Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005467**

ID профиля: **885326**

Вариант 14

$\frac{a^2+3}{a} > 4 > -2a$

$a^2+3 > 4a$

$a^2-4a+3>0$

$(a-1)(a-3)>0$

$a^2+3 < 4a$

$(a-1)(a-3) < 0$

$a > 3$

$a < 1$

$4 > -2a$

$2 > -a$

$a > 0$ $a > -2$

$a \in$

~~$a \in (-2, 1) \cup (3, +\infty)$~~

$\frac{a^2+3}{a} < 4 < -2a$

$a \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$

$1 < a < 3$ (?:) $a < -2$

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \cancel{y}\right)^2 + \frac{x^2}{2} = 0$

$x = 0$

$y = 0$

211005467 (U885326 M1273247)

МАТЕМАТИКА, 9 КЛАСС

ЧИСТОВИК

ЛИСТ 2/2

4

$2^\circ)$ $a, x < y < b,$

$-2a < y < \frac{a^2+3}{a}$

$1^\circ\ a>0$ $\quad a^2+3>4a \Rightarrow (a-3)(a-1)>0 \Rightarrow a\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

$-2a<4 \Rightarrow a\overset{?}{>}-2$ верно, т.к. $a>0$ $\quad a\in(0,1)\cup(3,+\infty)$

$2^\circ\ a<0$

$4a>a^2+3 \Rightarrow (a-3)(a-1)<0 \Rightarrow a\in(1,3) \Rightarrow a\in\varnothing$ т.к. $a<0$.

$-2a<4 \Rightarrow a\overset{?}{<}-2$

Значит подходят: $a\in(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$

Очевидно, что все эти ответы подходят, т.к. рассуждения равносильны в обе стороны.

Ответ: $(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$

211005467 (U885326 M1273247)

ЛИСТ 1/2

№3 ЧИСТОВИК

МАТЕМАТИКА, 9 КЛАСС

Пусть (a_1, a_2) – координаты A,

(b_1, b_2) – координаты B.

3

$$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$$

$$2a^2+2ax+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}-2xy+2y^2=0$$

$$\left(\sqrt{2}a+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}y\right)^2=0$$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{2}a+\frac{x}{\sqrt{2}}=0 &\Rightarrow x=-2a\\ \frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}y=0 &\Rightarrow x=2y\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x&=-2a\\ y&=-a\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}a_1&=-2a\\ a_2&=-a\end{aligned}$$

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$$

$a \neq 0$, иначе $9=0$ (?!)

$\Downarrow$

$\cancel{(xa-a^2-3)^2}$

$$a^2x^2-2xa(a^2+3)+(a^2+3)^2+a^2y^2-2aay+a^2-7a^2=0$$

$$(ax-a^2-3)^2+(ay-a)^2-7a^2=0$$

$$(ax-a^2-3)^2+(ay-a)^2=7a^2 \quad (\text{т.к. } a\neq 0 \text{ можно сократить})$$

$$\left(x-\frac{a^2+3}{a}\right)^2+(y-1)^2=7$$ – точки, расстояние которых до точки $\left(\frac{a^2+3}{a}, 1\right)$ равно $\sqrt{7}$ (по т. Пифагора)

$\Downarrow$

$$b_1=\frac{a^2+3}{a}$$

$$b_2=1$$

A и B лежат по разные стороны от $x=4 \Rightarrow \left[\begin{aligned}a_1>4>b_1\\ a_1<4<b_1\end{aligned}\right.$

1^0) $a_1>4>b_1$

$$-2a>4>\frac{a^2+3}{a}$$

1^0) $a>0 \Rightarrow 4a>a^2+3 \Rightarrow a^2-4a+3<0$

$(a-3)(a-1)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a\in(1,3)$

$-2a>4 \Rightarrow a<-2$ (?!) т.к. $a>0$

2^0) $a<0 \Rightarrow a^2+3<4a \Rightarrow a^2-4a+3>0 \Rightarrow (a-3)(a-1)>0$

$\Downarrow$

$a\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

$-2a>4 \Rightarrow a<-2 \Rightarrow a\in(-\infty,-2)$

211005467 (U885326 M1273247)

Лист 1/1 №2 Чистовик МАТЕМАТИКА, 9 класс

(2)

Пусть $a_1, \dots, a_n$ - нат. числа

Тогда

$$\begin{cases} 30a_1 + a_2 + \dots + a_n = 450 \\ a_1 + \dots + a_{n-1} + 14a_n = 450 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$29a_1 - 13a_n = 0$

$29a_1 = 13a_n$

Числа натуральны $\Rightarrow 29a_1 \,\vdots\, 13a_n \Rightarrow 29a_1 \,\vdots\, 13$, но $(29, 13) = 1 \Rightarrow a_1 \,\vdots\, 13$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} a_1 = 13 \\ a_1 \geq 26 \end{array} \right.$

$1^0)$ $a_1 \geq 26 \Rightarrow 30a_1 = 780 > 450$?!

