Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005590**

ID профиля: **802979**

Вариант 14

Чистовик. Задача 2. 1

Пусть эти числа, ~~где~~ $a_1, a_2, \dots a_n$, где n какое-то натуральное число. ~~Для~~ ясности возьмём $a_1, a_2, \dots a_n$ так, что $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ (так как все числа попарно различны.

$$\begin{cases} 30a_1 + a_2 + \dots a_n = 450 \\ a_1 + a_2 + \dots 14a_n = 450 \end{cases} \Rightarrow 29a_1 = 13a_n,$$ так как числа натуральные $\Rightarrow a_1 = 13k$ (где k тоже натуральное число), тогда $a_n = 29k$.

~~Так как $30a_1 + a_2 + \dots a_n = 450 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots a_n = 450 - 29a_1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots a_n$~~ ~~$a_1 + (a_1+1) + (a_1+2) + \dots a_n \geq 450 - 29a_1$~~

~~И $a_1 + (a_2+1) + \dots a_n \geq 450 - 13a_n$~~

~~$a_1 + (a_1+1) + \dots a_n = \frac{29k(29k+1)}{2} - \frac{13k(13k+1)}{2} = \frac{16\cdot 42k^2 + 42k}{2} \geq 450 - 13\cdot 29k \Leftrightarrow$~~

~~$8\cdot 42k^2 + 8k \geq 450 - 29\cdot 13k$~~

~~$8\cdot 42k^2 + 8k \geq 450 - 13\cdot 29k$~~ ~~$\Leftrightarrow 16\cdot 42k^2 + 42k \geq 900 - 754k \Leftrightarrow$~~

~~$16\cdot 37k^2 + 5\cdot 7\cdot 11k - 450 \geq 0$~~ ~~$16\cdot 42k^2 + 796k - 900 \geq 0$~~

~~$16\cdot 47$~~ ~~$672k^2 + 796k - 900 \geq 0$~~

~~450~~ $a_1 + a_2 + \dots a_n \geq 13k + 29k = 42k$

$450 = 30a_1 + a_2 + \dots a_n \geq$ ~~$29k + 13k$~~ $30\cdot 13k + 29k = 419k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 450 \geq 419k \Rightarrow \boxed{k=1} \Rightarrow a_1 = 13,\ a_2 = 29$

$13\cdot 30 + 29 + a_2 + \dots a_{n-1} = 450$

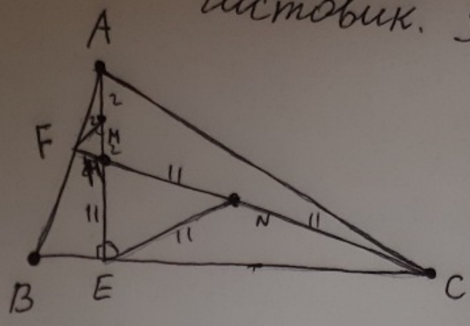
$a_2 + \dots a_{n-1} = 31$

$14 + 15 = 29$ $\quad a_2 \geq 14 \quad a_{n-1} \leq 29$

$\boxed{14 + 17 = 31}$ $\boxed{15 + 16 = 31}$

Ответ: 13, 14, 17, 29; 13, 15, 16, 29

Чистовик. Задача 1. 1



$FM \parallel EN$

Из $\triangle HEC \to \angle HEC = 90^\circ$, и $HN = NC \Rightarrow EN = NH = NC = 11$

Из $\triangle AHF \to \angle HFA = 90^\circ$ и $HM = MA \Rightarrow FM = HM = MA = 2$

$$FM \parallel EN \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\angle HEN = \angle HMF \\ \angle HNE = \angle HFM \\ \angle EHN = \angle FHM\end{array}\right. \Rightarrow \triangle FHM \sim \triangle EHN \Rightarrow \frac{FH}{HN} = \frac{FM}{EN}$$

$$\frac{FH}{11} = \frac{2}{11} \Rightarrow FH = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}FH = HM = MF \\ \triangle FHM \sim \triangle EHN\end{array}\right. \Rightarrow EH = HN = EN = 11$$

$2EM = MC \Rightarrow \angle ECM = 30^\circ$, так же $\angle BAE = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

$$EC = 22 \cdot \cos 30^\circ = 22 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 11\sqrt{3}$$

$$BE = tg 30^\circ \cdot (2+2+11) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 15 = 5\sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{3}(11+5) = 16\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{15 \cdot 16\sqrt{3}}{2} = 120\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \sin(\angle ABC) \cdot \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{16\sqrt{3} \cdot AB}{2} = 120\sqrt{3}$$

$$AB = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \qquad \angle AHC = 180 - 60 = 120^\circ$$

$$AC = \sqrt{EC^2 + AE^2} = \sqrt{3 \cdot 121 + 15^2} = \sqrt{363 + 225} = \sqrt{588} = 14\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3} \cdot 14\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3}}{4 \cdot 120\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\cancel{30} \cdot 17 \cdot 2 \cdot \cancel{16}}{\cancel{16} \cdot \cancel{30}} = 14$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$, $R = 14$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005590**

