Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

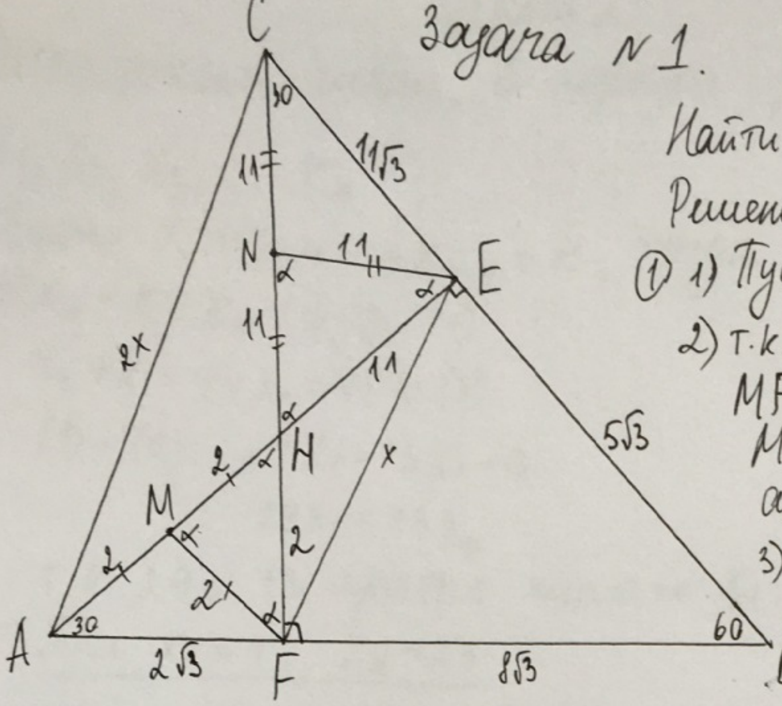
Шифр: **211005572**

ID профиля: **348684**

Вариант 14

Чистовик. 9 класс, математика

Задача №1.



Найти: $\angle ABC$-? ; S_{ABC}-? ; R_{ABC}-?

Решение:

① 1) Пусть $\angle MHF = \alpha$, тогда $\angle NHE = \alpha$ (верт.)

2) т.к. $AM = MH$ и $\angle AFH = 90 \Rightarrow$ MF - медиана в прям-ном $\Delta \Rightarrow$ $MF = AM = MH = 2$

аналогично для ΔNEH ($NE = NH = 11$)

3) т.к. $MH = FM \Rightarrow \angle HFM = \alpha$

аналогично для $\angle NEH = \alpha$

4) т.к. $FM \parallel EN \Rightarrow \angle NEH = \angle HMF = \alpha$

аналогично для $\angle MFH = \angle HNE = \alpha$

5) $180 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 60$, значит ΔMHF и ΔHNE - р/ст.

6) в ΔAHF: $\angle A = 180 - 90 - 60 = 30°$

7) в ΔAEB: $\angle B = 180 - 90 - 30 = 60° \Rightarrow \angle ABC = 60°$

② 8) в ΔAEB по ① синусов: $\frac{AE}{\sin 60°} = \frac{EB}{\sin 30}$

$\frac{2+2+11}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{EB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow EB = 5\sqrt{3}$

9) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot CB = \frac{1}{2}(2+2\cdot 11)\cdot(11\sqrt{3}+5\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16\sqrt{3} = \underline{120\sqrt{3}}$

③ 10) ~~$\Delta FB \sim \Delta ACB$ (т.к. ΔEFB построен (на высотах) Значит $\frac{AC}{AE} =$~~

10) в ΔCFB по ① синусов: $\frac{CB}{\sin 90} = \frac{FB}{\sin 30} \Rightarrow FB = 8\sqrt{3}$

11) в ΔEFB по ① косинусов: $EF^2 = EB^2 + FB^2 - 2EB\cdot FB\cdot \cos 60°$

$EF^2 = 25\cdot 3 + 64\cdot 3 - 2\cdot 5\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$

