Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005805**

ID профиля: **304765**

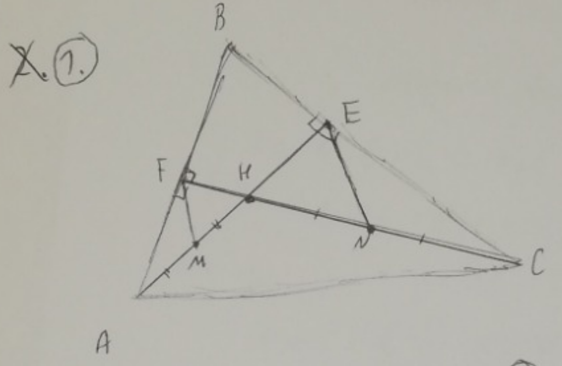
Вариант 14

Математика, 9 кл

лист 1 из 2

Чистовик

X. 1.



Дано: $AM = MH$

$HN = NC$

$FM \parallel EN$

$FM = 2$

$EN = 11$

Найти: $\angle ABC$; $S(ABC)$; $\omega(O;R)$

Решение:

$\left.\begin{array}{l}\Delta AFH - \text{п/у} \\ AM = MH\end{array}\right\} \Rightarrow FM$ – медиана $\Rightarrow AM = MH = FM = 2$

аналогично, ~~HM =~~ $NH = NC = EN = 11$.

$\left.\begin{array}{l}FM \parallel EN \Rightarrow \angle FMH = \angle HEN \ (ME - \text{сек.}) \\ \angle FHM = \angle EHN\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FMH \sim \Delta HEN \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{EH}{MH} = \dfrac{EN}{MF} \Rightarrow EH = \dfrac{11 \cdot 2}{2} = 11$

$\dfrac{FH}{HN} = \dfrac{FM}{EN} \Rightarrow FH = \dfrac{2 \cdot 11}{11} = 2.$

$FH = FM = MH \Rightarrow \Delta FMH$ – р/с $\Rightarrow \angle M = \angle H = \angle F = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FHE = 180° - \angle FHM = 120° \Rightarrow \underline{\angle ABC} = 360° - 90° - 90° - \angle FHE = \underline{60°}.$

$HE = EN = NH \Rightarrow \Delta HEN$ – р/с $\Rightarrow \angle H = \angle E = \angle N = 60°$

$\underline{\angle NCB} = 180° - \angle CNE - \angle CEN = 180° - (180° - \angle HNE) - (\angle HEC - \angle HEN) =$

$= \underline{30°}$

$\underline{FB} = FC \cdot tg(FCB) = 24 \cdot tg30° = \dfrac{24}{\sqrt{3}} = \underline{8\sqrt{3}}.$

$\underline{AF} = FH \cdot tg(FHA) = 2 \cdot tg60° = \underline{2\sqrt{3}}$

$S(ABC) = \dfrac{AB \cdot FC}{2} = \dfrac{AF + FB}{2} \cdot (FH + HN + NC) = 5\sqrt{3} \cdot 24 = \underline{120\sqrt{3}}$

Чистовик

(2.) Пусть ~~перв~~ меньшее число – a; большее число – c, а сумма всех остальных – b. Тогда:

$$\begin{cases} 30a + b + c = 450 \\ \cancel{14} a + 14c + b = 450 \end{cases}$$

тогда:

$$30a + c = a + 14c = 450 - b$$

$$29a = 13c$$

$$c = \frac{29}{13} a$$

$c = 2\frac{3}{13} a$; c – нат число; НОД$(3; 13) = 1 \Rightarrow a \vdots 13 \Rightarrow a = 13k$

$k \in \mathbb{N}$

вернёмся к уравнениям:

~~$a + 14c$~~ $30a + c = 450 - b$

$$32\frac{3}{13} a = 450 - b$$

$$(32 \cdot 13 + 3) \cdot k = 450 - b$$

$$b = 450 - 419k$$

$k \geq 1 \Rightarrow b \leq 450 - 419 = 31.$

Если $k \geq 2$, то $b < 0$, чего не может быть. $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 13k = 13.$

$$c = \frac{29}{13} a = 29$$

$$b = 450 - 30a - c = 31$$

Если центральных чисел 1 штука, то оно больше, чем c, но c – наибольшее.

