Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

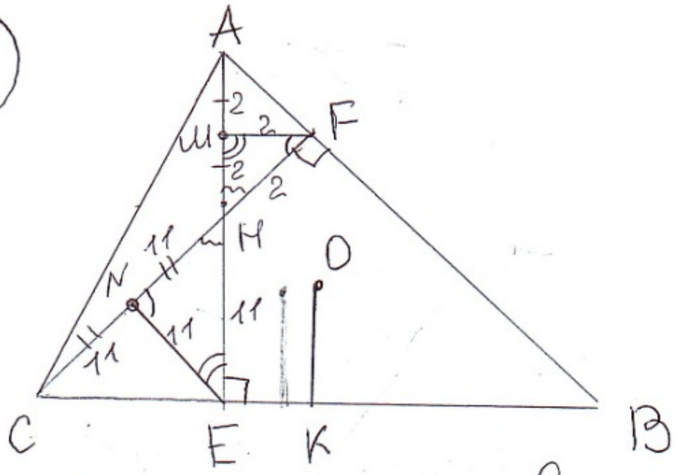
Шифр: **211005453**

ID профиля: **834725**

Вариант 14

Чистовик

①



1) FM - медиана в прямоугольн. $\triangle AFH$
$\Rightarrow FM = AM = MH = 2$

2) EN - медиана в прямоугол. $\triangle CEH$
$\Rightarrow EN = HN = CN = 11$

2) $FM \parallel NE \Rightarrow \angle MFH = \angle HNE$; $\angle FMH = \angle HEN$
$\Rightarrow \triangle MFH \sim \triangle ENH \Rightarrow \frac{NH}{FH} = \frac{NE}{MF} = \frac{11}{2}$
$NH = 11 \Rightarrow FH = 2$ и $\triangle MFH$ - равносторонний ($FM = MH = HF = 2$) $\angle MHF \overset{(\text{вертик})}{=} \angle NHE = 60°$
$\Rightarrow NHE$ - равносторон ($NH = HE = NE = 11$)

3) Четырехугольник EHFB вписаный
($\angle MFB + \angle HEB = 90 + 90 = 180$) $\Rightarrow \angle AHF = \angle ABC = 60°$

4) Пусть $EB = x$. в прямоуг $\triangle AEB$ $\angle EAB = 30$ $\overset{\angle AHF}{(90 - \angle CHE)}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 2x$. $AF = \sqrt{(2+2)^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow FB = 2x - 2\sqrt{3}$
(по т. Пифагора)

5) в прямоуг $\triangle CFB$ $\angle FCB = 30$ $(90 - \angle CHE)$
$\Rightarrow FB = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(11+11)^2 - 11^2} + x\right) =$
$= \frac{\sqrt{363} + x}{2} = 2x - 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{363} + 2\sqrt{3}}{3}$

6) $S_{\triangle ABC} = (AE \cdot CB) : 2 = \left((2+11+2) \cdot \left(\frac{\sqrt{363} + 2\sqrt{3}}{3} + \cancel{+}\sqrt{363}\right)\right) : 2 = 5\sqrt{3}(2\sqrt{121} + 1)$.

Лист 1 из 3

Чистовик

① Продолжение

Пусть точка O - центр описанной окружности $\triangle ABC$. Опустим перпендикуляр из O на CB. OK. По свойству ортоцентра H $AH = 2OK \Rightarrow OK = 2$. O лежит на сер. перпендикуляре к $CB \Rightarrow CK = KB =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{363}+2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{363}+\sqrt{3}}{3}.$$

$OK \perp KB \Rightarrow$ по т. Пифагора

$$OB^2 = OK^2 + KB^2 = 2^2 + \left(\frac{2\sqrt{363}+\sqrt{3}}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{36+4\cdot 363+3+4\cdot\sqrt{1089}}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{\frac{1491+4\cdot\sqrt{1089}}{9}} = \frac{\sqrt{1491+4\cdot\sqrt{1089}}}{3}$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

$S_{\triangle ABC} = 5\sqrt{3}(2\sqrt{121}+1)$

$R_{\text{опис.окр}} = \frac{\sqrt{1491+4\cdot\sqrt{1089}}}{3}$

Чистовик

② Пусть самое маленькое число равно a, самое большое равно A; S - сумма чисел между a и A (при упорядочивании). По условию

$30a+S+A=a+S+14A=450$

$29a=13A$; НОД$(29;13)=1$ =>

=> $A\geq 29$; $a\geq 13$ (числа натуральные)

При $a=13$; $A=29$:

$419+S=450 \Rightarrow S=31$.

наименьшее число среди чисел между a и A $\underset{(>a=13)}{\geq 14}$ => чисел между a и A ≤ 2 $(31<14\cdot 3)$

$31=x_1+x_2$; рави $13<x_1<x_2<29$ =>

=> $x_1=14$; $x_2=17$ или $x_1=15$; $x_2=16$.

