Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005802**

ID профиля: **819789**

Вариант 14

Задача 2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Без огр. общности положим, что a_1 - наименьшее, а a_n - наибольшее. Тогда:

$a_1 < a_2, \ldots, a_{n-1} < a_n$.

$$\begin{cases} 30a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 450, \\ a_1 + a_2 + \ldots + 14a_n = 450 \end{cases}$$

Вычтем из первого второе:

$30a_1 + a_2 + \ldots + a_n - a_1 - a_2 - \ldots - 14a_n = 0$

$a_2, \ldots, a_{n-1}$ - сократятся

$29a_1 - 13a_n = 0$

$29a_1 = 13a_n$

$a_n = \frac{29}{13}a_1$.

Т.к. $a_1, a_n \in N$, то $\min a_1 = 13$, $a_1 = 13n$ где $n \in N$.

При $a_1 = 13 \Rightarrow a_n = 29$. Подставим в первое:

$30 \cdot 13 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 29 = 450$

$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 450 - 390 - 29 = 31$.

Заметим, что $a_2, \ldots, a_{n-1}$ больше 13 и меньше 29. Если $n=4$ получаем: $a_2 + a_3 = 31$. $a_2 > 13$, поэтому перебираем с $a_2 = 14$. При $a_2 = 14$ $a_3 = 17$. При $a_2 = 15$ $a_3 = 16$. При $a_2 = 16$ получаем набор уже рассмотренный ранее, т.е. можно не продолжать.

Если $n=5$, то получаем $a_2 + a_3 + a_4 = 31$. Это невозможно, ибо $a_2, a_3, a_4 \geqslant 14$, а значит минимальное значение $a_2 + a_3 + a_4$ даже игнорируя условие о различности будет больше 31 ($14 \cdot 3 = 42$). При увеличении n минимальная сумма будет лишь расти, поэтому выше рассмотрены все возможные случаи. Для $a_1 = 13$.

При $a_1 = 26$ $a_n = 58$. Подставляем:

$30 \cdot 26 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 58 = 450$

$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 450 - 58 - 780 < 0$, что невозможно.

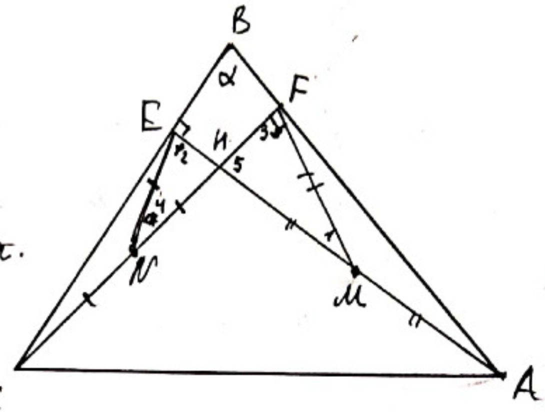
При увеличении a_1 сумма будет лишь расти, поэтому мы рассмотрели все случаи.

Ответ: $\{13, 14, 17, 29\}$, $\{13, 15, 16, 29\}$.

1

Чистовик Математика, 9 кл.

Задача №1. ~~Дано:~~



Решение: ~~пусть ∠ABC = α~~.

~~△CEH – Е прямой~~

~~EN – медиана к гип.~~

~~CN = NH = EN = 11~~

~~∠1 = ∠2, ∠3 = ∠4 как н/л при EN || FM, EN – сек.~~

~~△BEA ~ △HFA (по общему остр. ∠A)~~

1) $\triangle FMH$ – р/б, т.к. $HM = FM$ по св-у м, пров. к гип. в $\triangle HFA$
$\angle 3 = \angle 5$

2) $\angle 3 = \angle 4$ как н/л при $FM \parallel EN$, FN – сек.
$\angle 1 = \angle 2$ – тоже
$\triangle EHN \sim \triangle FHM$ (по двум углам).
$\angle 1 = \angle 4$. Но $\angle 4 = \angle 3 = \angle 5$, а зн. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 \Rightarrow \triangle FHM$ – р/ст.

3) $\triangle BEA \sim \triangle HFA$ (по общ. остр. углу $\angle A$).
$\angle FHA = \angle EBA$, но из п. 2 $\angle FHA = 60^\circ$ (по св. р/ст. $\triangle$).
$\angle EBA \equiv \angle ABC = 60^\circ$.

