# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005814**

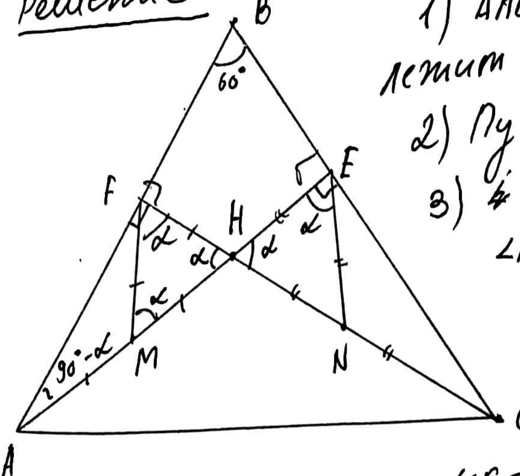
ID профиля: **806992**

Вариант 14

**№1**

Дано:
$\triangle ABC$ - остроуг.
$CF$, $AE$ - выс. $\triangle ABC$
$CF \cap AE = H$
$M$, $N$ - сер. отр. $AH$ и $CH$ соот.
$FM = 2$
$EN = 11$
$FM \parallel EN$
Найти:
$\angle ABC$ - ?
$S_{ABC}$ - ?
$R_{опис.}$ $\triangle ABC$

Решение:




1) $\triangle ABC$ - остроуг. $\Rightarrow$ т. $H$ лежит внутри $\triangle ABC$ (ортоцентр)

2) Пусть $\angle FHM = \angle EHN = \alpha$ (верт. углы)

3) $FM$ - медиана $\triangle AFH$, $\angle AFH = 90°$ ($CF$ - выс.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow AM = FM = MH$ (т.о медиане прямоуг. $\triangle$-ка)

Аналогично: $EN$ - мед $\triangle HEC$ - прямоуг. $\Rightarrow$
$\Rightarrow HN = NE = NC$

4) $FM = MH \Rightarrow \triangle FMH$ - р/б $\Rightarrow \angle MFH = \angle FHM = \alpha$ (р/б $\triangle$-к)
Аналогично: $\triangle HNE$ - р/б ($HN = NE$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EHN = \angle HEN = \alpha$ (св-во р/б $\triangle$-ка)

5) $\angle FME = \angle MEN = \alpha$ (н/л при $FM \parallel EN$, $ME$ - сек.)

6) В $\triangle$-ке $FHM$ все углы равны $\alpha$ $\Rightarrow \triangle FMH$ - р/с (по призн.), $\alpha = 60°$.

7) В $\triangle$-ке $\triangle HEN$ 2 угла равны $\alpha = 60°$ $\Rightarrow \triangle HEN$ - р/с (призн) 3-ий угол тоже равен $\alpha = 60°$

8) Т. о сумме углов $\triangle$-ка:

$\triangle FHA$ ($\angle F = 90$) $\angle FAH = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

$\triangle AEB$ ($\angle AEB = 90°$) $\angle ABC = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha = 60°$

$\underline{\angle ABC = 60°}$

9) $\triangle FHM$ - р/с $\Rightarrow FH = FM = 2$; $CF = CN + HN + FH =$
$= 11 + 11 + 2 = 24$

10) $\triangle HEN$ - р/с $\Rightarrow HE = EN = 11$; $AE = AM + MH + HE =$
$= 2 + 2 + 11 = 15$

11) $\triangle BFC$, $\angle F = 90°$: $BC = \dfrac{FC}{\sin ABC} = \dfrac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{48}{\sqrt{3}} = \dfrac{48}{3}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$\triangle AEB$, $\angle E = 90°$: $AB = \dfrac{AE}{\sin ABC} = \dfrac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{30}{\sqrt{3}} = \dfrac{30}{3}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

12) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ =$

$= 10 \cdot 3 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} = 40 \cdot 3\sqrt{3} = 120\sqrt{3}.$

13) Т. син: $R_{опис} = \frac{AC}{2\sin ABC}$

Т. кос.:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC =$

$= (10\sqrt{3})^2 + (16\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ =$ $\frac{1}{2}$

$= (10\sqrt{3})^2 + 16\sqrt{3} - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} =$

$= 100 \cdot 3 + 256 \cdot 3 - 10 \cdot 16 \cdot 3 =$

$= 3(350 - 160) = 3 \cdot 190$

$AC = \sqrt{3} \cdot \sqrt{190}$

$\begin{array}{r} 350 \\ -160 \\ \hline 190 \end{array}$

14) $R = \frac{AC}{2\sin ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{190}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{190}$

Отв: $\angle ABC = 60^\circ$

$S_{ABC} = 120\sqrt{3}$

$R = \sqrt{190}$

**№2** Пусть $x$ - ~~первое~~ самое маленькое число, ~~$y$~~ $z$ - ~~последнее~~ самое большое число, $y$ - сумма всех чисел, которые больше $x$, но меньше $z$.