При $a\geq 14$:

заметим, что $a\leq 15$ $(30a\leq 450)$

при $a=14$ $A\notin N$ $(29a=13A)$

при $a=15$ $A\notin N$ $(29a=13A)$

Ответ: $(13;14;17;29)$

$(13;15;16;29)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005453**

ID профиля: **834725**

Вариант 14

④ $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 & (a) \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 & (в) \end{cases}$

Отнимем от в а

$x^4+y^4+2x^2y^2-7(x^2+y^2)=30$

$(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=30$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2-7)=30$

Пусть $x^2+y^2=t\geq0$

$t(t-7)=30$

$t^2-7t-30=0$

$D=49-4\cdot-30=169$

$x_{1,2}=\frac{7\pm13}{2}=-3;\ \boxed{10}$, т.к $t\geq0$

$\boxed{x^2+y^2=10}$

[redacted]

$7\cdot10-3x^2y^2=7$

$63=3x^2y^2 => x^2y^2=21$

$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=10-y^2 \text{ (подставим)} \\ (10-y^2)(y^2)=21 \end{cases}$

$10y^2-y^4=21$ (пусть $k=y^2\geq0$)

$k^2-10k+21=0$

$D=100-4\cdot21=16$

[redacted]

Чистовик лист 2 из 6

④ Продолжение

$x_{1;2} = \frac{10 \pm 4}{2} = 7; 3$

1) $y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7}$

$x^2 = 10 - 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

2) $y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = 10 - 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

*Все переходы были равносильными поэтому проверка не требуется

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(-\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{7}; -\sqrt{3})$; $(\sqrt{7}; -\sqrt{3})$;

Чистовик Лист 3 из 6

⑤ Т.к набор из 15^2 различных, то есть всевозможные карточки (со всеми числами от 1 до 15 на красной и со всеми числами на синей)

Способов выбрать 1 дубль и один "недубль" (у которого числа различаются)

15 способ выбрать дубль (дублей всего 15) и 14·13 выбрать недубль (числа 2 раза на карточках не встречаются). Всего способов 15·14·13.

Способов выбрать два дубля: $\frac{15\cdot 14}{2}$ (всего дублей 15, $C_{15}^{2}=15\cdot 7$)

Всего способов $15\cdot 14\cdot 13 +$

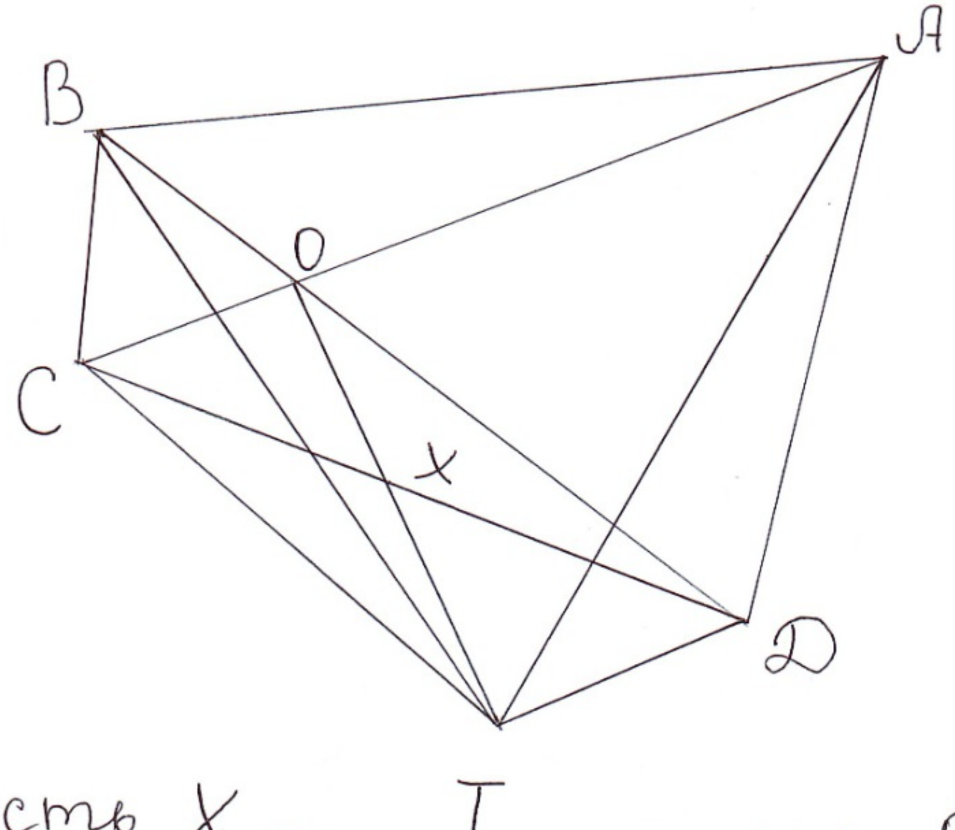
$+\frac{15\cdot 14}{2} = 2835$

Ответ: 2835

Чистовик Лист 4 из 6

⑥

а)



1) Пусть X - пересечение OT и CD. $OX = XT$; $CX = XD \Rightarrow ODTC$ - параллелограмм $\Rightarrow \angle CTD = 120 = \angle COD = 180 - 60$.
$\angle OCD = ODT = 180 - 120 = 60$

2) $\angle DTC + \angle CAD = 120 + 60 = 180 \Rightarrow ACDT$ - вписан. четырехугол $\Rightarrow \angle ATD = \angle ACD$.