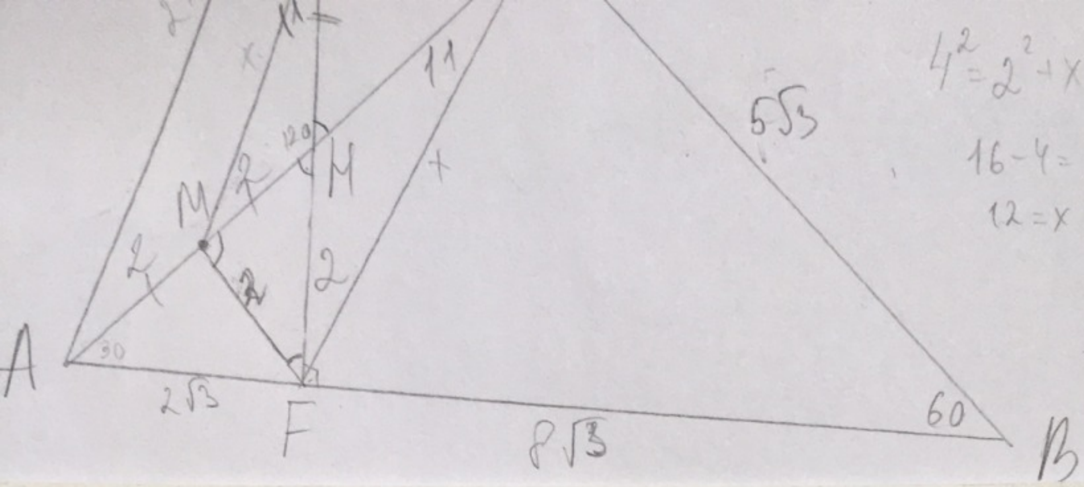
$EF = 7\sqrt{3}$

12) $\angle CHA = \angle EHF$; $\frac{CH}{HE} = \frac{AH}{HF} = 2 \Rightarrow \Delta CHA \sim \Delta EHF \Rightarrow \frac{CA}{EF} = 2 \Rightarrow AC = 14\sqrt{3}$

13) по ① синусов в ΔABC: $\frac{AC}{\sin 60°} = 2R$

$\frac{14\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow \underline{R = 14}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$; $R = 14$



$4^2=2^2+x^2$

$16-4=x^2$

$12=x$

$\frac{11}{\frac{1}{2}}=\frac{CE}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$A(x,y)$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$ Окр с y в т. B

$\cancel{(a+x)^2+a^2+2y^2-2xy=0}$ $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6xa-2a^2y+a^4 9=0$

$\cancel{(a+x)^2+a^2}$ $=x^2+x(2a-2y)+2y^2$

$D=4x^2-4(2a^2+2ax+x^2)\cdot 2=4x^2-16a^2-16ax-8x^2=$

$=-16a^2-16ax-4x^2=-4(4a^2+4ax+x^2)=-4(2a+x)^2$

$D=(2a-2y)^2-4(2y^2+2a^2)=4a^2-8ay+4y^2-8y^2-8a^2$

$=-4a^2-4y^2-8ay=-4(a^2+y^2+2ay)=-4(a+y)^2$

Чистовик

9 класс, матем.

Задача 2.

Расположим числа в порядке ~~в~~ возрастания:

$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$

Пусть $x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = k$, тогда

$30x_1 + k + x_n = 450$ (1)

$x_1 + k + 14x_n = 450$ (2)

(1) – (2): $29x_1 - 13x_n = 0$

$29x_1 = 13x_n$

т.к. 29 и 13 простые числа $\Rightarrow x_1 \vdots 13$, $x_n \vdots 29$

При $x_1 = 13$, $x_n = 29$:

$$\begin{cases} 30 \cdot 13 + k + 29 = 450 \Rightarrow k = 31 \\ 13 + k + 29 \cdot 14 = 450 \Rightarrow k = 31 \end{cases}$$

т.к. числа были расположены в порядке возрастания $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ числа, составляющие k, меньше 29 и больше 13.

В k входят больше одного числа (т.к. $31 > 29$)

И не больше 2х, т.к. если будет 3 или более, то какое-то из чисел будет меньше ср. арифм. ($\frac{31}{n} < 13$, где $n \geq 3$)

Значит чисел 2.

Это пары 14 и 17 и 15 и 16.

