Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005924**

ID профиля: **307948**

Вариант 14

Математика, Экзамен

Чистовик

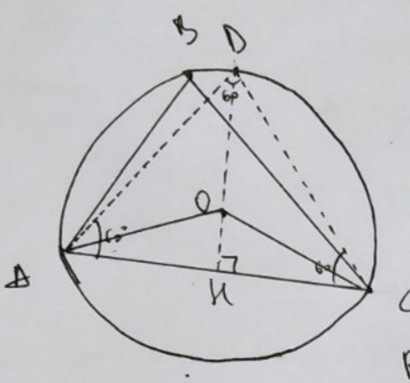
лист 4

№1 продолжение

По сумме углов ΔFBC : $\angle FBC + \angle BCF + \angle CFB = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle FBC = 180^\circ - \angle BFC - \angle BCF = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$



На основании AC построим равносторонний ΔADC.

т.O – центр описаной вокруг ΔABC окружности,

т.D лежит на этой окр., т.к. $\angle ABC = \angle ADC$ и вписанные.

$R = AO = OD = \frac{2}{3} DH$

(т.к. ΔADC равностор., DH – медиана, биссектриса и высота, высоты делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1 от вершины.)

$DH^2 + AH^2 = AD^2$, $AD = AC$, $AH = \frac{1}{2} AC$

$R = AO = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{4AH^2 - AH^2}$

По теореме косинусов

$AC^2 = AK^2 + CK^2 - 2 \cdot AK \cdot CK \cdot \cos \angle AKC$

$AC^2 = 4^2 + 22^2 - 2 \cdot 4 \cdot 22 \cdot (\cos 60^\circ)$

($\angle AKC = 120^\circ$, т.к. опир. на дугу AC, $= 60^\circ$ и центральный).

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$AC^2 = 588$ $\quad AC = \sqrt{588}$

Ответ: $R = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{588}\right)^2}$

Математика, 9 класс

~~№1 продолжение 2~~ ~~Чистовик~~ лист 5

Черновик

Математика, 9 класс

Черновик

$a_1, a_2, \dots a_n$

$30 \cdot a_1 + (a_2 + \dots + a_n) = 450$

$(a_1 + \dots a_{n-1}) + 14 \cdot a_n = 450$ (тогда) 1

$(a_1 + \dots + a_n) + 29 a_1 = (\dots) + 13 \cdot a_n$

$29 a_1 = 13 \cdot a_n = 450 - (s)$

$a_1 = 13 \quad a_n = 29$

$13 \cdot 29 = 377$

$s + 13 \cdot 29 = 450$

$450 - 377 = 73 = s$

$22 \cdot 22 = 44 + 44 = 484$

$73 - 42 = 31$

$s = 31$

$13 \dots 29$

$31 - 14 = 17$

14 и 17

15 и 16

$n = 26 \quad n = 58$

$26 \cdot 29 + s = 45$

$26 \cdot 16 = 104$

$4^2 + 22^2 + 4 \cdot 22$

$16 + 484 + 88$

$484 + 104 = 588$

$29 \cdot 26$

$87 \cdot 2 = 154$

$= 450 - s$

$26 \cdot 25$

$s = 450 - 154 = 256 - 84$

$58 + 26 = 84$

$13 \cdot 30 = 390$

$390 + 17 = 404$

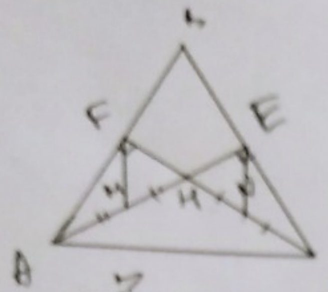
$404 + 17 = 421$

450

Черновик

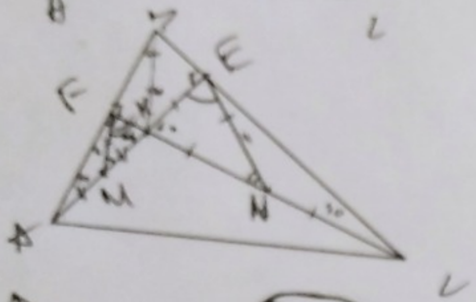
Математика, 9 класс

Чертёж



$FM = 2 \quad EN = 11$

$FM \parallel EN$

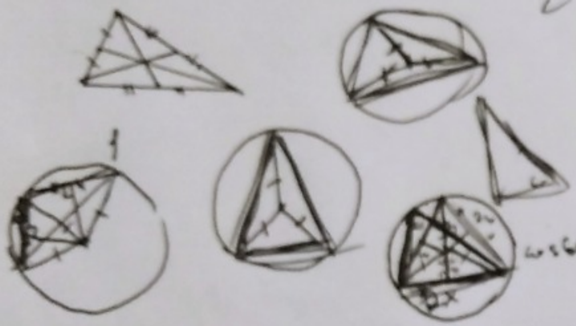


$\angle ABC$ - ?