$2^0)$ $a_1 = 13$

т.к. $13a_n \,\vdots\, 29a_1 \Rightarrow 13a_n \,\vdots\, 29$, но $(13, 29) = 1 \Rightarrow a_n \,\vdots\, 29$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} a_n = 29 \\ a_n \geq 58 \end{array} \right.$

$1^0)$ $a_n \geq 58 \Rightarrow 14a_n = 14 \cdot 58 > 50 \cdot 10 = 500 > 450$?!

2^0 $a_n = 29$

$\Downarrow$

$30a_1 + a_n = 30 \cdot 13 + 29 = 390 + 29 = 419 \Rightarrow a_2 + \dots + a_{n-1} = 31$, причём

$13 < a_2, \dots, a_{n-1} < 29$
(т.к. они $> a_1$) (т.к. они $< a_n$)

1^0 $n \geq 5 \Rightarrow a_2 + \dots + a_{n-1} \geq 13 \cdot 3 = 39 > 31$?!

2^0 $n \leq 3 \Rightarrow a_2 + \dots + a_{n-1} \leq 29 \cdot 1 = 29 < 31$?!

3^0 $n = 4 \Rightarrow a_2 + a_3 = 31 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_2 = 14, a_3 = 17 \\ a_2 = 15, a_3 = 16 \end{array} \right.$ (если $a_2 > 15$, то $a_3 < a_2$; если $a_2 < 14$, то ?!)

$\Downarrow$

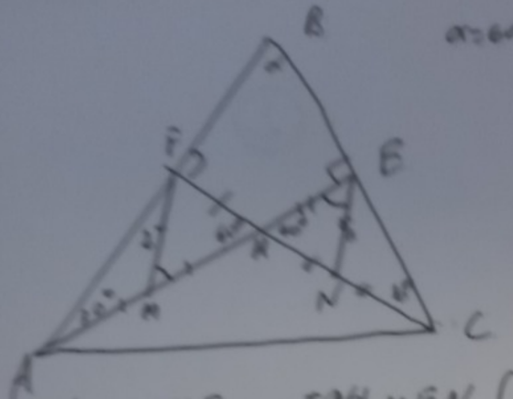
Ответ: либо $\{13, 14, 17, 29\}$, либо $\{13, 15, 16, 29\}$

211005467 (U885326 M1273247)

Лист 3/1 №1. чистовик Математика, 9 класс

(1)

$\alpha = 60^\circ$



1) $\angle EMF = \angle \cancel{FNH}\, MEN$ (накрест лежащие)

2) ΔAFH, ΔHEC – прямоугольные $\Rightarrow$ $FM = AM = MH$, $EN = HN = NC$ (медиана в прямоуг. треуг. равна половине гипотенузы)

3) $\angle MFH = \angle MAF$ (из 2)

ΔMHF, ΔHNE – равнобед.

4) из 3 следует, что $\underset{(из\ 1)}{\angle MFH} = \underset{(очев.)}{\angle MHF} = \underset{(из\ 3)}{\angle NHE} = \underset{(из\ 1)}{\angle NEH} = \angle FMH \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta FMH$ – равносторонний, аналогично ΔHNE – равносторонний

5) $HE = NE$, $HF = MH$ (из 4)

6) $\angle \cancel{MAF} = \angle AHC = 90^\circ - \angle BAE = 90^\circ - 90^\circ + \angle FMA = \angle FHA = 60^\circ$ (из 4)

7) $AB = \frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{AM+MH+HE}{\sin\alpha} = \frac{2FM+NE}{\sin\alpha} = \frac{4+11}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

8) $BC = \frac{FC}{\sin\alpha} = \frac{FH+HN+NC}{\sin\alpha} = \frac{2EN+FH}{\sin\alpha} = \frac{22+2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{48}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}$

9) $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{160 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 120\sqrt{3}$

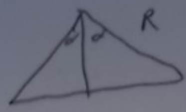
10) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cos\alpha \cdot AB \cdot BC \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2\cos\alpha \cdot AB \cdot BC} = \sqrt{300+768-480} =$

$= \sqrt{588} = \sqrt{3} \cdot 14$

11) $\cancel{2\sin\alpha}$ $AC = 2\sin\alpha \cdot R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3} \cdot 14}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2} = 14$

Ответ: 60°, $16\sqrt{3}$, 14.

