Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005870**

ID профиля: **260313**

Вариант 14

Чистовик
задача №2

пусть на доске записаны числа $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и их сумма равна S

тогда из условия

$$\begin{aligned} S + 29a_1 = 450 \\ S + 13a_n = 450 \end{aligned} \Rightarrow \quad 29a_1 = 13a_n$$

$a_1, a_n \in \mathbb{N}$, поэтому

$a_1 \vdots 13 \qquad a_n \vdots 29$

$a_1 \geq 13 \qquad a_n \geq 29$

если $a_1 > 13$, то есть $a_1 \geq 26$, то $S + 29a_1 >$

$> \underset{>0 \text{ (сумма нат. чисел)}}{S} + 29 \cdot 26 > 450$

значит $a_1 = 13$, соответственно $a_n = 29$

имеем

$$S + 13 \cdot 29 = 450$$
$$S + 377 = 450$$
$$S = 73$$
$$\underline{a_1} + a_2 + \ldots + \underline{a_n} = 73$$
$$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 31$$

все числа $a_2, a_3 \ldots a_{n-1}$ > 13 и < 29,

поэтому их ровно два

(если их ≥ 3 $a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} > 13 \cdot 3 = 39 > 31$)

если оно одно $a_2 < 29 < 31$

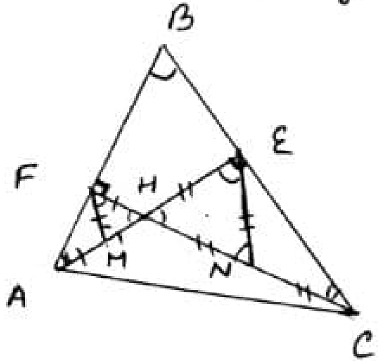
$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 31 \\ 13 < a_2 < a_3 < 29 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_2 = 14 \\ a_3 = 17 \end{cases} \\ \begin{cases} a_2 = 15 \\ a_3 = 16 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{при } a_2 \geq 16 \quad a_3 \leq 15 < a_2$$

Ответ: 13, 14, 17, 29 или 13, 15, 16, 29

Чистовик

задача 1



$\triangle ABC$ остроугольный
$\Rightarrow H$ лежит внутри него

FM - медиана в пр $\triangle AFH$
$\Rightarrow FM = AM = MH = 2$

EN - медиана в пр. $\triangle CEH$
$\Rightarrow EN = CN = NH = 11$

$$\left.\begin{array}{l} \angle FHM = \angle EHN \text{ - верт.} \\ \angle FHM = \angle HFM \ (MH = FM) \\ \angle EHN = \angle HEN \ (NH = EN) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle HFM = \angle HEN$$

$\angle HFM = \angle HNE$ - н/л при $FM \parallel EN$ и сек. FN

$\angle HEN = \angle HMF$ - н/л при $FM \parallel EN$ и сек. EM

значит в $\triangle FHM$ и $\triangle EHN$ все углы равны, они правильные

$\angle EHC = 60^\circ \Rightarrow \angle ECH = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

в пр. $\triangle CEH$ $HE = EN = CN = NH = 11$

$AE = AM + MH + HE = 2 + 2 + 11 = 15$

в $\triangle ABE$ $\angle E = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ $\Rightarrow AB = 2BE$

по т. Пифагора

$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$4BE^2 = AE^2 + BE^2$

$3BE^2 = AE^2$

$BE = \sqrt{\frac{AE^2}{3}}$

$BE = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3}$

для $\triangle CEH$ по т. Пифагора ($\angle CEH = 90^\circ$)

$CH^2 = HE^2 + EC^2$

$4HE^2 = HE^2 + EC^2$

$EC^2 = 3HE^2$

$EC = \sqrt{3HE^2}$

$EC = \sqrt{3}HE$

$EC = 11\sqrt{3}$

Чистовик

задача 1 (продолжение)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AE \cdot BC = \frac{1}{2} AE(BE + EC) = \frac{1}{2} \cdot 15 \left(\frac{15\sqrt{3}}{3} + 11\sqrt{3} \right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{48\sqrt{3}}{3} = 120\sqrt{3}$

$R = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$

для $\triangle CEA$ ($\angle CEA = 90^\circ$) по т. Пифагора

$AC^2 = AE^2 + EC^2$

$AC = \sqrt{AE^2 + EC^2}$

$AC = \sqrt{225 + 121 \cdot 3}$

$AC = \sqrt{588}$

$AC = 2\sqrt{147}$

$AC = 14\sqrt{3}$

$R = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 28$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