4) $CF = 11 + 11 + 2 = 24$
$AB = AF + FB$.
$AF = 4 \cdot \sin 60^\circ$ ($\triangle FHA$)
$AF = 2\sqrt{3}$.
$FB = \frac{FC}{tg 60^\circ} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$

$AB = 10\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{24 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 24 \cdot 5\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$.

5) $AC^2 = AF^2 + CF^2 = 12 + 288 = 400$
$AC = 20$

По т. синусов: $2R = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$
$R = \frac{40\sqrt{3}}{6} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$, $R = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

2

211005802 (U819789 M1273865)

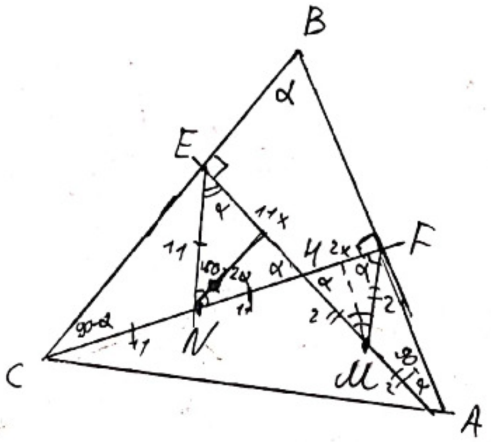
Черновик

3. $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=$

$=a^2(x-a)^2+a^2(y-1)^2-(a+3x)^2+9=a^2(x-a)^2+a^2(y-1)^2-((a+3x)^2-9)=$

$=a^2(x-a)^2+a^2(y-1)^2-(a+3x-3)(a+3x+3)$

1.



$CH=22$
$AH=4$

$\frac{CH}{CE}=\sin\alpha$

$CE=\frac{CH}{\sin\alpha}=\frac{22}{\sin\alpha}$

$AE\cdot CB=$
$=(4+11x)(22+2x)\cdot\sin\alpha$

$AB\cdot CF=(4+11x)\cdot\sin\alpha\cdot(22+2x)$

$\frac{x}{2}11=11\cos\alpha$

$\triangle FAM:$ $\frac{2x}{4}=\cos\alpha$

$x=2\cos\alpha$

$\frac{11x}{22}=\cos\alpha$

$\frac{4}{2x}=\cos\alpha$

$4=2x\cos\alpha$

$2x\cos\alpha=2$

$\cos\alpha=\frac{2}{x}$

$\frac{x}{2}=\cos\alpha$

$x=2\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{x}{2}.$

$\frac{x}{2}=\frac{2}{x}$ $4=x^2$ $x=2$

$AF=4\sin\alpha$

$FB=(BE+CE)\cos\alpha$

$BE=$

$\frac{4+11x}{AF+FB}=\sin\alpha$

2. $a_n=\frac{29}{13}a_1$

$a_1=13$ $a_n=29$

$a_1=26$ X

$390+29=419$

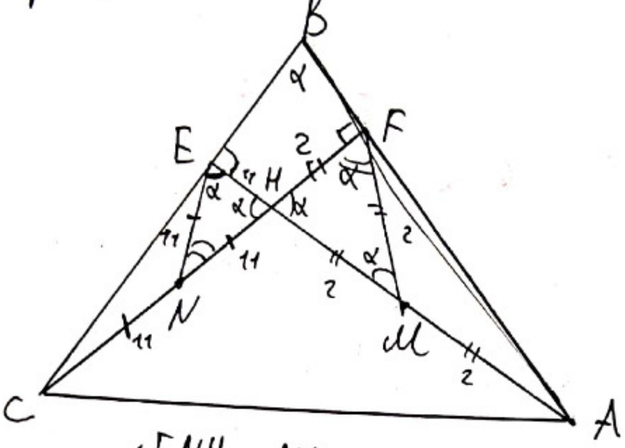
$a_2+\ldots+a_n=31$

$31=14+17$
$=15+16$

$\boxed{\begin{matrix}13 & 14\,17 & 29\\ 13 & 15\,16 & 29\end{matrix}}$

211005802 (U819789 M1273865)

Черновик



$\triangle ENH \sim \triangle MFH$

$\triangle CBF \sim \triangle ABE$

$\alpha = 60^\circ$.