Других пар невозможно т.к. при увеличение одного числа уменьшается другое.

При $x_1 = 26$, $x_n = 29$

$$\begin{array}{r} \times\ 26 \\ 30 \\ \hline 780 \end{array} > 450 \Rightarrow$$ единственные x_1 и x_n это 13 и 29 соотвественно

Потому, что при других ~~про~~ x_1 и x_n их произведение на ~~13~~ 30 и 14 соотв. больше чем 450.

Ответ: 13; 14; 17; 29

13; 15; 16; 29

Чистовик 9 класс, математика

Задача №3.

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$D = 4x^2-4(2a^2+2ax+x^2)2 = 4x^2-16x^2-16ax-8x^2 = -16a^2-16ax-4x^2 =$

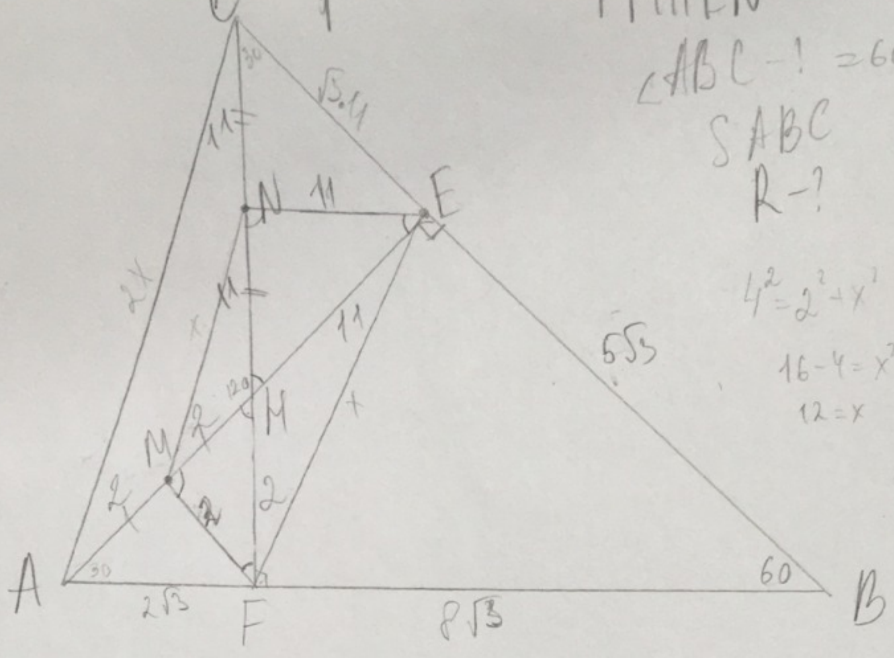
$= -4(2a+x)^2 \leq 0$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$, $a^4+9 = R^2$

$(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=R^2$

$(x_B; y_B)$ - координаты точки B.

Черновик



FM ∥ EN

∠ABC − ! = 60°

S ABC

R − ?

$4^2 = 2^2 + x^2$

$16 - 4 = x^2$

$12 = x$

$\frac{AE}{\sin 60} = \frac{EB}{\sin 30}$

$\frac{2+2+11}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{EB}{\frac{1}{2}}$

$\frac{15}{\sqrt{3}} = EB$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot CB$

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \left(11\sqrt{3} + \frac{15}{\sqrt{3}}\right) = \frac{15}{2} \cdot \left(11\sqrt{3} + \frac{15\sqrt{3}}{3}\right)$

$= \frac{15}{2} \cdot (11\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) = 16\sqrt{3} \cdot \frac{15}{2} = 8 \cdot 15 \cdot \sqrt{3} = 120\sqrt{3}$

$\frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$

$\frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{FB}{\frac{1}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16\sqrt{3} = 15 \cdot 8\sqrt{3}$

$64 \times 3 = 192$

$15 \times 8 = 120$

$40 \times 3 = 120$

75

$75 + 192 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3$

$192 + 75 = 267$

$267 - 120 = 147$

$\frac{14\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$= 2R$

$x_1, x_2, \dots x_n$ Черновик

какие числа?