$S_{ABC} = 120\sqrt{3}$

$R = 28$

Чистовик

задача №3

1) $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$x^2+2x(a-y)+2a^2+2y^2=0$

$(x+(a-y))^2-(a-y)^2+2a^2+2y^2=0$

$(x+(a-y))^2-a^2-y^2+2ay+2a^2+2y^2=0$

$(x+(a-y))^2+a^2+y^2+2ay=0$

$(x+(a-y))^2+(y+a)^2=0$

ур-е окружности с радиусом 0, то есть точки с координатами центра этой окружности, тогда $A(y-a;-a)$

2) $ax^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$(a^2x^2-2a^3x-6ax)+(a^2y^2-2a^2y)+a^4+9=0$

$(a^2x^2-2ax(a^2+3))+(a^2y^2-2ay\cdot a)+a^4+9=0$

$(ax-(a^2+3))^2+(ay-a)^2-(a^2+3)^2-a^2+a^4+9=0$

$(ax-(a^2+3))^2+(ay-a)^2-\cancel{a^4}-\cancel{9}-6a^2-a^2+\cancel{a^4}+\cancel{9}=0$

$(ax-(a^2+3))^2+(ay-a)^2=7a^2$

ур-е окружности с радиусом $a\sqrt{7}$ вершиной $B(a+\frac{3}{a};1)$

чтобы A и B лежали по разные стороны от прямой $x=4$ и не лежали на ней

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-a<4\\ a+\frac{3}{a}>4\end{cases}\\ \begin{cases}y-a>4\\ a+\frac{3}{a}<4\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>y-4\\ a^2>1\end{cases}\\ \begin{cases}a<y-4\\ a^2<1\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>y-4\\ a^2>1\end{cases}\\ \begin{cases}a<y-4\\ a^2<1\end{cases}\end{array}\right.$

211005870 (U260313 M1276744)

Черновик

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$2ax+x^2$

$x^2+2ax-2xy+2a^2+2y^2=0$

$x^2+x(2a-2y)+2a^2+2y^2=0$

$D=2(a-y)^2-4(2(a-y)(a+y))=0$

$x^2+2x(a-y)+2(a-y)(a+y)=0$

$x^2+(a-y)(2x+2a+2y)=0$

$(x^2+2x(2a-2y))+2y^2+2a^2$

$(x+(a-y))^2+2y^2+2a^2-(a-y)^2=0$

$(x+(a-y))^2+y^2+a^2+2ay=0$

$(x+(a-y))^2+(y+a)^2=0$

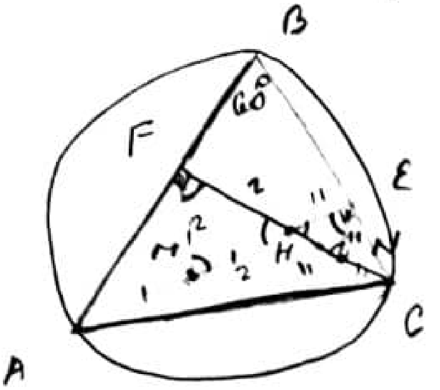
$x=$

211005870 (U260313 M1276744)

Черновик

$15 + BE^2 +$

высоты пер. внутри



$147 = 3 \cdot 49$

$FM \parallel EN$

~~∆FHM~~

FHM и EHN правильные

$\angle ABC = 60^\circ$

363

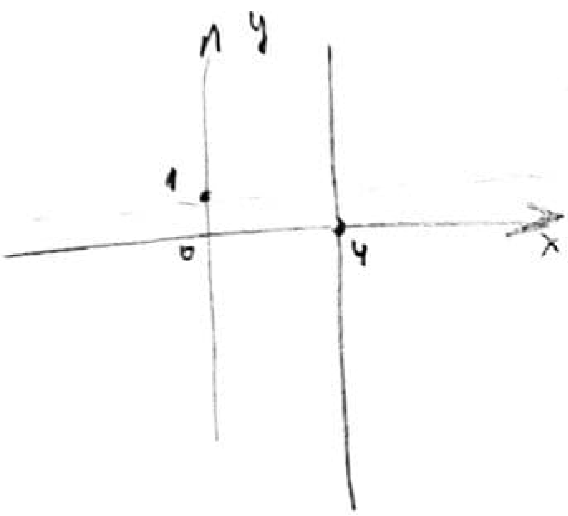
$225 + 121 \cdot 3$

$588 = 4 \cdot$

$$R = \frac{AC}{\sin\angle B} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$A(x; y)$