$CF = 24$

$FH = M \cdot 2$

$FA = 2\sqrt{3}$

~~FB =~~

$tg\,\alpha = \frac{FC}{FB} \Rightarrow FB = \frac{FC}{\cos\alpha}$

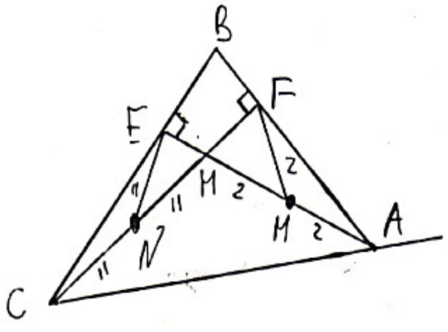
$AB = 10\sqrt{3}$

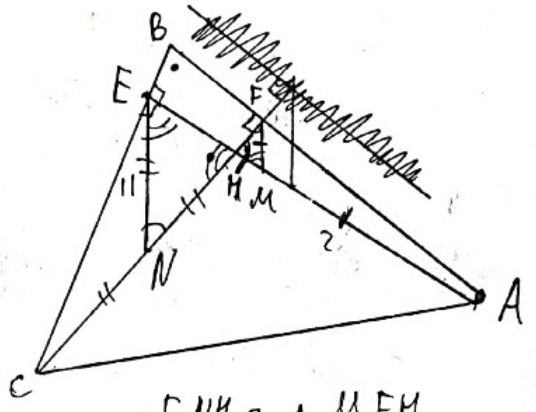
$FB = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$

211005802 (U819789 M1273865)

Черновик.

1)



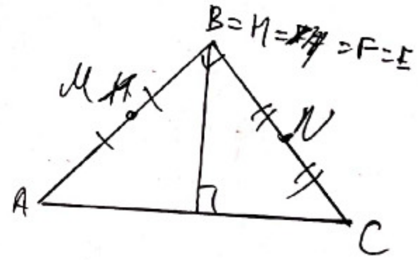


$\Delta ENH \sim \Delta MFH$

$k = \frac{11}{2}$

2) $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \in \mathbb{N}$

$a_i \neq a_j$



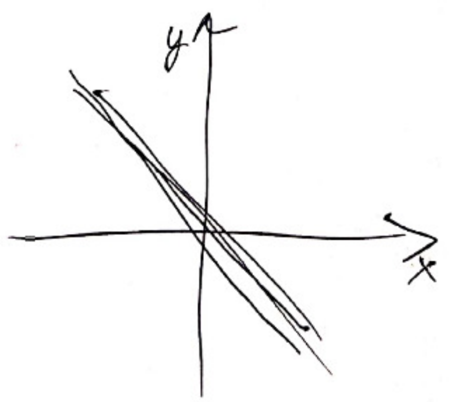
$$\begin{cases} 30a_1 + a_2 + \dots a_n = 450 \\ a_1 + a_2 + \dots + 14a_n = 450 \end{cases}$$

$29a_1 - 13a_n = 0$

$29a_1 = 13a_n$ $\quad a_1 \in \{13, 26, \dots\}$.

$a_n = \frac{29}{13} a_1$ $\quad a_n \in \{29, 58, 87, \dots\}$

3)



~~$2a^3 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$~~

$2a(a+x) + (x-y)^2 + y^2 = 0$

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$x(2a + x) + y(2y - 2x) + 2a^2$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$ Черновик

$\cancel{x^2+2ax-2xy+2y^2=-2a^2}$

$x^2+2ax+a^2+a^2-2xy+2y^2=0$

$(x+a)^2+a^2-2y(x+y)=0$

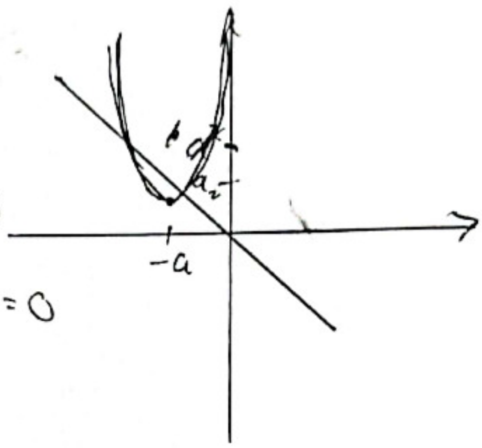
$(x+a)^2+a^2=2y(x+y)$

$(-a;a^2)$

$2y(x+y)=2xy+2y^2$

$2xy=-2y^2 \quad y=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-2y^2}{2y}=-y. \Rightarrow y=-x \\ y=0 \end{array}\right.$