По условию задачи:

$$\ominus\begin{cases} 30x+y+z=450 \\ x+y+14z=450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29x-13z=0 \quad (1) \\ 30x+y+z=450 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $29x=13z$ - линейное диофантово ур-ние. Т.к. НОД$(29,13)=1$, то реш. ур-ния имеют вид:

$$\begin{cases} x=13t \\ z=29t \end{cases} t\in\mathbb{Z}. \text{ т.к. } x,z\in\mathbb{N}, \text{ то } t\in\mathbb{N}.$$

Итого: $\begin{cases} x=13t \\ z=29t \end{cases} t\in\mathbb{N}$

(2): $450=30x+y+z > 30x = 30\cdot 13t = 30\cdot 13t = 390t$

$390t<450$

$390t<450$

$f(t)=390t$ - лин. ф-ция, $\nearrow$ при $t\in\mathbb{N}$.

$t=1$: $390<450$ верно.

$t=2$: $2\cdot 390<450$ неверно

$t\geq 2$: из монотонного возр. $f(t)$ неверно.

Получаем единственный случай

$x=13$; $z=29$

$390+y+29=450$

$y=60-29=60-30+1=31$

записано 3 числа

невозможно, ведь $31>29=z$ - max число

записано ~~3~~ 4 числа

~~случаи: $14+(31-14)=14+17$~~ I случай.

~~$15+(31-15)=15+16$~~ II случай

~~16~~

т. A: $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$ черновик. Черновик

~~опр.~~ $(3;2)$ $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

т. A $2a^2+2ax+x^2-2xy+y^2=0$

$\cancel{(ax>0)}$ $ax\geq 0$

№2

$30x+y+z=450$

$x+y+14z=450$

$29x=13z$

$\cancel{x\in}$ $x=13t,$

$z=29t,$ $t\in\mathbb{Z}.$

$x,z\in\mathbb{N}\Rightarrow t>0$

$t=1$ $x+13t+29t=450$

13 29 $x+42t=450$

$14+15+16+\ldots+28<450$ $x=450-42t$

$t=2$

~~2~~ 4

26 58

$29\cdot 3$

$\begin{array}{r} 29 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 87 \end{array}$

$t=3$

39 $29\cdot 3$

87

$39+87=$

$39+87+40+41=80+80+40+7=207$

$207+42=249$

$249+43=$

чистовик. Лист 4/6

случаи: $14 + (31 - 14) = 14 + 17 = 31$ I

$15 + (31 - 15) = 15 + 16 = 31$ II

$16 + (31 - 16) = 16 + 15$ повтор II

$17 + (31 - 17) = 17 + 16$ повтор I

$18 + (31 - 18) = 18 + 13$

$19 = 19 + 12$

$20 = 20 + 11$

$21 = 21 + 10$

$22 = 22 + 9$

$23 = 23 + 8$

$24 = 24 + 7$

$25 = 25 + 6$

$26 = 26 + 5$

$27 = 27 + 4$

$28 = 28 + 3$

нет повторов.

~~дальше повторений не будет т.к. каждое число $< \frac{31}{2}$ начало~~

не подходит, ведь каждое второе число меньше или равно 13

записано ~~3~~ 5 чисел

„средние числа" мин. сумма равна $14 + 15 + 16 = 45 > 31$.

Значит ~~за~~ не может быть записано 5 и более чисел.

Ответ: 13 14 17 29

13 15 16 29

2 случая.

№3 Чистовик. Лист 5/6

$A(x;y)$: $2a^2+2ax+x^2-2xy+y^2=0$ (2)

$\omega(B;r)$: $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$ (1)

1. $(a^2y^2-2a^2y+a^2)-a^2+(a^2x^2-2ax(a^2+3)+(a^2+3)^2)-$
$-(a^2+3)^3+a^4+9=0$

$(ay-a)^2+(ax-a^2-3)^2-a^2-a^4-6a^2-9+a^4+9=$

$(ay-a)^2+(ax-a^2-3)^2=7a^2$

$(ay-a)^2+(ax-a^2-3)^2=7a^2$

при $a=0$: $0+3^2=0$, не окр.

при $a\neq0$:

$a^2(y-1)^2+a^2(x-a-\frac{3}{a})^2=7a^2 \quad /:a^2\neq0$

$(y-1)^2+(x-a-\frac{3}{a})^2=7$

~~орди~~ $B(a+\frac{3}{a};1)$ – центр окружности.