$S_{\triangle ABC}$ - ?

$R_{\text{окр}}$ - ?

накрест лежащие $\angle$



$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$\triangle AFH \sim \triangle CEF$

(по углам)

$EN = HN = NC$ (медианы)

$FM = MH = AM$ (-//-)

$\Rightarrow \angle HEN = \angle EHN$ (св-во р/б $\triangle$)

и $\angle MFH = MHF$ (-//-)

$\Rightarrow \angle HEN$ равност

$\triangle F^{7}_{FM}$

считает углы

1) $\angle ABC = 60°$

2) $S_{\triangle ABC} =$ ~~$S_{\triangle AFC} + S_{\triangle FBC}$~~

$S_{\triangle}$ ~~AFC~~ $= \frac{CF \cdot AB}{2}$

$CF = 22 + 2 = 24$

AB :

$AC^2 = AH^2 + HC^2 - AH \cdot HC \cdot \cos 120$

$4^2 + 22^2 + 22 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \\ +16 \\ \hline 500 \\ -44 \\ \hline 456 \end{array}$$

$478 | 2$

$239 | 6$

$228 | \quad 114 | 2 \quad 57 | 3 \quad 19 |$

$456 | 2$

$228 | 2$

114

$(3y)^2 = x^2 + 4x^2 - 2x^2 \cdot \cos 60$

$9y^2 = 4x^2$

$3y = 2x$

$R = 2y = 2\frac{2x}{3} = \frac{2AC}{3} = \frac{2\sqrt{478}}{3}$

$AF^2 = FH^2 + AH^2 -$

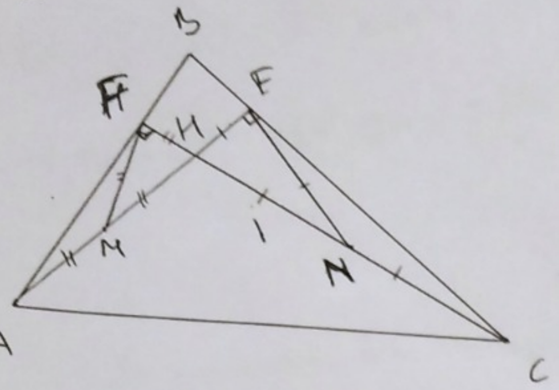
211005924 (U307948 M1276620)

Математика, 9 класс

Чистовик

№1

лист 3



Решение:

EN - медиана в прям. треуг. HEC, $\angle HEC = 90^\circ$

$\Rightarrow EN = \frac{1}{2} HC = HN = NC$

(медиана в прямоуг. $\Delta = \frac{1}{2}$ гипотенузы)

FM - медиана в прям. треуг. HFA, $\angle HFA = 90^\circ$

$\Rightarrow FM = HM = MA$ (-//-)

$\Rightarrow FM = MH \Rightarrow \Delta HMF$ - р/б (по опред.)

$\Rightarrow \angle MFH = \angle FHM$ (по св-ву р/б Δ)

$HN = NE \Rightarrow \Delta ENH$ - р/б (по опред.)

$\Rightarrow \angle NEH = \angle NHE$ (по св-ву р/б Δ углы при основании)

$\angle FHM = \angle EHN$ (как вертикальные)

$\Rightarrow \angle MFH = \angle MHM = \angle NHE = \angle HEN$

По условию $FM \parallel EN$

$\Rightarrow \angle FMH = \angle MEN$ как накрест лежащ. при $FM \parallel EN$ и секущей ME

и $\angle MFH = \angle FNE$ как накрест лежащ. при $FM \parallel EN$ и секущей FN

$\Rightarrow \Delta MFH$ и ΔHEN - равносторонние (все углы равны)

$\Rightarrow \angle EHN = 60^\circ$

По сумме углов ΔHEC: $\angle ECH + CHE +$

$+ \angle HEC = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle ECH = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle$

Дано:

ΔABC - остроуг.

CF и AE - высоты, ∩ т.H

т.M - центр AH

т.N - центр CH

$FM = 2$

$EN = 11$

$FM \parallel EN$

$\angle ABC$ - ?

$S_{\Delta ABC}$ - ?

R - ?