Ответы: 60°, $120\sqrt{3}$, 14 черновик



$a_1, \ldots, a_n$

$2\sin\alpha \cdot R$

$\sqrt{3}\cdot R = AC$

$\alpha - ?$

$S_{ABC} - ?$

$R - ?$

$R = \frac{AC}{\sqrt{3}}$

$x = -2a$

$y = a$

$x = a^2 y$

$x = -2a$

$\frac{x}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}a$

$y = -a$

$2\sqrt{2}a \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}$

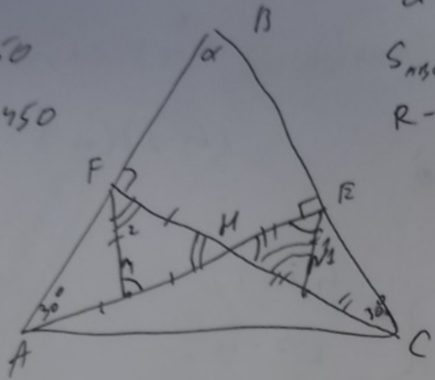
$30a_1 + 14a_n = 450$

$a_1 + 14a_n = 450$

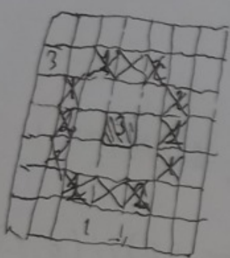
$13a_n = 29a_1$

$a_n \geq 29$

$a_1 \geq 13$



$\alpha = 60^\circ$



$\frac{\times 29}{13} \quad 87 \quad 29 \quad 377$

$BC = 16\cdot\sqrt{3}$ HBN - равноб.

$AB = 10\cdot\sqrt{3}$

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}a\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}y\right)^2$

$AE = 15$

$\times 29 \quad 14 \quad 116 \quad 29 \quad 406$

$FC = 24$

$BC = \frac{FC}{\sin\alpha} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{48}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}$

419

$B12 = \frac{AB}{2}$

$AC = \sqrt{300 + 768 - 480} = 31$

13	15	16	29
13	14	17	29

$AB = \frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{768-180} = \sqrt{608-20} = \sqrt{600-12} = \sqrt{588} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{196} = \sqrt{3}\cdot 14$

$\frac{160\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 40\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{10\cdot\sqrt{3}\cdot 24}{2} = 120\sqrt{3}$

$y = 1$

$ya = a$

$xa = a^2 + 3$

$\frac{2}{\sin 5}$ $\quad \frac{2}{\sin 5^\circ}$

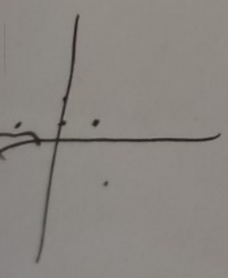
$xa - a^2 - 3 = 0 \quad x = \frac{a^2+3}{a}$

$ay - a = 0$

$\frac{a^2+3}{a} + 4 > -2a$

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$(xa - a^2 - 3)^2 + (ay - a)^2 = 7a^2$



$x^2a^2 - x(2a^3 + 6a) + y^2a^2 - y(2a^2) + a^4 + 9$

$x^2(a^2 - \cancel{2a^3 - 6a})$

$-2a(a^2+3) + a^4 + 6a^2 + 9$

$(xa - a^2 - 3)^2 + (ay - a)^2 - 7a^2 = 0$

211005467 (U885326 M1273247)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005467**

ID профиля: **885326**

Вариант 14

$14a - 3a^2 = 7$

$7x^2 + 7y^2 - 3x^2y^2 = 7$ $\sqrt{37}$ $3a^2 - 14a + 7 = 0$

$x^4 + y^4 - x^2y^2 = 37$

$(3a - 7)(a - 1)$

$\cancel{1 + 4x^2 - 3x^4}$ $a^2 = 37$ $x^2 = a$

$y^2 = b$

$2x^4$ $2a^2b^2 = 37$

$7a + 7b - 3ab = 7$

$ab = \frac{7}{3}(a + b - 1)$

$a^2 + b^2 - ab = 37$

$3ab = 7(a + b - 1)$

$15 \cdot 15 \cdot 14 -$ $a^2 - 7a -$

$- \frac{15 \cdot 14}{2} =$ $\cancel{a^2 - 6a + 9 + b^2 - 6a + 9} + 2ab - 3a - 3b + 9$

$a = 15 \cdot 14 \cdot 14{,}5 = 15 \cdot 7 \cdot 29 = 105 \cdot 29 = 2900 + 290\ 145 = 3045$ $n = n$, чтобы затупить?