2. $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$\underbrace{y^2+(x-y)^2}_{\geq0}+\underbrace{2a^2}_{\geq0}+\underbrace{2ax}_{\leq0}=0$

равенство выполняется, только если $2ax\leq0$, т.к. $\forall x\in\mathbb{R}: x^2\geq0$

~~пусть~~

Пусть $B_x>4$ т. В выше прямой $x=4$

$a+\frac{3}{a}>4$

$\frac{a^2-4a+3}{a}>0 \quad \frac{a^2-3a-a+3}{a}>0 \quad \frac{(a-3)(a-1)}{a}>0$

~~чистовик~~ черновик. Лист 6/6

Метод интервалов ( т. смены знака $a = \{0; 1; 3\}$ (возм.)

$-\ \overset{\circ}{0}\ +\ \overset{\circ}{1}\ -\ \overset{\circ}{3}\ +\ \rightarrow a$

$a \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$

$a > 0$

Но для ординаты т. A верно

$2ax > 0 \quad | : 2a > 0$

$\underline{x > 0}$

~~∀ т. A, принадл. кривой~~

$\underline{\text{т. } A}$ $\quad 2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$\cancel{2a^2 + 2ax}$

$(a^2 + 2ax + x^2) + a^2 - x^2 + (x^2 - y)^2 + y^2 = 0$

$(x + a)^2 + a^2 - x^2 + (x - y)^2 + y^2 = 0$

$a^2 - x^2 \le 0$ – аналог. предыдущим рассуждениям

$\cancel{(a - x)(a + x) \le 0}$

$-x^2 \le -a^2$

$\underline{x^2 \ge a^2 > 0}$

$a + \frac{3}{a} < 4 \iff a \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$

аналогично методу интервалов.

№2 черновик

~~замое~~ самое малое в 30 раз : $\Sigma = 450$

самое большое в 14 раз : $\Sigma\ 450$

$x ; y ; z$

$$30x + y + z = 450$$
$$\ominus\ x + y + 14z = 450$$
$$29x - 13\cancel{y}z = 0$$
$$29x = 13z$$
$$29x = 13z$$
$$x \vdots 13 ; \quad z \vdots 29.$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 145 \end{array}$$

Полный перебор

13 29

14 : 14; 15; 16;

13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; ... 29

$$\begin{array}{r} 145 \\ -\ 26 \\ \hline 119 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 119 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 357 \end{array}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = \frac{12(12+1)}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 29 = \frac{29(29+1)}{2}$$

$$\frac{29 \cdot 30}{2} - \frac{12 \cdot 13}{2} = 29 \cdot 15 - 6 \cdot 13 =$$
$$= \cancel{3(29} - 3(29 \cdot 5 - 2 \cdot 13) =$$
$$= 3(145 - 26)$$
$$3 \cdot 119$$

Черновик

$$\begin{cases} 30x + y + z = 450 \\ x + y + 14z = 450 \end{cases}$$

$29x = 13z$

$\boxed{x = 26 \quad ; \quad z = 58}$

$x = 26$ $\quad$ $z = 58$

26 $\quad$ 58

$\cancel{27}$

$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{26(27)}{2} \geq 450$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 26 \\ \hline 162 \\ 54\phantom{0} \\ \hline 702 \\ +\ 900 \\ \hline 1602 \end{array}$$

$n(n+1) \geq 900 + 26 \cdot 27$ $\quad$ 1602

$n^2 + n - 900 - 26 \cdot 27 \geq 0$

$D = 1 + 4 \cdot (900 + 26 \cdot 27) =$

$= 1 + 4 \cdot 1602 > 4 \cdot 1600 = (2 \cdot 40)^2 =$

$= 80^2$

$\cdot\ {}^{13}_{30}$ $\quad$ 39

$n_k > \frac{1+80}{2}$

$n_k > 40$

$\frac{40 \cdot 41}{2} - \frac{26(27)}{2}$

$20 \cdot 41 - 13 \cdot 27$

$820 - 351 =$

$=$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 13 \\ \hline 81 \\ +\ 27\phantom{0} \\ \hline 351 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 820 \\ -\ 351 \\ \hline 469 \end{array}$$

~~40 + 41~~ $\quad$ 27 +

Черновик.