Математика, 9 класс

Чистовик

№2 продолжение

Если $x > 1$:

$a_1 = 13 \cdot x$; $a_n = 29 \cdot x$

$S + 29 \cdot 13 \cdot x = 450$

$S = 450 - 377 \cdot x$ — $x \geq 2$, $\Rightarrow S < 0$, противоречие. (т.к. все члены натуральные)

Таким образом мы рассмотрели все случаи и доказали, что других нет.

лист 2

Ответ: 13; 14; 17; 29

13; 15; 16; 29

211005924 (U307948 M1276620)

Математика, 9 класс

Чистовик

№2. Пусть числа на доске $a_1, a_2, \dots a_n$ – упорядочим их по возрастанию, a_1 – самое маленькое, a_n – самое большое.

По условию $(a_1+a_2+\dots+a_n)+29\cdot a_1=450$

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)+13\cdot a_n=450$$

Пусть сумма $a_1+a_2+\dots+a_n=S$

$$S+29a_1=S+13\cdot a_n$$

$$29a_1=13a_n$$

a_1 и a_n натуральные, 29 и 13 общих множителей не имеют (кроме 1), $\Rightarrow$ $a_1=13\cdot x$; $a_n=29\cdot x$;

Если $x=1$:

$a_1=13$; $a_n=29$

лист 1

$S+29\cdot13=450$

$S=450-377=73$

$a_2+\dots+a_{n-1}=S-a_1-a_n=73-29-13=31$

сумма $=31$

$13;\overbrace{\dots};29$

Числа попарно различные, значит после 13 может идти число, ≥ 14.

$31-14=17$ – 17 на числа, большие 14 мы разбить не можем $\Rightarrow$ ряд такой: 13; 14; 17; 29

Если после 13 идёт 15:

$31-15=16$ – 16 на числа, больше 15 мы разбить не можем $\Rightarrow$ ряд такой: 13; 15; 16; 29

Если после 13 идёт число >15, то после этого числа будет число меньше предыдущего. Противоречие.

Значит, при $x=1$ вариантов больше нет.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005924**

ID профиля: **307948**

Вариант 14

№5. У фокусника 15^2 карточек. Из них 15 карточек-дублей и $15 \cdot 14$ карточек, дублями не являющимися. Он хочет вытянуть набор из 2-х карточек, в котором хотя бы одна из них – дубль.

1) Если только 1 дубль:
вытянуть карточку из тех, которые дублями не являются, у нас $15 \cdot 14$ вариантов (столько всего карточек данного вида). При этом к любой вытянутой карточке из дублей по условию задачи 2 не подходят (числа не повторяются). Значит, всего вариантов

$15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ способа.

2) 2 дубля:
вытягиваем 2 карточки из 15, порядок не важен:

$C_{15}^{2} = \dfrac{15!}{2! \cdot 13!} = 105$ вариантов.

Всего вариантов $2730 + 105 = 2835$

Ответ: 2835 вариантов (способов.)

Математика, 9 класс

Чистовик

лист 5

№6 продолжение 2

$S_{\square ABCD} = (H_1O + H_2O) \cdot \left(\frac{BC + AD}{2}\right)$

По Пифагору:

$H_1O^2 + H_1D^2 = OD^2$ $\qquad$ $H_2O^2 + H_2C^2 = OC^2$

$H_1O^2 + \frac{1}{4}OD^2 = OD^2$ $\qquad$ $H_2O^2 + \frac{1}{4}OC^2 = OC^2$

$H_1O^2 = \frac{3}{4}OD^2 = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ $\qquad$ $H_2O^2 = \frac{3}{4}OC^2 = \frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{4}$

$H_2O = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$H_1O = 2 \cdot \sqrt{3}$

$S_{\square ABCD} = \left(2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 3{,}5$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\square ABCD}} = \frac{37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot 3{,}5 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{7 \cdot \left(4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{49 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{37}{49}$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\square ABCD}} = \frac{37}{49}$

211005924 (U307948 M1276621)

2 б продолжение

$\triangle ADT = \triangle TCB$ по 2-м сторонам и углу между ними

($BC = DT$, $AD = CT$ ($CT = OD$ (параллелограмм)), $\angle ADT = \angle BCT = 120°$)

$\Rightarrow AT = BT$ (как элементы равных)

$\Rightarrow AT = AB = BT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный, г.и т.д.