$$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$$



$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$

$$(a^2x^2 - 2a^3x - 6ax) + (a^2y^2 - 2a^2y) + a^4 + 9 = 0$$

$$(a^2x^2 - 2ax(a^2+3)) + (a^2y^2 - 2ay \cdot a)$$

$$(ax - (a^2+3))^2 + (ay - a)^2 - (a^2+3)^2 - a^2 + a^4 + 9 = 0$$

$$(ax - (a^2+3))^2 + (ay - a)^2 \underbrace{- \cancel{a^4} - 7a^2 - \cancel{9} - a^2 + \cancel{a^4} + \cancel{9}}_{= 7a^2} = 0$$

$B\left(a + \frac{3}{a}; 1\right)$

211005870 (U260313 M1276744)

новик

Черновик

$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n$

$S + 29a_1 = 450$

$S + 13a_n = 450$

$30a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n = 450$

$a_1 + a_2 + \dots a_{n-1} + 14a_n = 450$

$30a_1 + \cancel{a_2 + a_3 + \dots} a_n = a_1 + \cancel{a_2 + \dots a_{n-1}} + 14a_n$

$29a_1 = 13a_n$ числа нат

сумма чисел

$\cancel{\frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$

~~наибольшее значение суммы~~

29·13

a_n + 13 29

a_1 26

$$\begin{array}{r} 290 \\ +\ 87 \\ \hline 377 \end{array}$$

$S + \underline{29a_1} = 450$

$S + 13a_n = 450$

$\cancel{S\ 29a_1}$

$S \geq \frac{(a_1 + a_1 + n - 1)n}{2}$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 13 \\ \hline 87 \\ 29\ \ \\ \hline \boxed{377} \end{array}$$

$a_1 = 13$
$a_n = 29$

$S + 377 = 450$

$S = 73$

$\cancel{S - a_1 - a_n} = 31$

$a_2 + a_3 \dots a_{n-1} = 31$

три числа
хот. одно
меньше 13
чисел двое

$14 + 17$ ~~17 + 18~~

~~18 + 18~~ $15 + 16$

~~16 + 19~~ ~~17 + 14~~

211005870 (U260313 M1276744)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005870**

ID профиля: **260313**

Вариант 14

Чистовик

задача 1

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \end{cases}$$

замена $a=x^2+y^2$
$b=x^2y^2$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases}$$

$a^2-7a=30$

$a^2-7a-30=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=10 \\ a=-3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10 \\ b=21 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3 \\ b=-\frac{28}{3} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-\frac{28}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

нет решений $x^2+y^2\geq 0$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases}$$

замена $x^2=t$

$$\begin{cases} t+y^2=10 \\ ty^2=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=10-t \\ ty^2=21 \end{cases}$$

$t(10-t)=21$

$t^2-10t+21=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y^2=7 \\ y^2=3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2=7 \\ x^2=-39 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2=3 \\ x^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

нет решений $x^2\geq 0$

$$\begin{cases} y^2=3 \\ x^2=1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3 \\ x=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-3 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-3 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;3)$; $(-1;3)$; $(1;-3)$; $(-1;-3)$

Чистовик

задача 2

1) количесвo способов выбрать 2 дубля из колоды это C_{15}^2 поскольку в колоде 15 различных дублей

2) количесво способов выбрать только один дубль и карту, цифры на которой отличны от цифр дубля это

$$C_{15}^1 \cdot 2C_{14}^2$$

выбираем дубль

выбираем из оставшихся 14 2 цифры и выбираем для них стороны (красная/синяя)

сложив пункт 1 и пункт 2, получим

$$C_{15}^2 + C_{15}^1 \cdot 2C_{14}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} + 15 \cdot 2 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} =$$

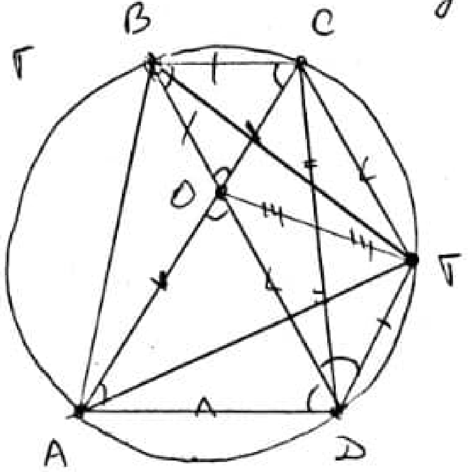
$$= 15 \cdot 7 + 15 \cdot 14 \cdot 13 = 15(7 + 182) = 2835$$

