Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

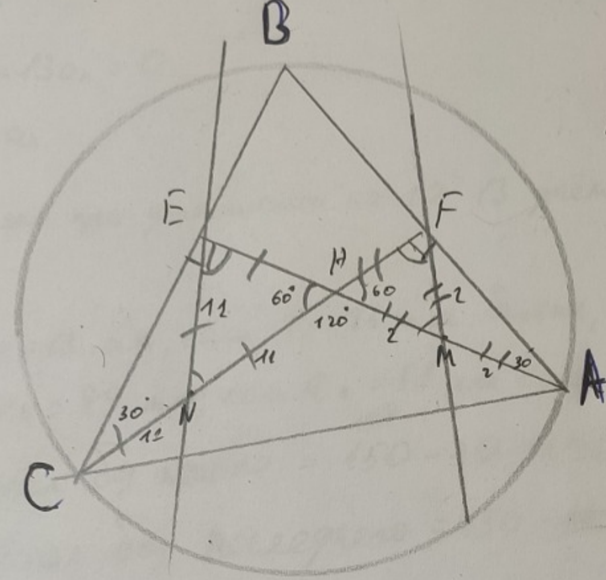
Шифр: **211005920**

ID профиля: **211230**

Вариант 14

Беловик

№1



EN = 11

FM = 2

В прямоугольном Δ медиана к гипотенузе равна её половине ⇒

$EN = NH$, $FM = HM$

ΔNEH и ΔHFM – равнобедренные $\angle NEH = \angle NHE$, $\angle MHF = \angle HFM$, а

$\angle EHN = \angle HFM$ как вертикальные

$\angle ENH = \angle NFM$ ~~как~~ накрест лежащие при $EN \parallel FM$

Аналогично $\angle NEM = \angle EMF$. Тогда ΔNEH и ΔFHM равносторонние

$\cancel{\angle EE}H = \angle EHN = 60$, тогда $\angle ECH = 30°$, $\angle CHA = 120°$

По теореме косинусов $CA^2 = CH^2 + HA^2 - 2 \cdot CH \cdot HA \cdot \cos 120°$

$CA^2 = 22^2 + 4^2 + 2 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 588 = 484 + 16 + 88$

$CA = \sqrt{588} = 2\sqrt{147} = 14\sqrt{3}$

По теореме синусов в $\frac{HA}{\sin(\angle HCA)} = \frac{CA}{\sin 120°} \Rightarrow \sin(\angle HCA) = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 14\sqrt{3}} = \frac{1}{7}$

По теореме синусов $\frac{HC}{\sin(\angle HAC)} = \frac{CA}{\sin 120} \Rightarrow \sin(\angle HAC) = \frac{22 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 14\sqrt{3}} = \frac{11}{14}$

$\angle ABC = 180° - 30° - 30° - \arcsin\left(\frac{1}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{11}{14}\right)$

По теореме синусов расширенной R описанной $= \frac{CA}{2\sin(\angle ABC)} = \frac{14\sqrt{3}}{2\sin(\angle ABC)}$

По теореме синусов находим AB или BC и находим площадь ΔABC как

половину произведения сторон на синус угла между ними

211005920 (U211230 M1273843)

№2 Беловик

Пусть на доске n чисел, тогда $\left.\begin{matrix} 30a_1 \ldots + a_n = 450 \\ a_1 \ldots + 14a_n = 450 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 29a_1 - 13a_n = 0$

$a_1 = \frac{13}{29} a_n$

Т.к только при умножении на 10 13 даёт круглое число, то $a_n \vdots 29$

$a_1 \vdots 13$

Тогда $a_1 = 13$ т.к, если $a_1 = 26$ или больше, то $30 \cdot a_1 > 450$

Также $a_n = 29$ т.к, если $a_n = 58$ или больше, то $14a_n > 450$

Сумма чисел без первого $= 450 - 30 \cdot 13 = 60 \Rightarrow a_2 \ldots + a_{n-1} = 31$