б) $S_{\triangle ABT} = \dfrac{TH \cdot AB}{2}$ (TH – высота $\triangle ABT$)

$S_{ABCD} = H_2H_1 \cdot \left(\dfrac{BC + AD}{2}\right)$ (OH_2 – высота $\triangle OBC$, OH_1 – высота $\triangle AOD$.
H_1H_2 – прямая, т.к. $H_2O \perp BC$, $OH_1 \perp AD$, $AD \parallel BC$, т.к. $\angle OAD = \angle ACB = 60°$ и накрест лежащ. при секущей AC)

$S_{\triangle ABT}$:
по Пифагору:
$TH^2 + HA^2 = AT^2$

$TH^2 + \frac{1}{4}AT^2 = AT^2$

$TH^2 = \frac{3}{4}AT^2$

По теореме косинусов:

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot AT \cdot \cos\angle ADT$

$AT^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 37$

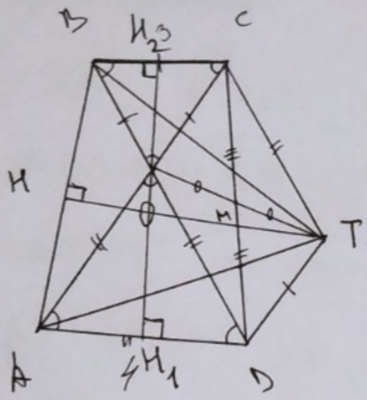
($\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$)

$S_{\triangle ABT} = \dfrac{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 37} \cdot \sqrt{37}}{2} = \dfrac{37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

(теорему Пифагора мы можем применить ~~так~~ таким образом, т.к. в правильном $\triangle$ высота так же является биссектрисой и медианой.)

Чистовик

№6



Дано:

т. O – пересечение диагоналей □ ABCD

△BOC и △AOD – правильные

т. T. симметрична т. O относительно т. M,

т. M – середина CD

а) Док-ть:

△ABT – правильный

б) BC = 3, AD = 4

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{\square ABCD}}$

Решение:

т.к. т. O симметрична т. T относительно т. M,

OM = MT.

△OCM = △TDM по 2-м сторонам и углу между ними

(OM = MT, CM = MD, ∠CMO = ∠DMT как вертикальные)

=> CO = TD и CO ∥ TD (как элементы равных), (т.к. CM и MD на одной прямой и OM и MT на одной прямой)

=> OCTD – параллелограмм (по опр.)

=> ∠COD = ∠CTD = 120°,

(∠COD = 180° – ∠BOC как смежные)

∠OCT = ∠TDO = 60°

(∠DOC и ∠OCT односторонние при OD ∥ CT и секущей OC).

△BOA = △TDA по 2-м сторонам и углу между ними

(TD = OC (параллелограм)

=> TD = BO,

AD = AO (стороны правильного △)

∠BOA = ∠TDA = 120°)

=> BA = AT как элементы равных.

Математика, 9 класс

Чистовик

лист 1

№1 $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 & ① \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 & ② \end{cases}$

$(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4$ ③

из ② и ③: $(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37$

$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \\ 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \end{cases}$

вычитаем:

$(x^2+y^2)^2-3x^2y^2-7(x^2+y^2)+3x^2y^2=37-7$

$(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=30$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2-7)=30$

$x^2+y^2=t$

$t^2-7t-30=0$

$t_1+t_2=-\frac{b}{a}=7$

$t_1t_2=\frac{c}{a}=-30$

$t_1=10 \quad t_2=-3$

$t_2=-3$ – неуд, т.к. $x^2+y^2\geq 0$

$\Rightarrow x^2+y^2=10$

подставим в ①: $7\cdot 10-3x^2y^2=7$

$3x^2y^2=63$

$x^2y^2=21$

т.

$a=x^2,\ b=y^2$

$\begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases}$ $\begin{cases} a=10-b \\ ab=21 \end{cases}$ подставляем

Математика, 9 класс

Чистовик

№4 продолжение

лист 2

$b(10-b)=21$

$-b^2+10b-21=0$

$D=16$

$b_1=\frac{-10+4}{-2}=3$

$b_2=\frac{-10-4}{-2}=7$

2 варианта: $a=7;\ b=3$ и $a=3;\ b=7$

$x^2=7\quad y^2=3\qquad x^2=3\quad y^2=7$

$x=\pm\sqrt{7}\quad y=\pm\sqrt{3}\qquad x=\pm\sqrt{3}\quad y=\pm\sqrt{7}$

Ответ: $(\sqrt{7};\sqrt{3});(\sqrt{7};-\sqrt{3});(-\sqrt{7};\sqrt{3});(-\sqrt{7};-\sqrt{3});$
$(\sqrt{3};\sqrt{7});(-\sqrt{3};\sqrt{7});(\sqrt{3};-\sqrt{7});(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$