$30x_1 + x_2 + \dots + x_n = 450$

$x_2, x_3, \dots x_{n-1} = k$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n \cdot 14 = 450$

$30x_1 + k + x_n = 450$

$-\ x_1 + k + 14x_n = 450$

$29x_1 - 13x_n = 0$

$29x_1 = 13x_n$

$x_1 = \frac{13}{29}x_n$

$x_n \vdots 29$

$x_1 \vdots 13$

$\frac{13}{29}x_n \cdot 30 + k + x_n = 450$

$x_n\left(\frac{30\cdot13}{29}+1\right) + k = 450 \quad k = 450 - x_n\left(\frac{13\cdot30}{29}+1\right)$

$\frac{13}{29}x_n + 450 - x_n\left(\frac{13\cdot30}{29}+1\right) + 14x_n = 450$

$30\cdot\frac{13}{29}x_n + k + x_n = 450 \Rightarrow k = 450 - x_n - x_n\cdot30\frac{13}{29}$

$\frac{13}{29}\cdot x_n + k + 14\cdot x_n = 450 \Rightarrow k = 450 - \frac{13}{29}x_n - 14x_n$

$2k = 900 - x_n\left(1 + 30\frac{13}{29}\right)$

$\frac{13}{29}x_n + k + x_n = 450 - 14x_n + x_n = 450 - 13x_n$

$60 - 29 = 31$

$\frac{13+29}{2} \cdot 15$

$21 \cdot 15 = 105 + 210 = 315$

$29 \cdot 14 = 116 + 29 = 406$

$13 \cdot 29$

$26 \cdot 30 = 780$

$13 \cdot 30 = 390$

$390 + k + x_n = 450$

$k + x_n = 60$

$k = 31$

$29 \cdot 14 = 406$

$44 = k + x_1$

$44 - 13 = 31$

$k = 31$

$31 - 14 = 17$

$31 - 15 = 16$

14; 17

15, 16

$+29$

211005572 (U348684 M1278144)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005572**

ID профиля: **348684**

Вариант 14

Вариант 14 9кл., матем.

Чистовик.

№ 4.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \ (1) \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \ (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $x^4+y^4-x^2y^2+3x^2y^2-7x^2-7y^2=30$

$(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=30$

Замена: $x^2+y^2=t$

$t^2-7t=30$

$D=49+4\cdot30=13^2$

$t_1=\frac{7-13}{2}=-3$ (не подходит, т.к. $x^2\geq0$, $y^2\geq0$)

$t_2=\frac{7+13}{2}=10$

(1) $7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7$

$7\cdot10-3\cdot x^2y^2=7$

$-3x^2y^2=-9\cdot7$

$$\begin{cases} x^2y^2=21 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=\frac{21}{y^2} \\ \frac{21}{y^2}+y^2=10 \,|\cdot y^2 \end{cases}$$

$21+y^4-10y^2=0$

$D=100-4\cdot21=16$

$y_1^2=\frac{10-4}{2}=3 \Rightarrow x_1^2=7$

$y_2^2=\frac{10+4}{2}=7 \Rightarrow x_2^2=3$

Ответ: $(-\sqrt7;-\sqrt3)$; $(\sqrt7;\sqrt3)$ $(-\sqrt7;\sqrt3)$ $(\sqrt7;-\sqrt3)$
$(-\sqrt3;-\sqrt7)$ $(\sqrt3;\sqrt7)$ $(-\sqrt3;\sqrt7)$ $(\sqrt3;-\sqrt7)$

Чистовик

9 кл, матем.

Вариант 14

№5.

~~Т.к. все карточки различны~~

Пусть фокусник сначала вытягивает дубль. Это он может сделать 15 способами (т.к. все карточки различны и все чисел 15)

Далее заметим, что у нас всего записано $15^2 \cdot 2$ чисел (15^2 карточек и у каждой числа с двух сторон).

Т.к. каждое число повторяется одинаковое количество раз, то ~~одно число~~ число, выпавшее на дубле, будет присутствовать $\frac{15^2 \cdot 2}{15} = 15 \cdot 2 = 30$ раз

Но т.к. из этих 30 раз 2 ~~раз~~ фокусник вытянул на дубле $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ среди оставшихся карточек только 28 с числом, выпавшем на дубле.