Сумма чисел без последнего $= 450 - 14 \cdot 29 = 44$

Все числа от a_2 до a_{n-1} $\in (13, 29)$

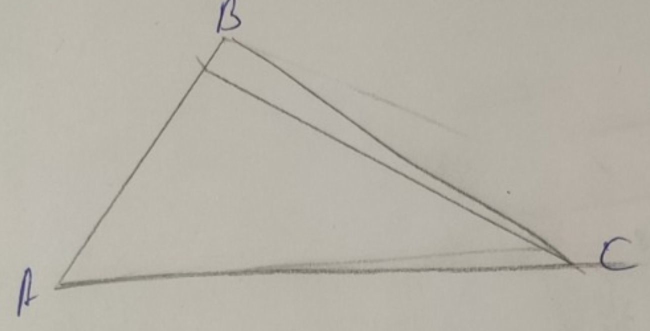
~~Т.к~~

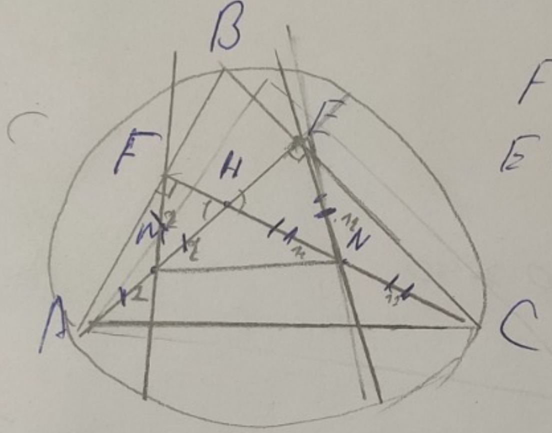
$31 = 14 + 17 = 15 + 16$

Ответ: 13 14 17 29 или 13 15 16 29

211005920 (U211230 M1273843)

Черновик





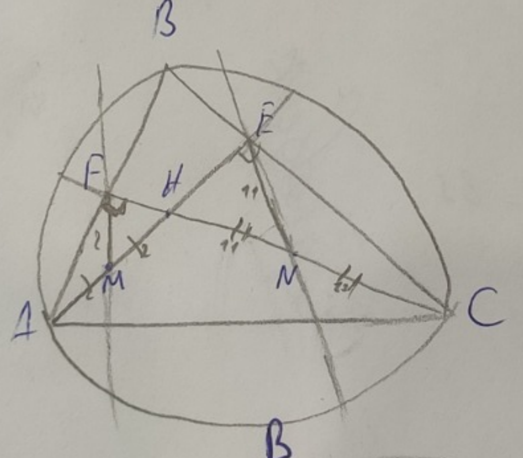
$FM = ?$ $FM \parallel EN$

$EN = 11$

$\angle ABC$

S_{ABC}

R



$FM = ?$

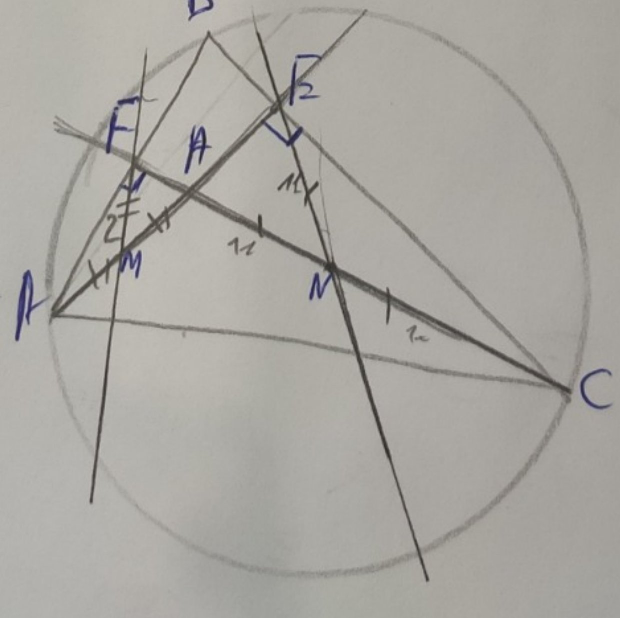
$EN = 12$

$FM \parallel EN$

$\angle ABC$?