Если центральных чисел 3 или больше, то меньшее из них $< \frac{31}{3} < 13 = a. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ их всего 2. Они различные и каждое больше $a \Rightarrow$ это или $\{15; 16\}$, или $\{14; 17\}$. (центральные числа – числа, кроме a и c)

Ответ: либо $\{13; 14; 17; 29\}$, либо $\{13; 15; 16; 29\}$

211005805 (U304765 M1276986)

X. (1.)

Рассмотрим $\triangle AHC$

$AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2\,AH \cdot HC \cdot \cos\angle AHC =$

$= 4^2 + 22^2 - 2 \cdot 4 \cdot 22 \cdot \cos(180° - \angle FHA) =$

$= 16 + 484 - 176 \cdot \cos 120° = \cancel{258}\ 500 + 176 \cdot \frac{1}{2} = 588$

$\cancel{R = \frac{abc}{4S} =}$

$BE = AE \cdot \cancel{\cos}\ \mathrm{tg}\,\angle BAE = 15 \cdot \mathrm{tg}(180° - (180° - 60°) - (90° - 60°)) =$

$= 15 \cdot \mathrm{tg}\,30 = 5\sqrt{3}$

$EC = HE \cdot \mathrm{tg}\,60° = 11\sqrt{3}$

$\cancel{R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S(ABC)} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{147}}{4 \cdot 120\sqrt{3}} =}$

$\cancel{= \frac{27\sqrt{3 \cdot 147}}{24} = \frac{27\sqrt{49}}{8} = \frac{189}{8}}$

~~Ответ: $\angle ABC = 60°$~~

~~$S(ABC) = 120\sqrt{3}$~~

~~$R = \frac{27}{8}\sqrt{49}$ $R = \frac{189}{8}$~~

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S(ABC)} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 14\sqrt{3}}{4 \cdot 120\sqrt{3}} =$

$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 14}{12} = 14$

Ответ: $\angle ABC = 60°$

$S(ABC) = 120\sqrt{3}$

$R = 14$

211005805 (U304765 M1276986)

Черновик:

$30x + y = 450$

$\cancel{14x}\ x + 14y = 450 \cdot 30$

$41y = 13050$

$450 \times 30 = 13500$

$14 \times 3 = 42$

$13500 - 450 = 13050$

$13050 : 41 = 318$

$y \leq 318$

$x \geq 132$

410

369

328

$22 \times 8 = 176$

$132 \leq x < y \leq 318$

32×13

$450 - 318 = 132$

$16 + 16 = 176$

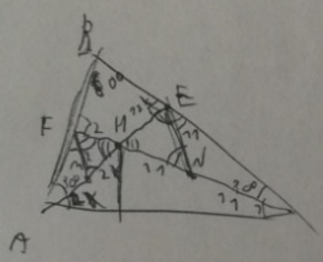
$416 + 3 = 419$

$242 + 16 = 258$

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$390 + 29 = 419$

$484 + 16 = 500$



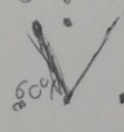
~~Sin~~

$\frac{\sin\angle 1}{4} = \frac{\sin\angle 2}{22}$

$27 \times 7 = 189$

$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2} = \frac{2}{11}$

$\boxed{\sin\angle 2 = 5{,}5\sin\angle 1}$



cos

-cos

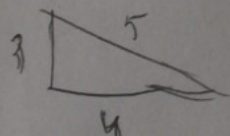
~~$a^2 + b^2$~~

$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\angle$

$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{5}{2}$

$176 : 2 = 88$

$588 : 4 = 147$



$147 : 3 = 49$

$2\sqrt{147}$

...меньшее число – a; большее число – b, а
...всех остальных – в. Тогда

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2$

$390 + 29 = 419$

$419 + 31 = 450$

$\cancel{a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0}$

$(x-y)^2$

22×22
44
44
484

$147 : 3 = 49$
12
27
27
0

$160 \cdot 3$

160×14
64
16
2240

$\frac{2240 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 560$

$560 : 40$

$56 : 4 = 14$

14

211005805 (U304765 M1276986)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005805**