Ответ: 2835

лист 2 из 4

Чистовик

задача 3



поскольку $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ правильные их углы равны по 60° градусов

и $OB = BC = CO$

$OA = AD = OD$

отметим точку Т, по построению диагонали $OCТD$ делятся точкой пересечения пополам, значит, $OCТD$ - пар-м

откуда $\angle BDТ = \angle BOC = 60^\circ$

$CO = ТD$

$CТ \parallel BD$ и $ТD \parallel CA$

$CO = BC \Rightarrow \left.\begin{matrix} BC = ТD \\ CТ \parallel BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BCТD$ - р/б трапеция

Т лежит на Г - описанной окр-ти $\triangle BCD$

поскольку $\angle CBO = \angle ODA = 60^\circ$

$\angle CBO$ и $\angle ODA$ - н/л при BC и AD и секущей BD,

$BC \parallel AD$, а значит $ABCD$ - трапеция

$\triangle ABO = \triangle DCO \Rightarrow AB = CD$

$\angle AOB = \angle DOC$ - верт

$AO = DO$

$BO = CO$

$\Rightarrow ABCD$ - р/б

откуда $A \in Г$

тогда $\left.\begin{matrix} \angle BТA = \angle BDA = 60^\circ \\ \angle BAТ = \angle BDТ = 60^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABТ$ р/ст

$CТ \parallel BD \Rightarrow S_{BOТ} = S_{BOC}$

$ТD \parallel CA \Rightarrow S_{AOТ} = S_{AOD}$

$S_{ABТ} = S_{ABO} + S_{BOТ} + S_{AOТ} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AOD} =$

$= S_{ABCOD}$

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$

$k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \frac{9}{16}$

пусть $S_{BOC} = 9a$

тогда $S_{AOD} = 16a$

$$\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{4}{3}$$

$$S_{ABO} = \frac{4}{3} S_{BOC} = 12a$$

из равенства $\triangle ABO$ и $\triangle DCO$ $S_{DCO} = 12a$

$$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{DCO} + S_{AOD} =$$

$$= 12a + 9a + 12a + 16a = 49a$$

$$S_{ABCOD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AOD} =$$

$$= 12a + 9a + 16a = 37a$$

$$\frac{S_{ABCOD}}{S_{ABCD}} = \frac{37a}{49a} = \frac{37}{49} \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$$

Ответ: б. $\frac{37}{49}$

211005870 (U260313 M1276745)

Черновик

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \end{cases}$$

замена $x^2+y^2=a$ $\quad x^2+y^2\geq 0 \Rightarrow a\geq 0$

$x^2y^2=b$ $\quad x^2y^2\geq 0 \Rightarrow b\geq 0$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases} \qquad 3b=7a-7$$

$a^2-7a=30$

$a^2-7a-30=0$

$$\begin{cases} a_1+a_2=7 \\ a_1a_2=-30 \end{cases}$$

$a_1=10$

$a_2=-3$ – не подходит.

$\cancel{x+y=a}$

$\cancel{xy=b}$

$7(a^2-2b)-3b^2=7$

$\cancel{(a^2-2b)^2-3b^2=37}$

$\cancel{(a^2-2b)^2-7(a^2-2b)=20}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10 \\ b=21 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3 \\ b=-\frac{28}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-\frac{28}{3} \end{cases}$$ – нет решений $x^2+y^2\geq 0$

$x^2+y^2=10$

$x^2y^2=21$

$\cancel{x+y=t}$

$t^2-2xy=10$

$\cancel{(xy)^2=21}$

$\cancel{t^2-10=2xy}$

$\cancel{(t^2-10)^2=21}$

$(x+y)^2-\cancel{2xy}=10$

$\cancel{((x+y)^2-10)^2=21}$

211005870 (U260313XM1276745)

$\cancel{(x+y)^4-20(x+y)^2+100=21}$

Черновик

$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases}$

~~$x^2+y^2=10$~~

~~$x^2=10-y^2$~~

x

$x^2=10-y^2$

$y^2(10-y^2)=21$

$y^4-10y^2+21=0$

замена $y^2=t$

$t^2-10t+21=0$

$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=\pm 7 \\ y=\pm 3 \end{array}\right.$

~~$\begin{cases} y=\pm 7 \\ x= \end{cases}$~~

$y=\pm 7$

$x^2=-39$

нет реш.