S_{ABC}?

R_{ABC}?



211005920 (U211230 M1273843)

$a_1 \cdot 30$

$30a_1 + a_n = 14a_n + a_1$

$29a_1 = 13a_n$

$30a_1 + \ldots a_n = 450$

$a_1 + \ldots 14a_n = 450$

$29a_1 - 13a_n = 0$

$a_1 = \frac{13}{29} a_n$

$a_n \vdots 29$ т.к все натуральные

$a_1 = 13$ хотя бы

$13 \cdot 30 = 390$

Сумма оставшихся $= 60$ $a_2 \ldots a_n$

$29 \cdot 14 =$

$29 \times 14 = 406$

Сумма без ~~последнего~~ ~~первого~~ последнего $- 60$

Сумма без ~~последнего~~ первого $- 44$

$\frac{1+29}{2} \cdot 29 =$

$29 \times 16 = 464$

$\frac{2+30}{2} \cdot 29$

16

$29 \times 16 = 464$

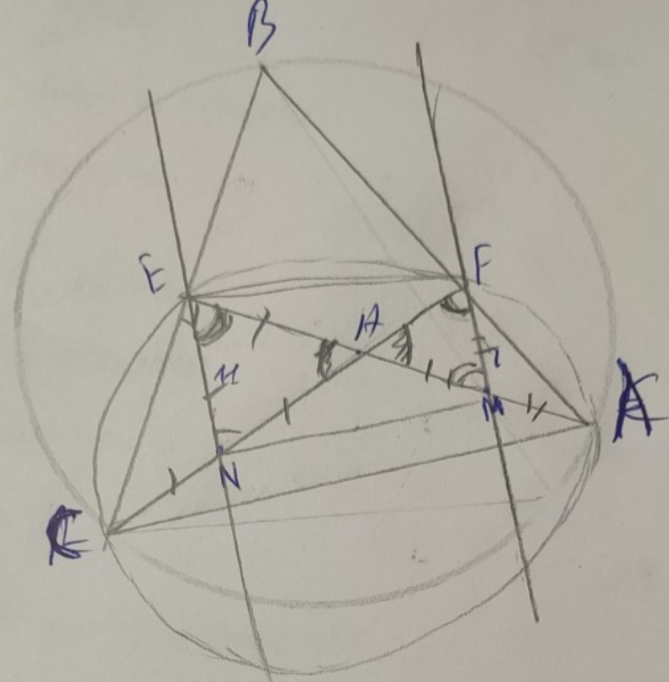
$\cancel{26} \cdot 30 \geq 450$

$58 \times 14 = 812$

$60 - \cancel{28} = 31$

Черновик

211005920 (U211230 M1273843)



$EN = 11$

$FM = 2$

$FM \parallel EN$

$11^2 + 4^2 + 11 \cdot 4$

$121 + 16 + 44$

181

$$\begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 148 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$+\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $+\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 88 \end{array}$