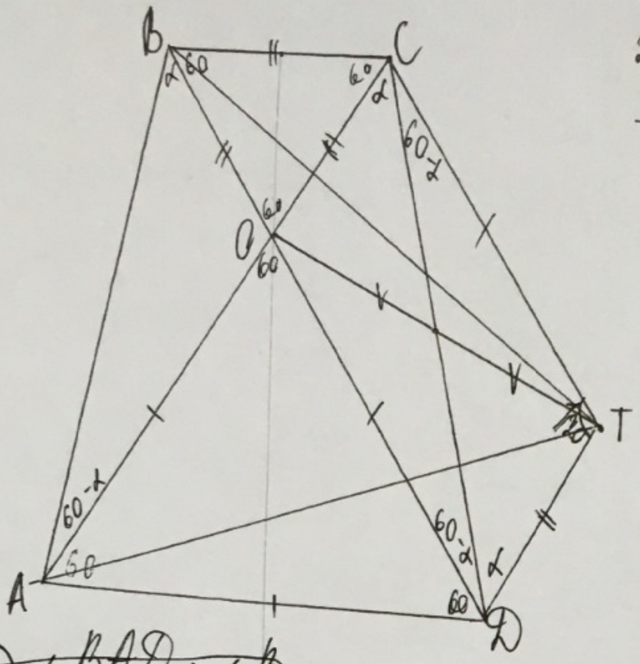
Итого получаем $15 \cdot (15^2 - 28) = 2955$ вариантов.

Ответ: 2955 вариантов.

Вариант 4. 9 кл., матем.

Чистовик

№6(а)



1) $\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$ (AC – секущ.)

2) $\angle BOA = \angle COD = 180 - 60 = 120$ (вертик.)

3) $BO = OC$ (т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – р/ст) $OA = OD$, $\angle BOA = \angle COD$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle OCD \Rightarrow BA = DC$

4) Из п. 1) и 3) $\Rightarrow ABCD$ – р/б трапеция ($AD \parallel BC$)

5) т.к. T симметр. отн. CD $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OCD = \triangle TCD$ ($CT = OD$; $OC = TD$)

6) Пусть $\angle ABO = \alpha$, тогда $\angle OCD = \alpha$; $\angle CDT = \alpha$

$\angle BAO = 180 - 120 - \alpha = 60 - \alpha$

$\angle ODC = \angle DCT = 60 - \alpha$

~~7) $\angle BAD + \angle B$~~

7) $\angle CAD + \angle CTD = 60 + 120 = 180 \Rightarrow$ т. $ACTD \in$ одной окруж.

8) Из п. 4) $\Rightarrow$ около трапеции можно описать окруж.

9) Из п. 7) и 8) $\Rightarrow ABCDT$ лежат на одной окруж.

10) $\angle BDT = \alpha + 60 - \alpha = 60$

$\angle BAT = \angle BDT = 60$ (т.к. опир. на BT)

11) $\angle ACT = \alpha + 60 - \alpha = 60$

$\angle ABT = \angle ACT = 60$ (т.к. опир. на AT)

12) в $\triangle ABT$: $\angle A = 60$; $\angle B = 60 \Rightarrow \angle T = 180 - 2 \cdot 60 = 60$

$\Rightarrow \triangle ABT$ – р/ст.

ч.т.д.

211005572 (U348684 M1278145)

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \Rightarrow a(7-3b)=7-7b \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$a=\frac{7-7b}{7-3b}=1+\frac{4b}{7-3b}$

$\left(\frac{7-7b}{7-3b}\right)^2+b^2-\frac{7-7b}{7-3b}\cdot b=37$

$\frac{49+49b^2-98b}{49+9b^2-42}+b^2-\frac{7b^2-7b}{7-3b}=37$

$\frac{49+49b^2-98b+b^2}{49+9b^2-42}$ $D=b^2-4\cdot(b^2-37)$

$a^2+b^2-ab-7a-7b+3ab=37-7$

$a^2+b^2+2ab-7a-7b=30$

$(a+b)^2-7(a+b)=30$ $z^2-7z-30=0$

$z^2-7z=30$

$D=1+74\cdot30=35=29^2$

$z_1=\frac{7-29}{2}=-11$

$z_2=\frac{7+29}{2}=18$

$x^2+y^2=-11$

$\boxed{10}$

$x^4+y^4-x^2y^2-7x^2-7y^2+3x^2y^2=37-7$

$x^4+y^4+2x^2y^2-7(x^2+y^2)=30$

$7\cdot10-3x^2y^2=7$

$-3x^2y^2=-7\cdot9$

$$\begin{cases} x^2y^2=7\cdot3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{21}{y^2} \end{cases}$$