$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$a^2x^2-6ax-2a^3x+a^2y^2-2a^2y+a^4+9=0$

$a^2x^2-2a^x(3\cancel{x}3+a^2).$

$a^2y^2-2a^2y+\cancel{a^4}+9=a^2(y^2-2y+1)-a^2+a^4+9=a^2(y-1)^2+a^4-a^2+9$

$a^2x^2-2a^3x-6ax=a(ax^2-2a^2x-6x)=ax(x-2a^2-6)$

$=a^2(x^2-2ax)-6ax=a^2(x^2-2ax+a^2)-a^4-6ax=a^2(x-a)^2-a^4-6ax$

$a^2(x-a)^2-a^4-6ax+a^2(y-1)^2+a^4-a^2+9=a^2(x-a)^2+a^2(y-1)^2-(a^2+6ax+9x^2)$

$+9x^2+9=a^2(x-a)^2+a^2(y-1)^2-(a+3x)^2+9=0$

$\cancel{a^2((x-a)^2+a^2(y-1)^2)-(a+3x)}$

$a^2(x^2-2ax+a^2)+a^2(y^2-2y+1)-(a^2+6ax+9x^2)+9x^2+9=$

$=a^2x^2-2a^3x+a^4+a^2y^2-2a^2y+a^2-a^2+6ax-9x^2+9x^2+9=$

$a^2(x-a)^2+a^2(y-1)^2-(a+3x)^2+9(x^2+1)=0$

$(a(x-a)-(a+3x))(a(x-a)+(a+3x))=(ax-a^2-a-3x)(ax-a^2+a+3x)=$

$=(x(a-3)-a(a+1))(x(a+3)-a(a-1)).$

$a^2(x^2-2ax+a^2)-(a^2-6ax+9x^2)+9x^2+9=$

$=\underline{a^2x^2}-2a^3x+a^4-a^2+\underline{6ax}-9x^2+9x^2+9$

$(a^2x^2+6ax+9x^2)+a^2(-2ax+a^2-1)-9x^2+9=$

$=(ax+3)^2-a^2(a-x)^2$

211005802 (U819789 M1273865)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005802**

ID профиля: **819789**

Вариант 14

Чистовик

Задача 4. $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7, \\ x^4+y^4-x^2y^2=37. \end{cases}$

$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2-x^2y^2=37. \end{cases}$

Замена: $u=x^2+y^2$, $v=x^2y^2$. $u, v \geqslant 0$, т.к. $x^2+y^2 \geqslant 0$ и $x^2y^2=(xy)^2 \geqslant 0$

$\begin{cases} 7u-3v=7, & (1) \\ u^2-3v=37 & (2) \end{cases}$

(1) − (2): $7u-3v-u^2+3v=-30$

$u^2-7u-30=0$

$D=49+4\cdot30=49+120=169=13^2$

$u=\frac{7\pm13}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-3 \\ u=10 \end{array}\right.$

$u=-3$ не подходит, ибо $u \geqslant 0$.

(1). $u=10$. $7\cdot10-3v=7$

$70-3v=7$

$3v=63$

$v=21$.

$\begin{cases} u=10 \\ v=21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^2y^2=21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=10-x^2, & (3) \\ x^2(10-x^2)=21. & (4) \end{cases}$

(4) $10x^2-x^4=21$

$x^4-10x^2+21=0$

$\frac{D}{4}=25-21=4=2^2$

$x^2=5\pm2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ x^2=7 \end{array}\right.$