$\cancel{a^2 + \frac{2}{3}a}$ $a^2 - \frac{2}{3}a + b^2 - \frac{7}{3}b + \frac{7}{3} = 37$

36 $36 + \cancel{42} - 49 -$ 42 ноль

$36 + 36 - 36$ блин. halt

$\frac{7}{6}$ $\frac{49}{36}$

$\frac{49}{48}$

$t = \frac{1}{2}x$ $t + \frac{1}{2}x = 7$

$x + \frac{1}{2}z = 7$

$a^2 - 9b + b^2 - 37 = 0$ $y = \frac{1}{2}z$

$x = 2$

$z + t = 7$ 1,5 x, деревни

$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2 + 148}}{2} = $ $x + y = 7$ $\frac{3}{2}x = 7$ смешной

$= \frac{b \pm \sqrt{148 - 3b^2}}{2}$ $x = 9\frac{2}{3}\ 3x$ 4x $\frac{2{,}5}{7} = \frac{5}{14}$ $\frac{35}{100}$

x y

z t

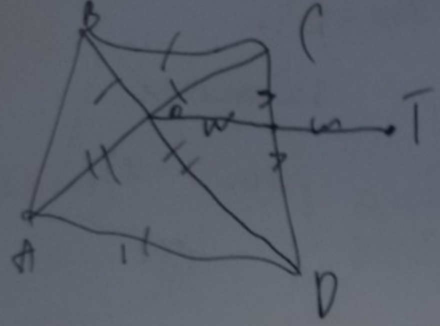
$\frac{5}{14} > \frac{7}{20}$

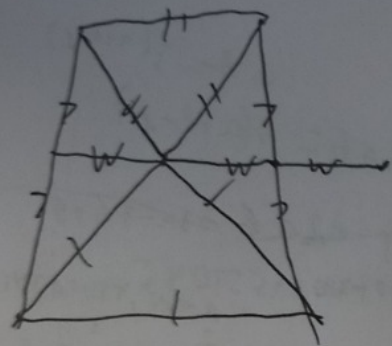
$\frac{5}{7} > \frac{7}{10}$

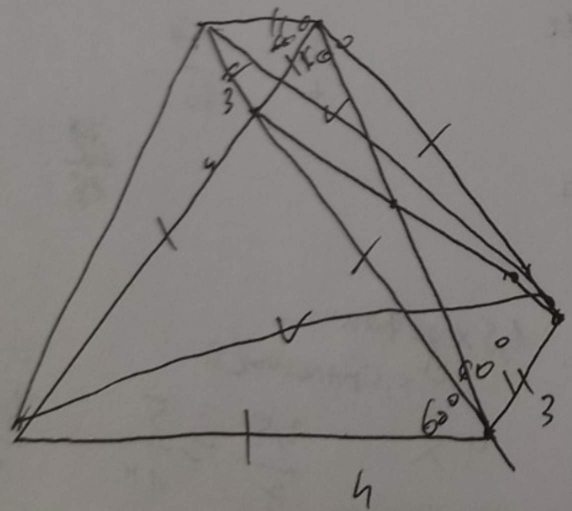
$7a + 7b - 7 = 3ab$

$50 > 49$

$a = \frac{7(1-b)}{7-3b} = \frac{7b-7}{3b-7} = 2 + \frac{b-7}{3b-7} = 2 + \frac{3b-21}{3(3b-7)} = 2\frac{1}{3} - \frac{14}{3(3b-7)}$







$7a + 7b - 3ab = 7$

$a^2 + b^2 - ab = 37$

$a + b = x$

$ab = y$

$7x - 3y = 7$

$x^2 - 3y = 37$

$x^2 - 7x = 30$

$x^2 - 7x - 30 = 0$

$(x - 10)(x + 3) = 0$

$x = 10$

$y = 21$

$a = 7$
$b = 3$

$a = 3$
$b = 7$

Ombeni: $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{7}$ ...
$\pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{3}$

$\frac{49 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\frac{12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 3\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}$