ID профиля: **304765**

Вариант 14

Чистовик

(4) $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7, \\ x^4+y^4-x^2y^2=37; \end{cases}$

Пусть $x^2=a$; $y^2=b$, тогда:

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7, \\ a^2+b^2-ab=37; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+(2b-7)a+(b^2-7b-30)=0, (1) \\ 7(a+b)-3ab=7; \end{cases}$$

(1): $a^2+(2b-7)a+(b^2-7b-30)=0$

$D=4b^2-28b+49+4b^2-28b-120=13^2$

$$\left[\begin{array}{l} a=-b+10, \\ a=-b-3 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=10, \\ a+b=3; \end{array}\right. \\ ab=\frac{7(a+b-1)}{3}; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=10, \\ ab=21; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-3, \\ 3ab=-28 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10-b, \\ b^2-10b+21=0; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-b-3, \\ 3b^2+9b-28=0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$D=81+336=417$

$\cancel{b_{1,2}}=\left[\begin{array}{l} b=\frac{-9+\sqrt{417}}{6} \\ b=\frac{-9-\sqrt{417}}{6} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \\ \begin{cases} a=7 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1,5-\frac{\sqrt{417}}{6}, \\ b=-1,5+\frac{\sqrt{417}}{6}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1,5+\frac{\sqrt{417}}{6} \\ b=-1,5-\frac{\sqrt{417}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Чистовик.

4

Вернёмся к x и y:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2 = 3, \\ y^2 = 7; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 7, \\ y^2 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = -1{,}5 - \frac{\sqrt{471}}{6}, \\ y^2 = -1{,}5 + \frac{\sqrt{471}}{6}; \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} x^2 = -1{,}5 + \frac{\sqrt{471}}{6}, \\ y^2 = -1{,}5 - \frac{\sqrt{471}}{6}; \end{cases} \varnothing \end{array}\right.$$

, т.к. $-1{,}5 - \frac{\sqrt{471}}{6} < 0$, а x^2 и $y^2 > 0$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = \sqrt{3}, \\ y = \sqrt{7}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{7}, \\ y = \sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3}, \\ y = -\sqrt{7}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \\ y = \end{cases} \end{array}\right.}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = \pm\sqrt{3}, \\ y = \pm\sqrt{7}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\sqrt{7}, \\ y = \pm\sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\pm\sqrt{3};\ \pm\sqrt{7});\ (\pm\sqrt{7};\ \pm\sqrt{3})$

(5)

Чистовик

Пусть ~~их~~ фокусник вытянул дубль с номером x.

По условию, на второй карточке не может быть номера x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для каждой стороны II карточки остаётся по 14 вариантов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при фиксированном x, кол-во вариантов $= 14^2$

x может быть от 1 до 15 $\Rightarrow$ общее кол-во вариантов $= 15 \cdot 14^2$.

Всё вышесказанное будет верно, если у нас ~~каждой~~ есть все варианты карточек, и каждый вариант встречается по одному разу.

Докажем это:

Если у нас нет какого-то варианта карточки, то кол-во карточек будет не больше, чем $15^2 - 1$ (15^2 - все варианты; хотя бы одной нет), но по условию у нас 15^2 карточек. противоречие.

Все карточки различны по условию.

Ответ: $15 \cdot 14^2$ вариантов.

211005805 (U304765 M1276987)

④ ⑥

Чистовик.