$A(x;y):\quad 2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0 \quad (1)$

$\omega(B;r):\quad a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0 \quad (2)$

$A, B$ по разные стороны отн. прямой $x=4$

$(2)\quad a^2x^2+a^2y^2-2ax(a^2+3)-2a^2y+a^2+a^4-a^2+9=0$

$\cancel{a^2(y^2} -$

$\cancel{a^2(y^2-2y+1)+(ax)^2-2ax+(a^2-3)^2-a^4+6a^2-9+a^4-}$

$\cancel{-a^2}$

$\cancel{a^2(y^2-2y+1)+a^2x^2}-2ax(a^2-3)+a^4-a^2+9=0$

$a^2(y-1)^2+(ax)^2-2ax(a^2-3)+(a^2-3)^2+a^4-a^2+9-(a^2-3)^2=0$

$a^2(y-1)^2+(ax-a^2+3)^2=a^4-6a^2+9-a^4+a^2-9$

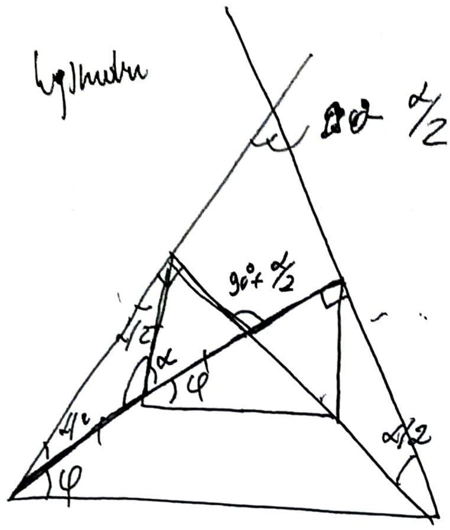
$a^2(y-1)^2+(ax-a^2+3)^2=-5a^2$

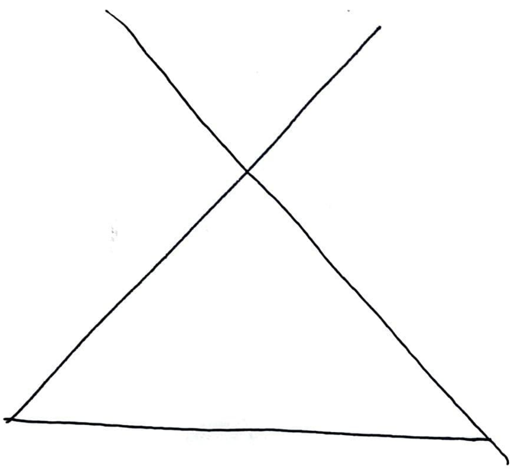
$(ay-a)^2+(ax-a^2+3)^2=-5a^2$

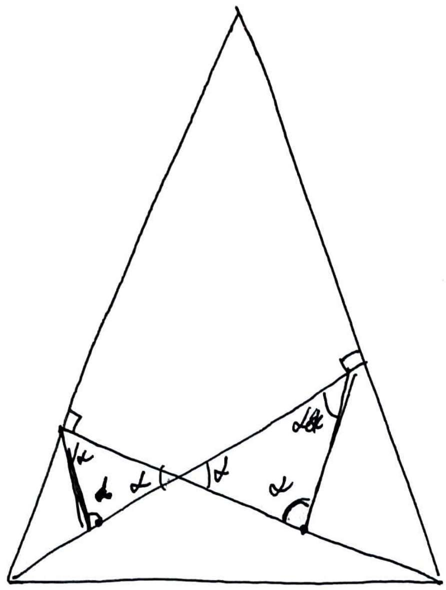
$(ay-a)^2+(ax-a^2+3)^2+5a^2=0$

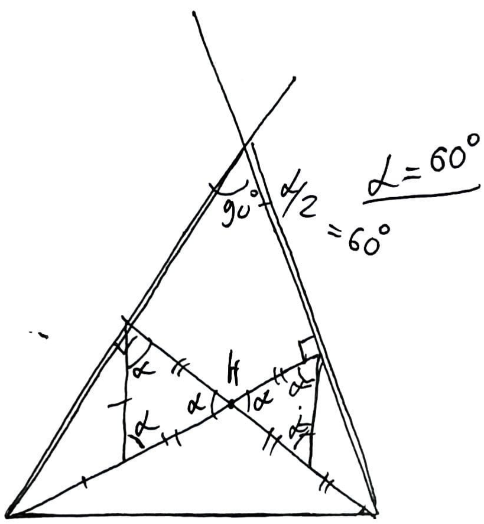
N1

[illegible]






$\frac{48}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 3 \\ -3 & 16 \\ 18 & \\ -18 & \\ \end{array}$$

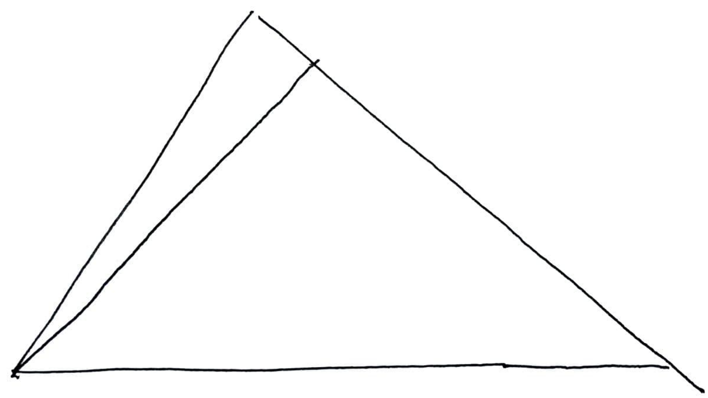
черновик

„Физтех" математика

№1 $\Delta ABC$ -остроугольный. $CF$, $AE$ - выс. $\Delta ABC$ - остроуг.

