD$, т.к. $\triangle BCT = \triangle TDA = \triangle COD$, то $AT = CD = BT$, т.к.

углу между ними (стороны равны из правильности $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$), откуда $CD = BA$, а т.к. $CD = AT = BT$, то $AB = AT = BT \Leftrightarrow \triangle ABT$ - равносторонний $\Leftrightarrow \triangle ABT$ - правильный

а) что и требовалось доказать

б) Найдём AB ($AB = CD$, то есть и CD) по теореме косинусов из $\triangle AOB$:

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos 120° \Leftrightarrow AB = \sqrt{9+16+12} = \sqrt{25+12} = \sqrt{37}$

Найдём $S_{\triangle ABT}$:

$S_{\triangle ABT} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = 37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, Найдём S_{ABCD} через $S_{BOC} + S_{AOD} + 2S_{BOA}$

~~Найдём S_{ABCD} через S_{ABC} и S_{ACD}: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$, где $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}$, где p - полупериметр. $S_{ABC} = \sqrt{\ }$~~

$S_{BOC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 9$, $S_{AOD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16$, $S_{BOA} = \frac{BO \cdot OA}{2} \cdot \sin 120° =$

$6 \cdot \sin 120° = 6 \cdot \frac{24}{25}$

Ответ: $\frac{37\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}(9+16) + 6 \cdot \frac{24}{25}} = \frac{37}{25 + 6 \cdot \sin 120°}$

3

Черновик

N4.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2=(x^2+y^2)(x^2+y^2)=x^4+2x^2y^2+y^4$$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-2b-b=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases}$$

$a^2-7a=37-7$

$a^2-7a-30=0$

$49+120=169$

$a=\frac{7\pm13}{2}$

$a_1=10$

$a_2=-3$, т.к. $x^2+y^2\geq0$, то $a=10$

$70-3b=7$

$63-3b=0$

$21-b=0$

$b=21$

$x^2+y^2=10$

$x^2y^2=21 \Leftrightarrow x^2=3, y^2=7$ или $x^2=7, y^2=3$

N5,

$\sin(180-\alpha)$

$\cos 60°=\frac{1}{2}$

BT = AT

$200-4=196$

$\frac{1960}{2}\cdot3$

$(500+450+30)\cdot3=(950+30)\cdot3=980\cdot3=2700+240=2940$

$9+16+12=37$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S=\frac{ab\cdot\sin A\cdot B}{2}$