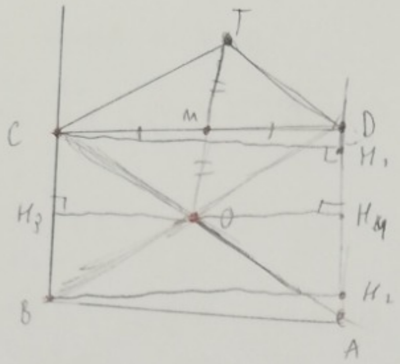
Дано: $ABCD$

BCO – р/с.

OAD – р/с

T – симметр. O относительно m

Д-ть: $\triangle ABT$ – р/с.



Решение:

① ~~$CM = MD$, $M \in CD$ $\Rightarrow$ C симметрии~~

$$\left.\begin{array}{l}\angle CMO = \angle TMD \\ MO = MT \\ CM = MD\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle CMO = \triangle MTD \Rightarrow TD = CO.$$

аналогично, $\triangle MCT = \triangle MOD \Rightarrow \left.\begin{array}{l} CT = OD \\ TD = CD\end{array}\right\} \Rightarrow CTDO$ – пар-м

$\Rightarrow CT \parallel OD \Rightarrow \underline{\angle TCO} = \angle COB = \underline{60^\circ}$ (CO – сек.)

Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle BOA$.

$$\left.\begin{array}{l} BO = CB \\ OA = OD = CT \\ \angle BOA = (180^\circ - \angle COB) = 120^\circ = \angle BCO + \angle OCT = \angle BCT\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BCT = \triangle BOA \Rightarrow BT = BA.$$

аналогично, $BA = TA = TB \Rightarrow \triangle BTA$ – р/с.

Q

ч.т.д.

② Дано: $BC = 3$; $AD = 4$

$\angle BCD = \angle ODA = 60^\circ \Rightarrow CB \parallel AD \Rightarrow CBAD$ – трапец.

(6) Рассмотрим △ BOA и △ COD

$$\left.\begin{aligned} &\angle BOA = \angle COD \\ &CO = OB \\ &OD = OA \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle COD = \triangle BOA \Rightarrow \angle CDO = \angle OAB$$

$$\angle CDA = \angle CDO + \angle ODA = \angle OAB + \angle OAD = \angle BAD \Rightarrow$$

$\Rightarrow BCDA$ – р/б трап. $\Rightarrow CD = BA$.

Проведём высоты CH_1 и BH_2

$$\left.\begin{aligned} &\angle CDH_1 = \angle BAH_2 \\ &\angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ \\ &CD = BA \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle CDH_1 = \triangle BAH_2 \Rightarrow DH_1 = AH_2$$

Рассмотрим CH_1H_2B:

$\angle H_1 = \angle H_2 = \angle B = \angle C \Rightarrow CH_1H_2B$ – прямоуг. $\Rightarrow CB = H_1H_2$

$$AH_1 = DH_2 = \frac{DA - CB}{2} = 0{,}5$$

Из O проведём высоты OH_3 и OH_4 к CB и DA.

$CB \parallel DA \Rightarrow O \in H_3H_4 \Rightarrow \underline{H_3H_4} = OH_3 + OH_4 =$

$$= CO \cdot \cos(H_3OC) + OD \cdot \cos(H_4OD) = BC \cdot \cos\left(\frac{COB}{2}\right) + AD \cdot \cos\left(\frac{AOD}{2}\right) =$$

$$= (BC + AD) \cdot \cos 30^\circ = \underline{\frac{7}{2} \cdot \sqrt{3}}$$

по т. Пифагора

$$BA^2 = BH_2^2 + AH_2^2 = \frac{49}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} = \frac{148}{4} = 37$$

$$S(TBA) = \frac{BA^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$$

$$S(ABCD) = S(BAD) + S(BCD) = \frac{1}{2} DA \cdot H_3H_4 + \frac{1}{2} BC \cdot H_3H_4 = \frac{7}{4}\sqrt{3} \cdot 7 =$$

$$= \frac{49}{4}\sqrt{3}.$$

$$\frac{S(TBA)}{S(ABCD)} = \frac{\frac{37\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{37}{49}$$