$E\cap CF = H$. $M,N$ - ср. $AH$, $C_H$ соот.. ~~FM=2, EN=11,~~

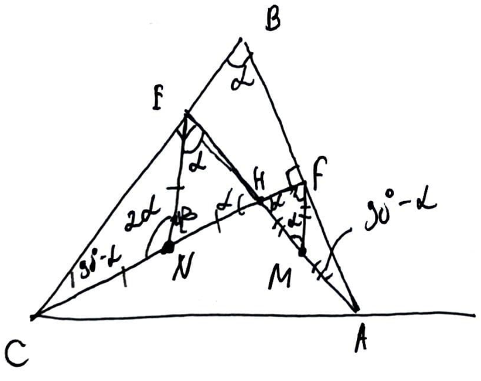
$FM=2$, $EN=11$, $FM \parallel EN$; Найти: $\angle ABC$, $S_{ABC}$, $R_{ABC}$

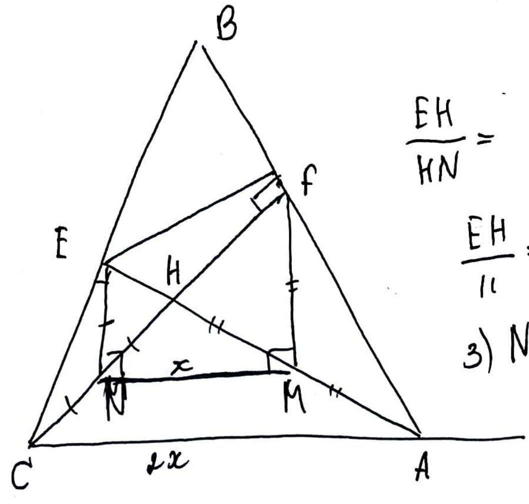


1) H-внутри $\Delta ABC$

2) EN, FM - медианы прямоуг. Δ-ков.

3) т.H. $\frac{BC}{AB}$




$$\frac{EH}{HN} = \frac{FH}{HM}$$

$$\frac{EH}{11} = \frac{FH}{2}$$

3) NM - ср. линия $\Delta CHA$

---

№3

$m A$ ~~∈~~ $\quad 2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0 \quad - mA$

$\omega(B;r)$ : $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$(a^2y^2-2a^2y+a^2)+a^2x^2-x(2a^3+6a)+a^4-a^2+9=0$

$a^2(y-1)^2 +$

$x=4$ : A и B по разные стороны не лежат на этой прямой

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005814**

ID профиля: **806992**

Вариант 14

Чистовик

лист 1

№4 $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2\cdot y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2\cdot y^2=37 \end{cases}$

Симметр. система уравнений отн. $x^2; y^2$

Замена: $u=x^2+y^2$

$v=x^2y^2$

Заметим, что $\forall x, y \in R$ $u=x^2+y^2\geq 0$

$v=x^2+y^2\geq 0$

Т.к. $\forall a \in R: a^2 \geq 0$

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=$

$=7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7u-3v$

$x^4+y^4-x^2y^2=x^4+y^4+2x^2y^2-3x^2y^2=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=$

$=u^2-3v$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7u-3v=7 \\ u^2-3v=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u-u^2=-30 \quad (1) \\ 7u-3v=7 \quad (2) \end{cases}$

(1) $u^2-7u=30$

$u^2-7u-30=0$

$D=49+4\cdot 30=49+120=169=13^2$

$u=\frac{7\pm 13}{2}$ $\left[\begin{array}{l} u=10 \\ u=-3 \text{ — не удовл. условию } u\geq 0. \end{array}\right.$

$u=10$

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=10 \\ 3v=7u-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=10 \\ 3v=70-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=10 \\ 3v=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=10 \\ v=21 \end{cases}$

По обратной теореме Виета $x^2; y^2$ — корни уравнения

$t^2-10t+21=0$

$D=100-4\cdot 21=100-84=16=4^2$

$t=\frac{10\pm 4}{2}=5\pm 2$ $\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=3 \end{array}\right.$

Значит

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

лист 2

$$\Longleftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ y^2 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y^2 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y^2 = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y^2 = 7 \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{7} \end{cases} \end{array} \right.$$

8 решений имеет система ур-ний.