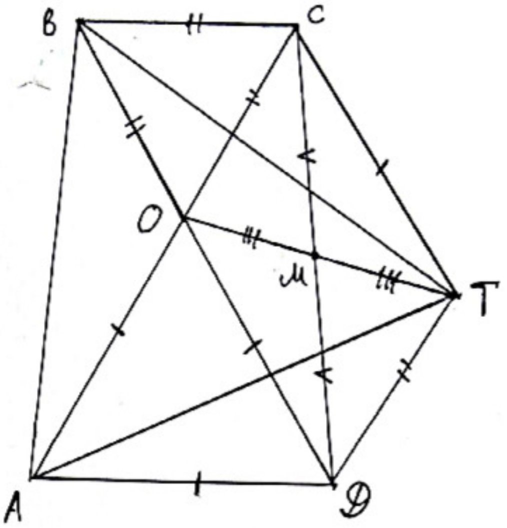
(3). 1 сл. $x^2=3$: $y^2=10-3=7$

2 сл. $x^2=7$: $y^2=10-7=3$.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{7} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(-\sqrt{3}; -\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{7})$, $(\sqrt{3}; -\sqrt{7})$, $(\sqrt{3}; \sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{7}; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{7}; \sqrt{3})$.

Задача 6.



1) $\triangle AOD$ – р/ст. $\Rightarrow \angle CAD = 60^\circ$

$\triangle BOC$ – р/ст. $\Rightarrow \angle BCA = 60^\circ$

$\angle CAD = \angle BCA = 60^\circ$ как накрест лежащие при AD и BC, AC – сек.

$AD \parallel BC$.

2) $\triangle AOB = \triangle DOC$ (по стороне и углу между ними)

$AO = OD$ ($\triangle AOD$ – р/ст.)

$BO = OC$ ($\triangle BOC$ – р/ст.)

$\angle O$ – верт.

$AB = CD$.

3) M – сер. CD. Тогда: $CM = MD$; $OM = MT$, т.к. T – симм. O отн. M.
Рассмотрим 4-хуг. $CODT$. CD и OT – диагонали, M – сер. CD и OT, причём $CD \cap OT = M$. Значит, диагонали точкой пересечения делятся пополам. $CODT$ – пар-м.

$CT = OD$

$DT = OC$.

$\angle OCT = \angle ODT$.

4) $\triangle BCT = \triangle TDA$ (по двум сторонам и углу между ними)

$AD = CT$ (т.к. $CT = OD$ из п.3)

$BC = DT$ (т.к. $DT = OC$ из п.3)

$\angle BCT = 60^\circ + \angle OCT = 60^\circ + \angle ODT = \angle ADT$ ($\angle OCT = \angle ODT$ из п.3)

$BT = AT$.

5) $\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$.

$\angle COD = \angle BOA$ – верт. $\Rightarrow \angle COD = 120^\circ$

В пар-ме $CODT$ $\angle COD = 120^\circ$. $\angle OCT = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\triangle ABO = \triangle TBC$ (по двум сторонам и углу).

$AO = CT$

$BC = BO$

$\angle BOA = 120^\circ$, $\angle BCT = 60^\circ + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

$AB = BT$, но $BT = AT \Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный, ч.т.д.

б) 6) $\triangle BCT$: $BC = 3$, $CT = AD = 4$, $\angle BCT = 120^\circ$.

т. кос.: $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT$

$BT^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 25 + 3 \cdot 4 = 37$.

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BT \cdot \sin\angle ABT = \frac{1}{2} BT^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BT^2\sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$.

2

7) $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + S_{ABO} + S_{CDO} = S_{AOD} + S_{BOC} + 2S_{ABO}$.

$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin 60^\circ = \frac{16\sqrt{3}}{4}$.

$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

Черновик

5. $15 \cdot A_{14}^2 = 15 \cdot 14 \cdot 13$

$\times 15 \cdot 14 = 60 + 15 = 210$

$\times 210 \cdot 13 = 63 + 21 = 2730$

6.