Ответ: $\frac{S(TBA)}{S(ABCD)} = \frac{37}{49}$

Черновик

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$x^2 - a$

$y^2 - b$

$\cancel{x^4+y^4-7x^2-7y^2}$

$a^2+b^2-7a-7b+2ab=30$

$(a+b)^2-7(a+b)=30$

$(a+b)(a+b-7)=30$

$a^2+(2b-7)a+(b^2-7b-30)=0$

$D=(2b-7)^2-4b^2+28b+120=$

$=4b^2-28b+49-4b^2+28b+120=169$

$a_{1,2}=\dfrac{-2b+7\pm 13}{2}$

$$\left[\begin{aligned} &a=-b+10, \\ &a=-b-3 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &a+b=10, \\ &a+b=-3. \end{aligned}\right. \\ 7a+7b-3ab=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &a+b=10, \\ &a+b=-3, \end{aligned}\right. \\ ab=\dfrac{7(a+b-1)}{3} \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} a+b=10 \\ \cancel{3ab=63}\ \cancel{ab=}\ ab=21, \end{cases} \\ &\begin{cases} a+b=-3, \\ \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$-7,5 \pm \dfrac{\sqrt{417}}{6}$

$(7,5)^2 + \dfrac{417}{36}$

$\cancel{3\cdot(9+}\ 27+\dfrac{417}{3}=28.4$

277139

$(10-b)b=21$

$10b-b^2-21=0$

$b^2-10b+21=0$

$D_1=\cancel{25}-\cancel{21}=\cancel{16}\ 4$

$\left[\begin{aligned} &b=\cancel{\tfrac{10+4}{2}}=\cancel{7},\ 5\pm 7 \\ &b=3 \end{aligned}\right.$

$\cancel{(-b-3)\cdot b}$

$\cancel{3\cdot(b+3)\cdot b+28}$

$3(-b-3)\cdot b=-28$

$\cancel{3b^2}\ 3(b+3)\cdot b-28=0$

$3b^2+9b-28=0$

$D=81$

$28 \times 4 = 112$

$139 + 27 \ldots$

28×12: 56, 28, 336

$336 + 81 = 417$

$417 : 3 = 139$

-3, 11, -9, 27, -27, 0

) D = 0

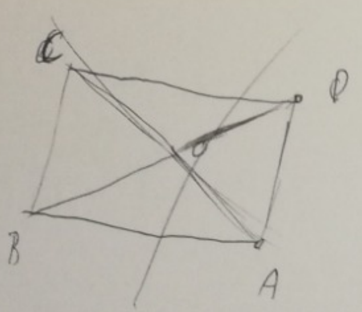
=

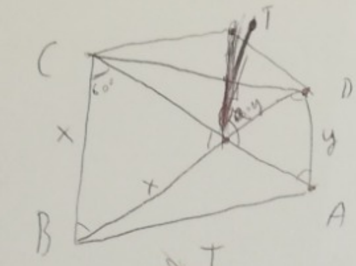
=)

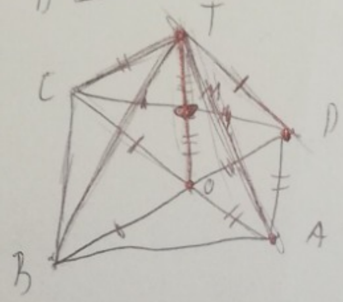
8 H

C

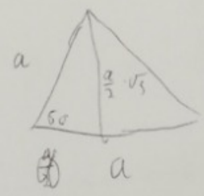
C







1 ; 1



$$\frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$49 \times 3 = 147$$

$$148 : 4 = 37$$
-12
28
-28
0

3. $\left(8 + \frac{417}{36}\right) = 28\cdot 4 = \cancel{162}\ 112$

$\cancel{417} : 4 = 104$

$27 + \frac{4176}{0}$ $\frac{1004}{}$ $\frac{417}{3} = 112$

$17 + 139$

$$417 : 3 = 139$$
-3
11
-9
27

3. $(-8\cdot 3)\cdot 8 = -28$