Ответ: $(\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{7}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{7}; -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{7})$.

Чистовик лист 3

Задача 5

На красную сторону возможно 15 разл. натур. чисел, на синюю – тоже 15. Заметим, что при такой раскладке число карточек будет равно $15^2$, ~~а дублей будет по 2 колоде~~

а число дублей будет равно 15

(перебор: (1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6); (7;7); (8;8) ... ; (15;15))

~~Возможны два бла способа~~

Возможны 2 способа (благоприятных фокуснику)

а) фокусник вытягивает два дубля.

Т.к. в колоде нет одинаковых карт, то никакое число не будет встречатся одновременно на обеих вытянутых карточках.

Кол-во способов: число сочетаний $C_{15}^2 =$

$$= \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 70 + 35 = 105.$$

б) фокусник вытягивает дубль и не дубль, удовлетворяющий условию задачи.

~~всего не дублей в колоде: $15^2 - 15 = 14 \cdot 15 =$~~

~~$= 225 - 15 = 210$~~

~~число не дублей, которые не имеют на себе какой-либо определенной цифры:~~

~~(Пример для 1: 12 не подх.; 22 подх.)~~

~~$210 - 14 \cdot 14 = 210 - 196 = 4 + 206 - 196 = 14$~~

Число дублей в колоде: 15 б) лист 4

Число не дублей в колоде, которые не имеют определенной ~~цифры~~ числа (14 ~~циф~~ чисел на синюю ст. и 14 чисел на красную): $14 \cdot 14 = 169$

Из них 14 дублей, которые уже посчитаны в п. а: $169 - 14 = 155$

Кол-во способов вытянуть дубль и не дубль (с учетом того, что AB и BA — одна пара):

~~15/155/2~~ $15 \cdot 155 = 2325$

$$\begin{array}{r} 155 \\ \times\ 15 \\ \hline 775 \\ 155\ \ \\ \hline 2325 \end{array}$$

Суммарное число способов, которыми фокусник может вытянуть карты:

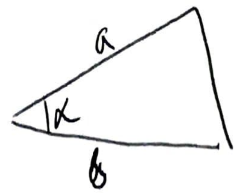
$105 + 2325 =$

$= 110 + 2320 = 2430$

Ответ: 2430

Чистовик

лист 5/



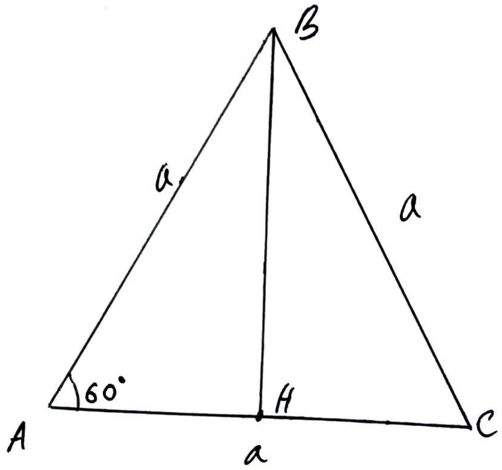

$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$

площадь Δ-ка

## Задача N6

Теор. факт.: площадь равностороннего Δ-ка со стороной $a$ равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Доказательство




$\triangle ABC$ – р/с

~~$\angle A = 60°$~~

~~$BH$ – высота~~.   $\angle BAC = 60°$ (р/с Δ-ка)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC =$

$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60° =$

$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (ф-ла площади Δ-ка через 2 ст. и синус угла между ними)

Решение

Дано:

$\square ABCD$ – выпукл.

$AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$, $\triangle AOD$ – правильные

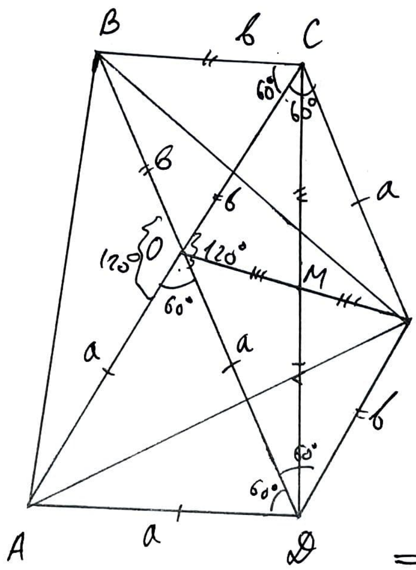
$T$ – точка, симметр. т. $O$ отн. сер. $CD$

а) Док-ть: $\triangle ABT$ – правильный

б) $BC = 3$

$AD = 4$

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?