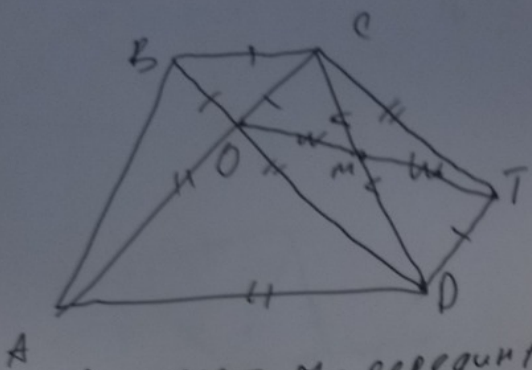
$\frac{12\sqrt{3}}{4}$

$\frac{3\sqrt{3} \cdot 4}{49\sqrt{3}} = \frac{12}{49}$ $\qquad \frac{3\cancel{4}\sqrt{3}}{4}$

№6

математика, 9 класс

③



1) Пусть M - середина CD
2) $\triangle OMC = \triangle DMT$ (по 2-м сторонам и углу между ними)
3) из 2 следует, что $OC = TD$
4) аналогично 2 и 3 получаем, что $CT = OD$
5) из 2 следует, что $\angle COT = \angle DTO$
6) из 5 следует, что $CO \parallel DT$
7) из 6 следует, что $\angle TDO = \angle COB = 60^\circ$
8) аналогично 5, 6 и 7 получаем, что $\angle OCT = 60^\circ$
9) из 7 и 8 следует, что $\angle BCT = \angle ADT = 120^\circ$
10) и $\angle AOB = 120^\circ$ (очевидно)
11) из 8, 9, 10 следует, что $\triangle ADT = \triangle BCT = \triangle BOA$ (по 2-м сторонам и углу между ними)
12) из 11 следует, что $AB = BT = AT \Rightarrow ABT$ - равносторонний, ч.т.д.

б) 13) $BC = 3$, $AD = 4$ (из пункта б)
14) $AC = BD = 7$
15) $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin \angle BOC}{2} = \frac{49 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$
16) $S_{ABT} = S_{ABCD} - S_{BCT} - S_{ADT} + S_{CTD}$ (очевидно)
17) $\angle CTD = 360 - \angle TCO - \angle COD - \angle ODT = 120^\circ$
18) $\triangle CTD = \triangle ADT$ (по 2-м сторонам и углу между ними)

211005467 (U885326 M1273248)

МАТЕМАТИКА, ЯРАМ

4

17) Из 15 и 16 следует, что $S_{ABT} = \frac{49}{4}\sqrt{3} - S_{ADT} = \frac{49}{4}\sqrt{3} - \frac{4 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{49}{4}\sqrt{3} - \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{37}{4}\sqrt{3}$

18) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{37}{4}\sqrt{3}}{\frac{49}{4}\sqrt{3}} = \frac{37}{49}$

Ответ: $\frac{37}{49}$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x^2=a \\ y^2=b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a,b \geq 0$$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$$\cancel{q=a+b} \quad \left.\begin{matrix} p=a+b \\ q=ab \end{matrix}\right\} \Rightarrow p,q \geq 0 \qquad p^2-3q=a^2+b^2-ab$$

$$\begin{cases} 7p-3q=7 \\ p^2-3q=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2-7p=37-7 \\ p^2-3q=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2-7p-30=0 \\ p^2-3q=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-10)(p+3)=0 \Rightarrow p=10;-3, \text{ но } p \geq 0 \Rightarrow p=10 \\ p^2-3q=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=10 \\ p^2-3q=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=10 \\ 100-3q=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=10 \\ q=21 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10-b \\ (10-b)b=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10-b \\ b^2-10b+21=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=10-b \\ (b-7)(b-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=7 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7},\ y=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{7},\ y=-\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{7},\ y=\sqrt{3} \\ x=\sqrt{7},\ y=-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3},\ y=-\sqrt{7} \\ x=\sqrt{3},\ y=\sqrt{7} \\ x=-\sqrt{3},\ y=\sqrt{7} \\ x=-\sqrt{3},\ y=-\sqrt{7} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \text{Ответ: } (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{7});\ (\pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{3})$$

Очев., что такое подходит, т.к. переходы равносильны.

№5

②

Будем говорить, что он вытаскивает сначала дубль (если их 2, то один из них), (в последствии буду пользоваться не им), а потом вторую карту.

Он может выбрать 1 из 15 дублей, а потом одну из 15·14 карт (т.к. остальные содержат числа из дубля), но так мы посчитаем дважды моменты, когда он вытащил 2 дубля ⇒ нужно вычесть $\frac{15\cdot14}{2}$ (кол-во пар дублей)

Итого получаем

$15\cdot15\cdot14 - \frac{15\cdot14}{2} = 14{,}5\cdot15\cdot14 = 29\cdot15\cdot7 = 29\cdot105 =$
$= 2900 + 145 = 3045$

Ответ: 3045