$$\begin{array}{r|l} 147 & 7 \\ 21 & 7 \end{array}$$

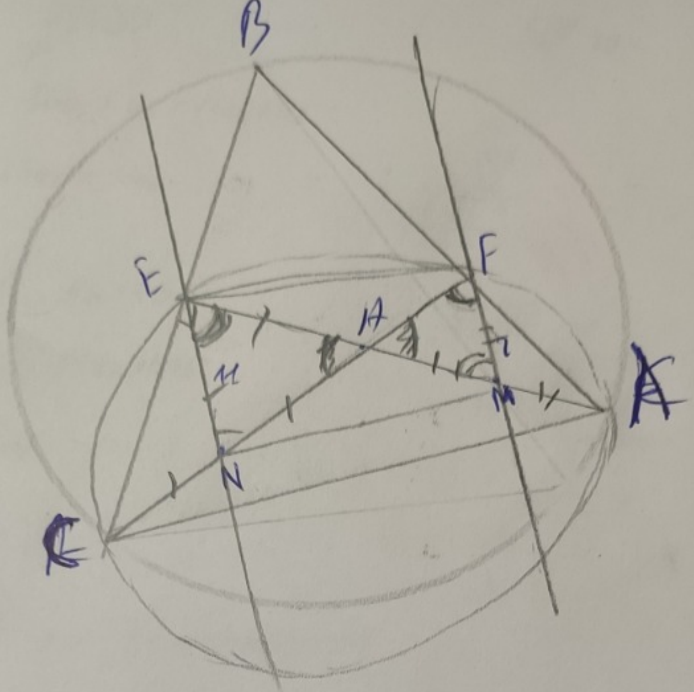
$500 - 88 = 412$

588

$$\frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$

черновик

211005920 (U211230 M1273843)



$FN = 11$

$FM = 2$

$FM \parallel EN$

$588 \mid 2$

$294 \mid 2$

147

$11^2 + 4^2 + 11 \cdot 4$

$121 + 16 + 44$

181

22×22

44

44

484

$147 \mid 7$

$21 \mid 7$

Черновик

$500 - 88 = 412$

$\frac{22}{28} = \frac{11}{14}$

538

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005920**

ID профиля: **211230**

Вариант 14

№2 Беловик

$\boxed{x}\,|\,\boxed{x}$ – дубль $\boxed{y}\,|\,\boxed{z}$ – вторая ~~по~~ карточка

Всего в колоде 15 дублей

Рассмотрим сколькими способами он может вытащить дубль с числом x и какую-то другую карточку, на которой нет числа x

Кроме числа x есть ещё 14 чисел, значит фокусник может вытащить вторую карту 14^2 способами (196 способов)

$15 \cdot 196 = 2940$ способов

Заметим также, что вытаскивание двух дублей считается два раза 1) $\boxed{x}\,|\,\boxed{x}$ и $\boxed{y}\,|\,\boxed{y}$ и 2) $\boxed{y}\,|\,\boxed{y}$ и $\boxed{x}\,|\,\boxed{x}$

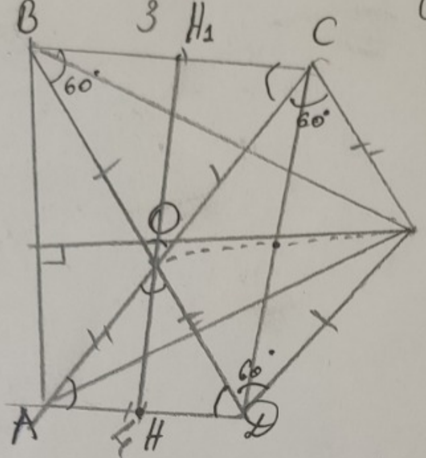
Таких вытаскиваний (лишних) $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$

Тогда способов всего $= 2940 - 105 = 2835$

Ответ: 2835

Беловик

№3



а) т.к T симметрично O относительно середины CD, то OCDT — параллелограмм $OD = CT$ $CO = DT$

$TD \parallel CO$ $CT \parallel OD$

Тогда BCTD — трапеция

Тогда $\angle OCT = 180° - \angle BCO = \angle OBC = 60° = \angle BDT$

$\angle CTD = 180° - 60° = 120° = \angle COD$

$\angle BOA = \angle COD$ как вертикальные

$\Delta ATD = \Delta BOA$ по СУС ($\angle BOA = \angle ADT = 120°$

$OA = AD$ по условию, $BO = TD = CO$)

Значит $BA = AT$

Аналогично $\Delta BOA = \Delta BCT$

Значит $BA = BT$

$BA = BT = AT$, значит ΔATB правильный

ч.т.д

б) $\angle DAB = \angle ACB = 60°$, значит $AD \parallel BC$

Тогда ABCD — трапеция

$OH_1 = OB \cdot \sin\angle B = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sqrt{3}$

$OH = AO \cdot \sin\angle A = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot H_1H$