1) Пусть $OA = OD = AD = a$ ($\triangle AOD$ – р/с)

$OB = OC = BC = b$ ($\triangle OBC$ – р/с)

2) Пусть $OT \cap CD = M$.

Т $OM = MT$, $CM = MD$ (по постр. и усл.)

Тогда $\square OCTD$ – парал. (по призн.) ⇒

⇒ $CT = OD = a$,

$OC = TD = b$.

3) $\angle ADO = 60°$ ($\triangle AOD$ – р/с)

$\angle AOD = 60°$ ($\triangle AOD$ – р/с) ⇒

⇒ $\angle COD = 180° - \angle AOD = 180° - 60° = 120°$ ⇒

⇒ $\angle ODT = 180° - \angle COD$ (~~смеж.~~ о/ст. при $DT \parallel OC$, $OD$ – сек ($\square OCTD$ – парал.))

$\angle ODT = 60°$

4) Из п. 3 ⇒ $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60° + 60° = 120°$

5) $\angle BOA = 120° = \angle COD$ (вертикальные)

ОСТ    Чистовик    Лист 6

6) $\angle \cancel{OCT} = \angle AOD$ (соот. при $OD \parallel CT$, $OC$ - сек.)
1 $\angle BCO = 60°$ (т.к. $\triangle BOC$ - р/с $\triangle$-ка) $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120°$.

7) Для $\triangle AOB$; $\triangle TCB$; $\triangle ADT$:

$\angle AOB = \angle TCB = \angle ADT = 120°$
$BC = TD = BO = b$
~~CA = D~~ $DA = CT = OA = a$ $\Big\} \Rightarrow$ $\triangle$-ки равны по 2 ст. и углу между ними $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle TCB = \triangle ADT \Rightarrow$ ~~AB = BT = CA~~ $AB = BT = TA \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABT$ — р/с (опр.)

(б) $a = 3$; $b = 4$.

8) $S_{ABT}$ Пусть $AB = BT = TA = x$.

9) Т. кос. ($\triangle AOB$):

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos BOA =$$
$$= 3^2 + 4^2 - 2\cdot3\cdot4\cdot\cos 120° =$$
$$= 3^2 + 4^2 + 2\cdot3\cdot4\cdot\cos 60° =$$
$$= 3^2 + 4^2 + 2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2} = 9 + 16 + 12 =$$
$$= 9 + 28 = 37$$

$$x = \sqrt{37}$$

10) $S_{ABT} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{37\sqrt{3}}{4}$

10) $S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB\cdot \sin AOB = \frac{1}{2}\cdot ab \sin 120° = \frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

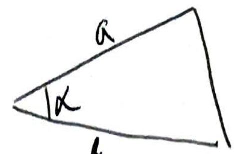
из п. 7 $\Rightarrow$ $S_{AOB} = S_{TCB} = S_{ADT} = 3\sqrt{3}$

Чистовик.

лист 7

лист 5/

Чистовик



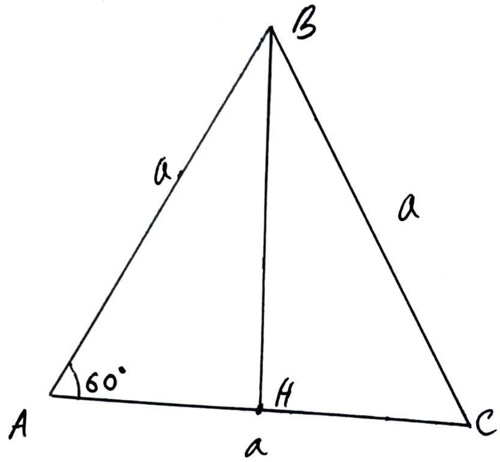

$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$

площадь Δ-ка

## Задача N 6

Теор. факт.: площадь равностороннего Δ-ка со стороной $a$ равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Доказательство




$\Delta ABC$ – р/с

~~$\angle A = 60°$~~

~~$S$ $BA$ высота~~. $\angle BAC = 60°$ (р/с Δ-ка)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC =$

$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60° =$

$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (ф-ла площади Δ-ка через 2 ст. и синус угла между ними)

Решение

Дано:

▱$ABCD$ – выпукл.