211005924 (U307948 M1276621)

Математика, 9 класс

Черновик

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \\ 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \end{cases}$$

1) $x^2=7$ $y^2=3$

$x=\pm\sqrt{7}$; $y=\pm\sqrt{3}$

2) $x=\pm\sqrt{3}$ $y=\pm\sqrt{7}$

$(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=30$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2-7)=30$

$x^2+y^2=t$

$t(t-7)=30$

$t^2-7t-30=0$

120 150

~~$D=49+120=...$~~

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=7$

$x_1x_2=\frac{c}{a}=-30$

10 и -3

-3 - неуд

$x^2+y^2=10$

$a+b=10$

$7(a+b)-3ab=7$

$70-3ab=7$

$3ab=63$

$$\begin{cases} ab=21 \\ a+b=10 \end{cases}$$

$a=(10-b)$

$(10-b)\cdot b=21$

$-b^2+10b-21$

$-b^2+10b-21=0$

$D=100-21\cdot 4=16$

$b_1=\frac{-10+4}{-2}=3$

$b_2=\frac{-10-4}{-2}=7$

3 и 7

7 и 3

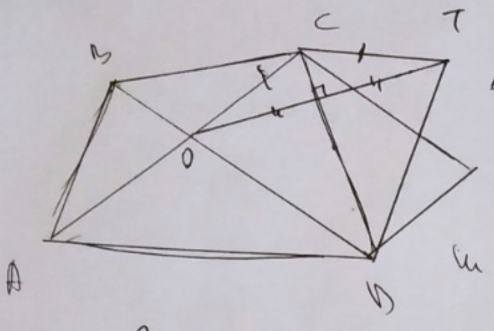
211005924 (U307948 M1276621)

Черновик Математика, 9 класс

15^2 карточек

синий
красный

числа от 1 до 15 на каждой стороне



△BOC и △AOD - правильные

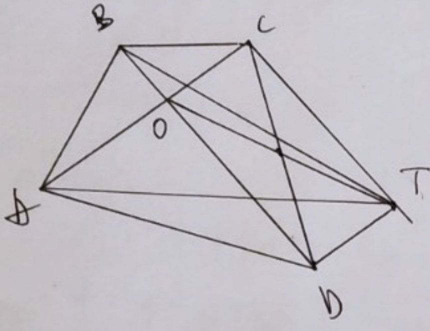
$\frac{\sqrt{37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}}{2} = \frac{37\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

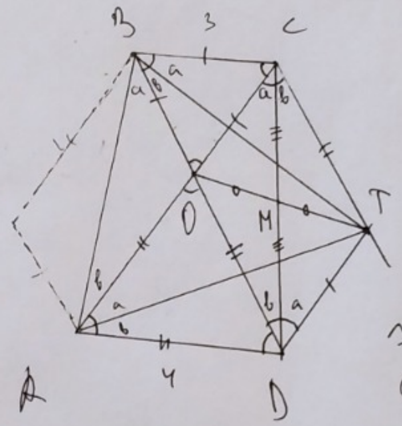
$\frac{37\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 18,5\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

1) △ABT - правильный ✓

2) BC = 3 AD = 4

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\triangle ABCD}} = ?$





a + b = 60

△ADT = △AOB = △BCT

(AD = AO), DT = OB,

∠DOA = ∠ADT

$\frac{14\cdot 15}{2} = 7\cdot 15$

$= 105$

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2\cdot AD\cdot DT\cdot \cos ADT$

$= 9 + 16 + 3\cdot 4 = 37$

$\cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$15 \times 14 = 60, 15, 210$

$210 \times 13 = 63, 21, 2730$

$\frac{37\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7\cdot\left(4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{37}{49}$

$49\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

15^2 => у Феникса

кр есть все карты

$15\cdot 14 + 15$ дубл

без дубл

$15\cdot 14 \cdot 13$

для 1 карты, дублей подходящих

$25 + 12$

~~$S_{\triangle ABC} = TH\cdot\frac{1}{2}AT$~~

~~$TH = AT^2 + (\frac{1}{2}AT)^2 - AT\cdot 2\cdot\frac{1}{2}AT\cdot\frac{1}{2}$~~ cos 60

$AT^2 = TH^2 + \frac{1}{4}AT^2$

$TH^2 = \frac{3}{4}AT^2$

$TH = \sqrt{\frac{3\cdot 37}{4}}$

$S_{ABCD} = h\cdot\left(\frac{BC+AD}{2}\right)$