$S_{ABCD} = \frac{3+4}{2} \cdot 3{,}5\sqrt{3} = \cancel{\frac{49}{4}}\sqrt{3}\ \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$AB = AT$; $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot AT \cdot \cos 120°$ по теореме косинусов

$AT^2 = 16 + 9 + 4 + 3 = 32$; $AT = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$S_{ABT} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} = \frac{AB \cdot AT}{2} \cdot \sin 60°$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{16\sqrt{3} \cdot 4}{49\sqrt{3}} = \frac{64}{49}$

Ответ: $\frac{64}{49}$

211005920 (U211230 M1273844)

Черновик

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$7a-3b=7$

$(a-7)a=$

$x^4+y^4+2x^2y^2-7x^2-7y^2=30$

$(x^2+y^2)^2-7x^2-7y^2$

$91-3b=7$

$84=3b$

$b=28$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2)-7(x^2+y^2)=30$

$(x^2+y^2-7)(x^2+y^2)-30=0$

$(t-7)t=30$

$t^2-7t-30=0$

$D=49+120=169$

$t=13$

$x^2+y^2=13$

$x^2y^2=21$

$-28=-3b$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 306 \\ 15 \\ \hline 1530 \\ 306 \\ \hline 4590 \end{array}$$

$\times 15$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 24 \\ \hline 1\ 60 \\ 15 \\ \hline 210 \end{array}$$

$15 \cdot 14$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 15 \\ 14 \\ \hline 60 \end{array}$$

$-y^4+10y^2-21=0$

$y^4-10y^2+21=0$

$t^2-10t+21=0$

$D=100-84=16$

~~1~~	~~2~~
1	3
1	4
1	5
1	6
1	7
1	8
1	9

1	10
1	11
1	12
1	13
1	14
1	15

21
23
24
25
26
27
28
29
210

211
212
213
214
215

211005920 (U211230 M1273844)

№2

15^2

$\boxed{К} | \boxed{С}$ от 2 до 15

Дубль – в числа совпадают

1 дубль $\boxed{x} | \boxed{x}$

2 карточка $\boxed{y} | \boxed{z}$

15 дублей

$\boxed{1} | \boxed{1}$ $\boxed{\ } | \boxed{\ }$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times 15 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 196 \\ \times 15 \\ \hline 980 \\ 196 \\ \hline 2940 \end{array}$$

$\boxed{y}$

x^2

+

2
3

211005920 (U211230 M1273844)