ID профиля: **802979**

Вариант 14

Чистовик, Задача 4. 1

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2=a \\ y^2=b \end{matrix} \quad \begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$(a+b)^2-3ab=37 \qquad a(7-3b)=7(1-b) \Rightarrow a=\frac{7-7b}{7-3b}=\frac{7b-7}{3b-7}$

$(a+b)^2-37=7(a+b)-7 \qquad (a+b)^2-7(a+b)=30 \qquad a+b=t=x^2+y^2\geq 0$

$t^2-7t-30=0 \qquad D=49+4\cdot 30=169 \qquad \sqrt{D}=13$

$t=\frac{\pm 7+13}{2} \; (t\geq 0) \Rightarrow t=10 \Leftrightarrow a+b=10$

$7(a+b)-7=3ab \Leftrightarrow 63=3ab \quad \begin{cases} ab=21 \\ a+b=10 \end{cases} \begin{pmatrix} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{pmatrix}$

Видно, что
$\Rightarrow a=3 \quad b=7 \quad (1)$
или $a=7 \quad b=3 \quad (2)$

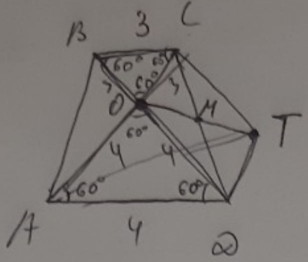
$$\boxed{\begin{matrix} x=\pm\sqrt{a} \\ y=\pm\sqrt{b} \end{matrix}}$$

(1) $x=\pm\sqrt{3}; \; y=\pm\sqrt{7}$

(2) $x=\pm\sqrt{7} \; y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(+\sqrt{3}; +\sqrt{7})$, $(+\sqrt{3}, -\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3}; +\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{7})$, $(+\sqrt{7}, +\sqrt{3})$, $(+\sqrt{7}; -\sqrt{3})$ $(-\sqrt{7}; +\sqrt{3})$ $(-\sqrt{7}; -\sqrt{3})$.

Чистовик. Задача 6. ①



$$\left.\begin{aligned} &\cancel{OA}\,CM = MD \\ &OM = MT \\ &\angle OMC = \angle DMT \\ &\angle OMD = \angle CMT \end{aligned}\right| \Rightarrow CT = OD;\ OC = DT \Rightarrow \Rightarrow OD \parallel CT;\ OC \parallel DT$$

$$DT \parallel AC \Rightarrow \angle ODT = \angle AOD = 60^\circ$$

$$\angle OCT = \angle ODT = 60^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{CT} = OD = \underline{AD} \\ &BD = AC \\ &\angle ACT = \angle BDA \end{aligned}\right| \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACT;\ AB = AT$$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{DT} = OC = \underline{BC} \\ &BD = AC \\ &\angle BDT = \angle ACB = 60^\circ \end{aligned}\right| \Rightarrow \triangle ABC = \triangle BDT;\ AB = BT$$

$$AB = BT = AT$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 120} = \sqrt{25 + 24\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{37}$$

$$S_{AOD} = \frac{4\cdot\sqrt{4^2 - 2^2}}{2} = 2\cdot\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

$$\cancel{P}_{ABT} = \frac{3\sqrt{37}}{2}$$

$$\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_{AOB} = 3\sqrt{3} \qquad S_{BOC} = \frac{3\cdot\sqrt{9 - \frac{9}{4}}}{2} = \frac{3\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

$$S_{AOB} = S_{COD}\ (\triangle AOB = \triangle COD) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{9}{4}\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot\frac{49}{4}$$

$$S_{ABT} = \sqrt{\frac{3\sqrt{37}}{2}\cdot\frac{\sqrt{37}}{2}\cdot\frac{\sqrt{37}}{2}\cdot\frac{\sqrt{37}}{2}} = \sqrt{\frac{3\cdot 37^2}{4^2}} = \frac{37}{4}\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{4}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{4}{49} = \frac{37}{49}$$

Чистовик. Задача 5 1

Всего есть $225 = 15^2$ различных карт, из них 15 дубли.

Если например на одной карте написано $(n; n)$, то на другой карточке не должно быть n. Всего вариантов может быть $15^2(15^2-1)$.

Если на одной два раза написано n, то другой ~~можно вы~~ можно выбрать 14^2 способами.

$\frac{14^2 \cdot 15}{15^2 \cdot (15^2-1)}$