225

224

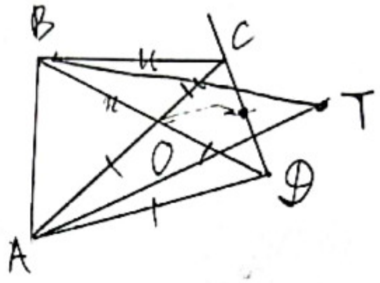
$2 \cdot 14 = 28$

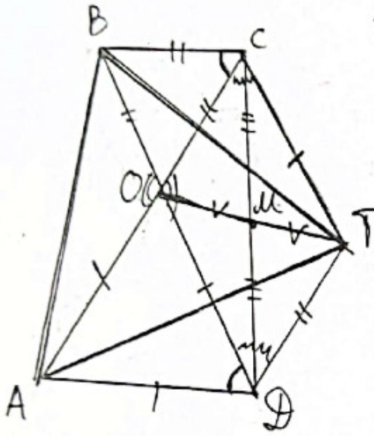
$\times 196 \cdot 15$: 970, 196, 2930

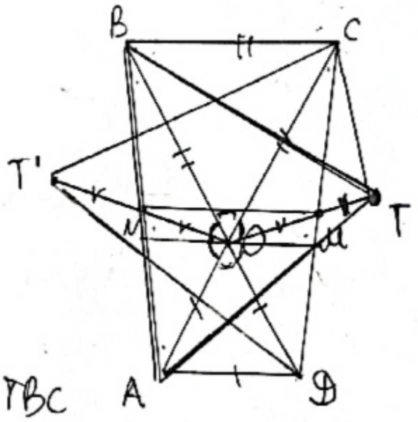
$\times 15 \cdot 13$: 45, 15, 165

$\times 13 \cdot 14$: 52, 13, 182

$\times 182 \cdot 15$: 910, 182, 2730







14

р/б трапеция

$\frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ABO = \triangle TBC$

CODT - пар-м

$MOD = MTC$

$MCO = MDT$

$S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + S$

$S_{ABT} =$

$\triangle ABO = \triangle CDT$

$\angle T = 120^\circ$ $\angle CTD = 120^\circ$

$\triangle BCT = \triangle TDA \Rightarrow AT = BT$ ABT - р/б

$\angle CTB = DAT$

$\triangle ABO = \triangle TBC \Rightarrow AB = BT \Rightarrow ABT$ - р/ст.

$AT^2 = a^2 + b^2 - 2ac \cdot \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + 2ac \cdot \cos 60^\circ$

$AT^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 25 + 4 \cdot 3 = 37$

$AT = \sqrt{37}$

$S_{ABT} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = 2S + \frac{16\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}}{4} + \frac{16\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\frac{37}{49}$

Черновик

4. $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7, \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$

$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3\cdot x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2 \cancel{+2} -2x^2y^2-x^2y^2=37 \end{cases}$

$u=x^2+y^2; \ v=x^2y^2$

$\begin{cases} 7u-3v=7 \\ u^2-3v=37 \end{cases} \downarrow -$

$7u-u^2=-30$

$u^2-7u\cancel{+}-30=0$

$D=49+4\cdot30=169$

$u=\frac{7\pm13}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-3 \\ u=10 \end{array}\right.$

$u=-3 \quad 21-3v=7$

$v=\frac{14}{3}$

$u=10 \quad \cancel{21} \ 70-3v=7$

$v=21$

1) $x^2+y^2=-3$ — не может.

2) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=10-x^2 \\ x^2(10-x^2)=21. \end{cases}$

$10x^2-x^4=21$

$x^4-10x^2+21=0$

$\frac{D}{4}=25-21=4=2^2$

$x^2=5\pm2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ x^2=7 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} y^2=7 \\ y^2=3 \end{array}$

$(-\sqrt{3};-\sqrt{7}), (-\sqrt{3};\sqrt{7}),$
$(\sqrt{3};-\sqrt{7}), (\sqrt{3};\sqrt{7}),$
$(-\sqrt{7};-\sqrt{3}), (-\sqrt{7};\sqrt{3}),$
$(\sqrt{7};-\sqrt{3}), ($

$(\pm\cancel{\sqrt{3}}),$.

211005802 (U819789 M1273866)

Чистовик

Математика, 9 кл.

Задача 6 (прод.).

7 (прод.). $S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin AOB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{16\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{12\sqrt{3}}{4} = \frac{(16+9+24)\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABT} : S_{ABCD} = \frac{37\sqrt{3}}{4} : \frac{49\sqrt{3}}{4} = 37 : 49.$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}.$

3

211005802 (U819789 M1273866)

Чистовик

Математика, 9 кл.

Задача 5. Допустим, мы уже вытащили дубль. Всего дублей 15. Так как никакое число не должно встретиться сразу на обеих карточках, осталось 14 чисел.

Количество карточек с 14 числами равно кол-ву сочетаний по 2 из 14, т.е. 14·13. ~~[illegible]~~. Это так, ибо карточки двухцветные.

Итого способов $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.

Ответ: 2730.

4