Черновик

$\{7x^2, 7y$

x^4+y^4-

$x^4+y^4+2x^2y^2-$

$y^2)^2-7x^2$

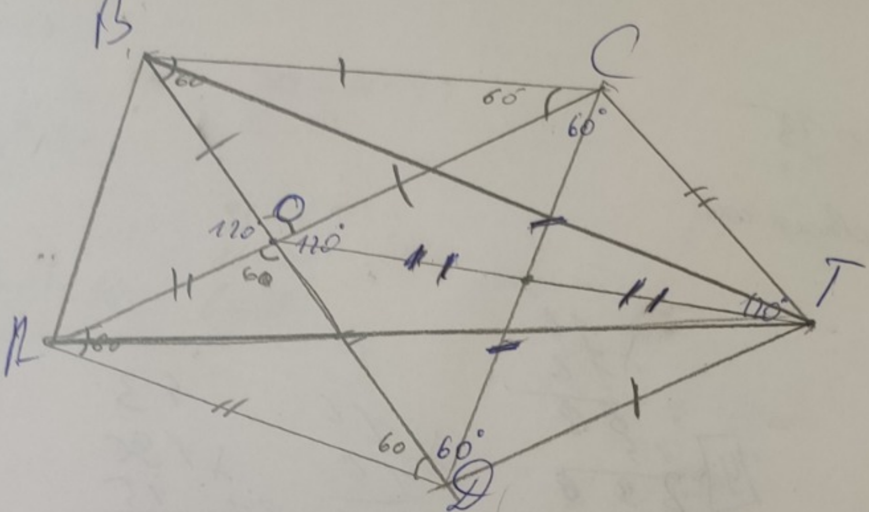
$^2)(x^2+y^2)$

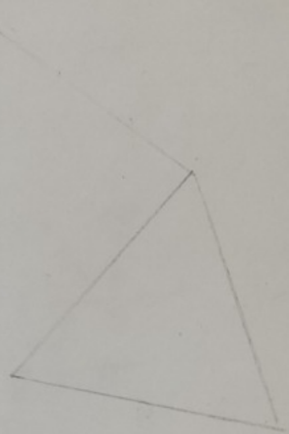
$2)(x^2+y^2)$

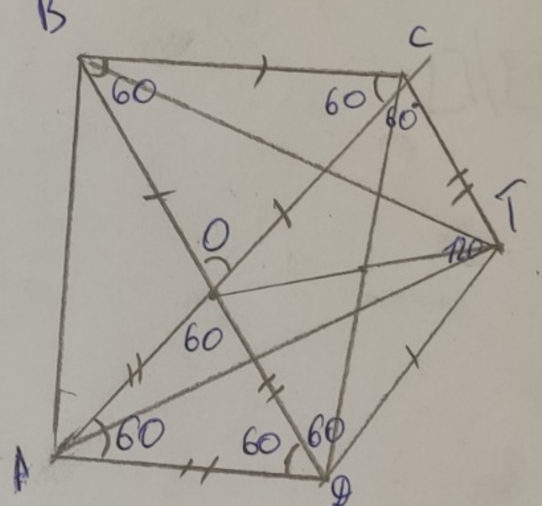
$t=30$

$30=0$

$0=169$



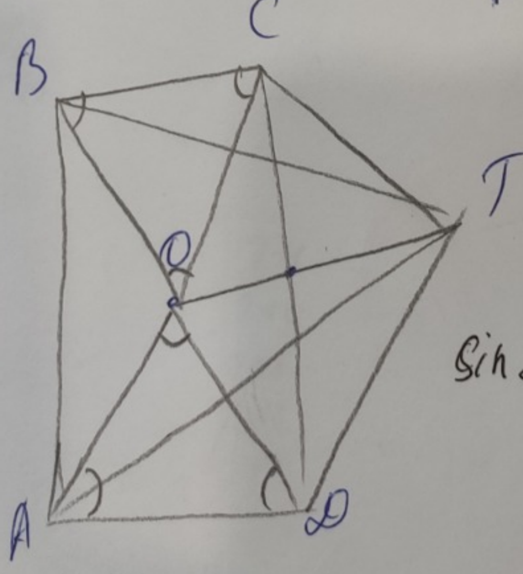




$1=0$

$=0$

$=16$



$98-9-16$

$98-25$

73

$32 \,|\, 2$

16

OH_1

$\sin\angle B = \frac{OH_1}{OB}$

$\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

$49\cdot 2 = 98$

$25+12=37$

$16+9+3+4$

25 7

Беловик

№1

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}; \begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4+2x^2y^2-7(x^2+y^2)=30 \end{cases}; \begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2-7)(x^2+y^2)=30 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$, $x^2y^2=b$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 & (1) \\ (a-7)a=30 & (2) \end{cases}$$

(1) $a(a-7)=30$

$a^2-7a-30=0$

$D=49+120=169$

$a=\frac{7\pm 13}{2}$

$\left[\begin{array}{l} a=10 \\ a=-3 \text{ – лишний} \end{array}\right.$

т.к. сумма квадратов не меньше чем 0

(2) $a=10$

$70-3b=7$

$63=3b$

$b=21$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases}; \begin{cases} x^2=10-y^2 \\ y^2(10-y^2)=21 \end{cases};$$

Пусть $y^2=t$, тогда $t^2-10t+21=0$

$D=100-84=16$

$t=\frac{10\pm 4}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2=7 \\ y^2=3 \end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ y^2=7 \end{array}\right.$

Ответ: $(\sqrt{7},\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$