$AC \cap BD = O$

$\Delta BOC$, $\Delta AOD$ – правильные

$T$ – точка, симметр. т. $O$ отн. сер. $CD$

а) Док-ть:

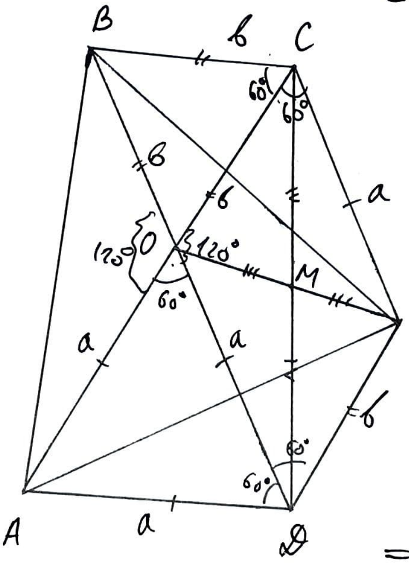
$\Delta ABT$ – правильный

б) $BC = 3$

$AD = 4$

Найти:

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?




1) Пусть $OA = OD = AD = a$ ($\Delta OAD$ – р/с)

$OB = OC = BC = b$ ($\Delta OBC$ – р/с)

2) Пусть $OT \cap CD = M$.

$OM = MT$, $CM = MD$ (по постр. и усл.)

Тогда ▱$OCTD$ – парал. (по призн.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $CT = OD = a$,

$OC = TD = b$.

3) $\angle ADO = 60°$ ($\Delta AOD$ – р/с)

$\angle AOD = 60°$ ($\Delta AOD$ – р/с) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle COD = 180° - \angle AOD = 180° - 60° = 120°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle ODT = 180° - \angle COD$ (~~смеж.~~ о/ст. при $DT \parallel OC$, $OD$ – сек (▱$OCTD$ – парал.))

$\angle ODT = 60°$

4) Из п. 3 $\Rightarrow$ $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60° + 60° = 120°$

5) $\angle BOA = 120° = \angle COD$ (вертикальные)

Чистовик.

лист 7

11) $S_{ABCD} = S_{ADTCB} - S_{CTD} = (S_{ABT} + S_{BCT} + S_{ADT}) - S_{CTD} =$

$= \left(\left(\frac{37\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) - 3\sqrt{3}\right) = \frac{37+12}{4}\sqrt{3} = \cancel{\frac{49\sqrt{3}}{4}}$

$= \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{37\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{37}{49}$$

Ответ: а) доказано

б) $\frac{37}{49}$

Черновик.

```
  2 2
  155
×  15
 1 1
  775
+155
 2325
```

черновик

№4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Система симметрическая относительно $x^2; y^2$.

Замена: $u=x^2+y^2$
$v=x^2y^2$

$$7x^2+7y^2-3x^2y^2 = 7(x^2+y^2)-3x^2y^2 = 7u-3v$$

$$x^4+y^4-x^2y^2 = (x^4+y^4+2x^2y^2)-3x^2y^2 =$$
$$=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2 = u^2-3v$$

$$\ominus\begin{cases} u^2-3v=37 \\ 7u-3v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-7u=30 & (1) \\ 3v=7u-7 & (2) \end{cases}$$

(1) $u^2-7u-30=0$

$D=49+4\cdot30=49+120=169=13^2$

$u=\frac{7\pm13}{2}$ $\left[\begin{array}{l} u=10 \\ u=-3 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=10 \\ 3v=7\cdot10-7 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-3 \\ 3v=-3\cdot7-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=10 \\ 3v=70-7 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-3 \\ 3v=-4\cdot7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=10 \\ v=\frac{63}{3} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} u=-3 \\ \cancel{3}v=-\frac{28}{3} \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

По обр. т. Виета: $x^2, y^2$ - корни ур-ния

$t^2+3t-\frac{28}{3}=0$; $D=9+4\cdot\frac{28}{3}=\frac{81+80+16}{3}=$
$=\frac{97+80}{3}=\frac{177}{3}$

Черновик

Задача № 5

набор из $15^2$ различных карточек

| красная сторона | синяя сторона |
|---|---|
| ~~a ∈ {1, 15}~~ <br> $a \in \mathbb{N}$; $\{1; 2; \ldots 15$ | $b \in \mathbb{N}$; $\{1; 2; \ldots; 15.\}$. |

дубль – числа на обеих сторонах карточки совпадают одной карточки

всего дубли?

1 1
2 2
3 3 15 штук

$C_{225}^{2} = \frac{225!}{223! \cdot 2!} = \frac{225 \cdot 224}{2}$ много!

1 варианты: дубль + дубль

возможные варианты дубль + дубль.

$C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 35 + 70 = 105.$

дубль + не дубль ~~другого~~ с другими цвета:

дубль ": всего не дублей: $15^2 - 15 =$

$\boxed{= 14 \cdot 15}$

$\boxed{= 14 \cdot 15}$

Чертовски

[illegible]

$9 + 4 \cdot 9 - 3 \cdot$ [illegible] $=$

$= 9 + 28 = 37$

$7 \cdot 7 + 7 \cdot 3 - 3 \cdot 21 =$

$= 70 - 63 = 7$

Черновик