$\frac{21}{y^2}+y^2=10 \mid \cdot y^2$

$21+y^4-10y^2=0$

$D=100-4\cdot21=16$

$y_1^2=\frac{10-16}{2}=-2$

$y_2^2=\frac{10+16}{2}=13$

$7;3$

$3;7$

$\frac{10-4}{2}=2$

$\frac{-100}{84}$
$\frac{}{16}$

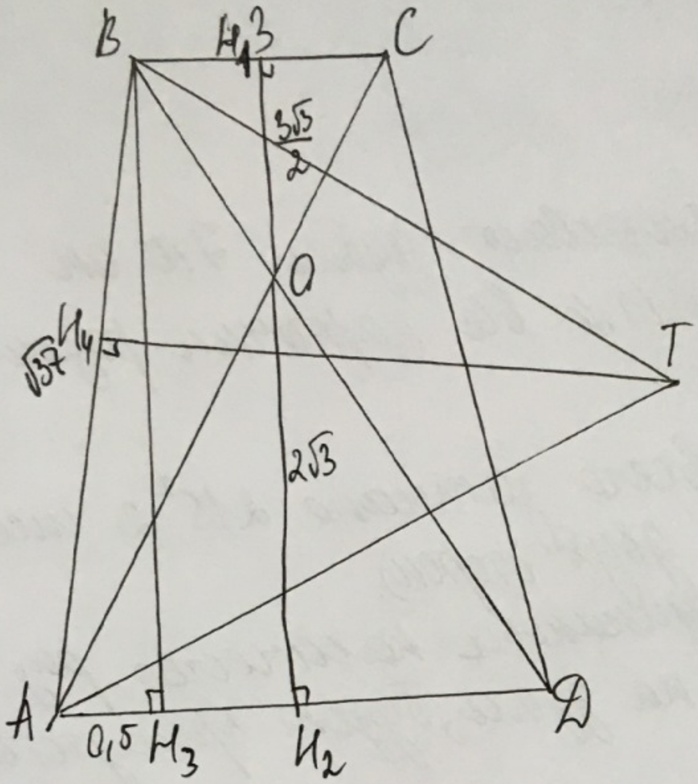
$49+120=189$

17×17: $119+170=289$

$84+16=100$

211005572 (U348684 M1278145)

Чистовик



№6.(б) Вариант 14.

1) в $\triangle H_1CO$: $\sin 60^\circ = \frac{H_1O}{OC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H_1O}{3}$

$\Rightarrow H_1O = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

2) аналогично для $\triangle DOH_2$:

$OH_2 = 2\sqrt{3}$

3) $S_{ABCD} = \frac{AD \cdot BC}{2} \cdot H_1H_2 =$

$= \frac{3+4}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\right) = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

4) в $\triangle ABH_3$ по Т. Пифагора

$AB^2 = AH_3^2 + H_3B^2$

5) $AH_3 = \frac{AD - BC}{2} = 0,5$

$AB^2 = 37$

6) $\sin\angle H_4AT = \frac{H_4T}{AT}$

т. к. $\triangle ABT$ – р/ст $\Rightarrow$ $\sin 60 = \frac{H_4T}{\sqrt{37}} \Rightarrow H_4T = \frac{\sqrt{111}}{2}$

7) $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot H_4T \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{111}}{2} \cdot \sqrt{37} = \frac{37 \cdot \sqrt{3}}{4}$

8) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{49\sqrt{3}} = \frac{37}{49}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$