$\begin{cases} y=\pm 3 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

15^2 карт

15 дублей

один ~~из~~ ~~дублей~~ C_{15}^1

~~вторая дубль~~

~~C_{14}^1~~

$C_{15}^2 + C_{15}^1$

кол-во сп. выт. карту без x и не дубль

$2 \cdot$ $C_{14}^2 \cdot 2$

2 2

6^2 карт.

~~$C_6^2 + C_6^1 \cdot 2 C_5^2$~~

~~$\frac{6\cdot5}{2} + 6\cdot2\cdot\frac{5\cdot4}{2}$~~

154

$\begin{array}{r} \times\ 189 \\ 15 \\ \hline 945 \\ 189\ \ \\ \hline 2835 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times\ 141 \\ 13 \\ \hline \end{array}$

3^2 карт

$\frac{3\cdot2}{2} + 3\cdot2\cdot\frac{2\cdot1}{2}$

$3+6=9$

C_2^2

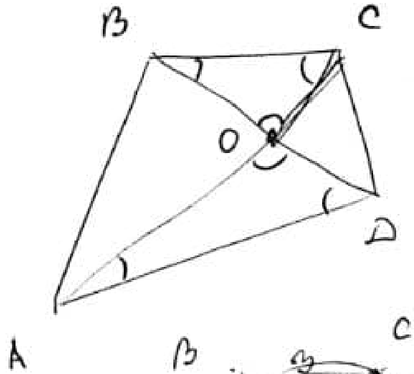
15у

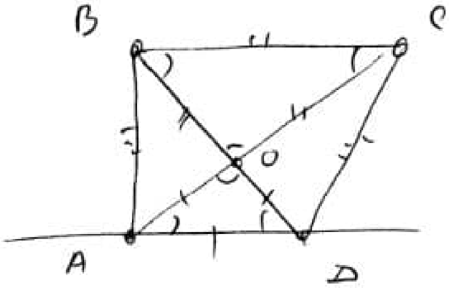
~~1140~~ $\begin{array}{r} 140 \\ +\ 42 \\ \hline 182 \end{array}$

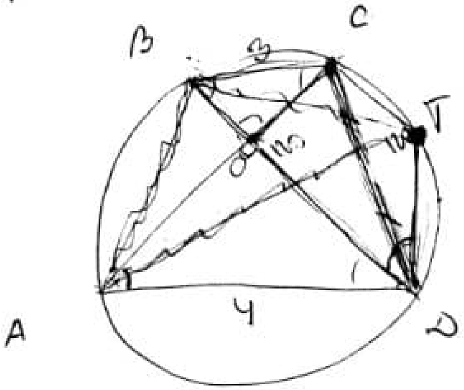
1	2
1	2
1	3
1	3
2	3
2	3
1	2
1	3
1	3
1	2
2	
2	

211005870 (U260313 M1276745)

Черновик





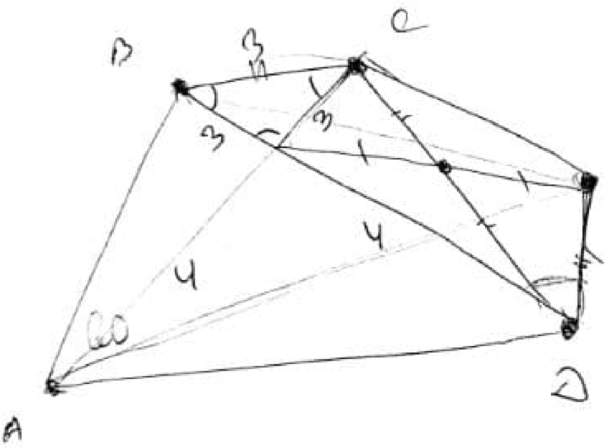


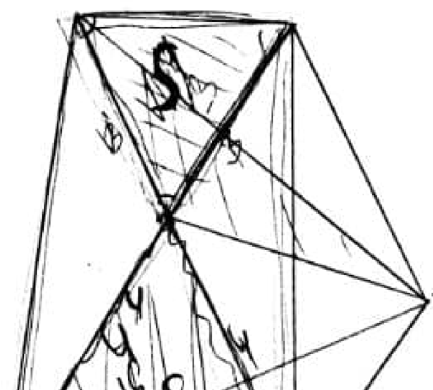
T лежит на окр.

$\angle BTA = 60^\circ$

$\angle BAT = \angle BDT = 60^\circ$

=> пункт а.





$$\frac{S_{ABCD} - S_{ABO}}{S_{ABCD}}$$