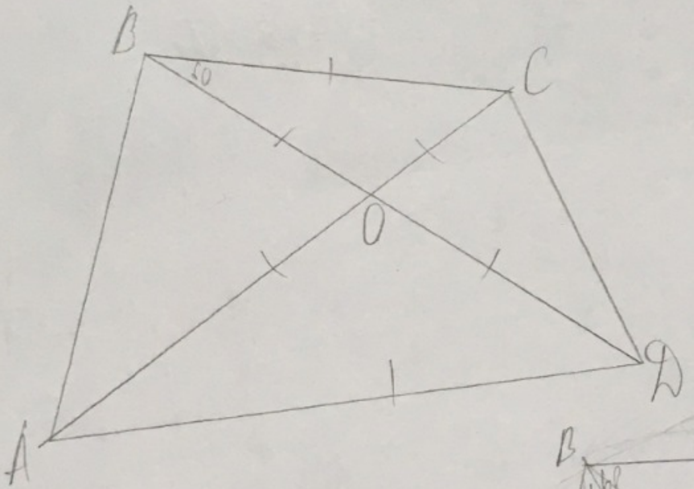
15 цифр ... от 1 до 15
Хотя бы один дубль, т.е. число не встреч одновр на обеих
ск способ?

15^2

C_{15}^1 $\quad 15(225 - 2\cdot 15 + 1)$

$1\ (2\cdot 15 - 1)$

$$\begin{array}{r} 226 \\ -\ 30 \\ \hline 196 \\ \times\ 15 \\ \hline 980 \\ +\ 1960 \\ \hline \boxed{2940} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ -\ 28 \\ \hline 197 \\ \times\ 15 \\ \hline 985 \\ +\ 1970 \\ \hline 2955 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \\ \times\ 3 \\ \hline 111 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 3 \\ \hline 147 \end{array} \qquad 148 \mid 4 = 37$$

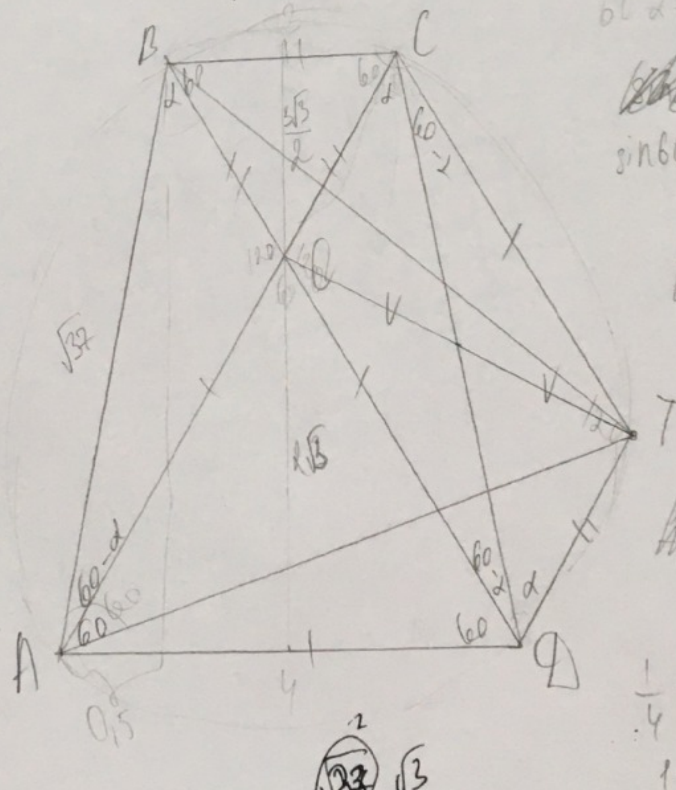
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{147}{\sqrt{37}}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$180 - 120 - \alpha =$

$\alpha + 60 - \alpha + 60 - \alpha + \alpha + 60 =$

$60\ \alpha + \alpha + 60$



$\sin 60 = \frac{h}{3}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2} = h$

$\frac{16\cdot 3}{4} + 4 = 16$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\right)^2 = x^2$

$\frac{1}{4} + \left(\frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x^2$

$\frac{1}{4} + \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x^2$

$\frac{1 + 49 \cdot 3}{4} = x^2$

$\frac{37^2\sqrt{3}}{4}$

211005572 (U348684 M1278145)