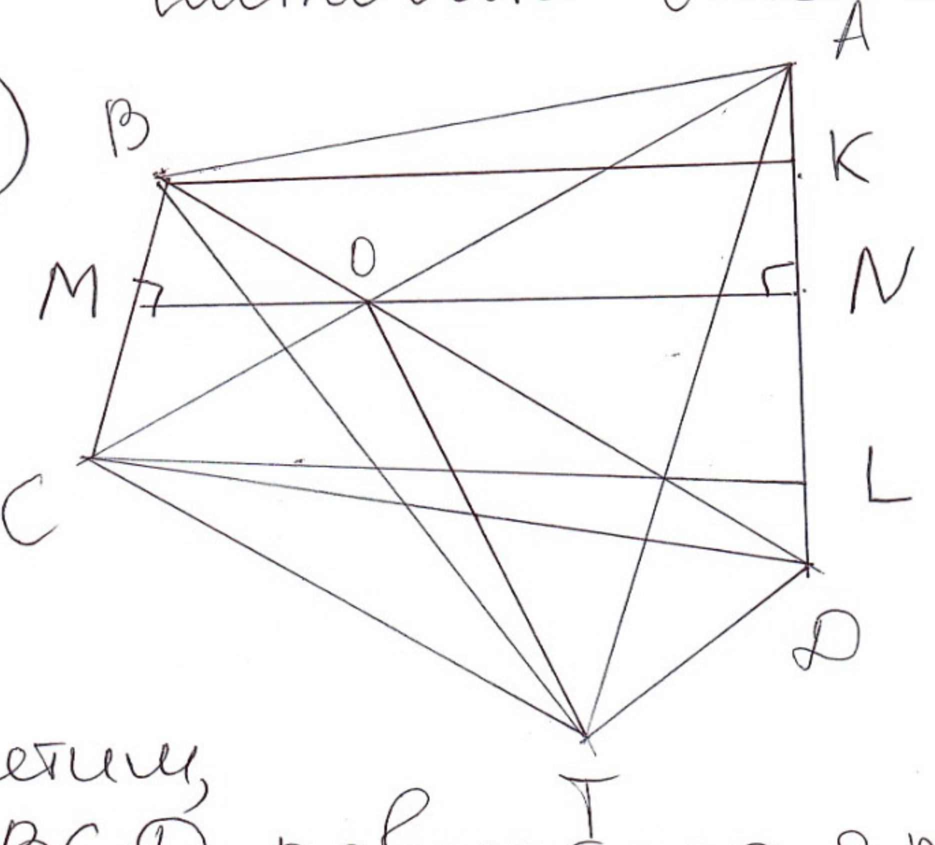
3) $\angle DTC + \angle CBD = 120 + 60 = 180 \Rightarrow BCTD$ - вписан. четырехугол $\Rightarrow \angle BTC = \angle ODC$.

4) $\angle ATB = 120 - (\angle ATD + \angle BTC) = 120 - (\angle ACD + \angle ODC) = 120 - (180 - \angle COD) = 120 - (180 - 120) = 60$.

5) $\angle CAD = \angle DBC = 60 \Rightarrow ABCD$ - вписан. четырехугол; $CTDB$ - тоже $\Rightarrow ABCTD$ - вписан. пятиугол [illegible] $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAT + \angle BCT = 180$; $\angle BCT = 120 (60 + 60)$
$\Rightarrow \angle BAT = 60 \Rightarrow \angle TBA = 60 \Rightarrow$
$\Rightarrow ABT$ - правильный

Чистовик Лист 5 из 6

⑥ б)



1) Заметим,
что ABCD – равнобокая трапеция ($\angle BCO = \angle OAD \Rightarrow BC \parallel AD$; она вписана (п. а)) $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(3+4)MN}{2}$; где MN – высота (MN проходит через O и $MN \perp BC$; $MN \perp AD$)

2) ~~Про~~ Опустим перпендикуляры BK и CL на AD. $KL = 3$ (BKLC – параллелограмм, рисунок симметричен относительно MN) $\Rightarrow AK = \frac{(4-3)}{2} = 0,5$

3) $AB = x$. $BK = \sqrt{x^2-(0,5)^2} = MN$ (высота между AD и BC) $= MO + ON$. По т. Пифагора $MO = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а $ON = \frac{4\sqrt{3}}{2}$ (высоты в правильных треуг.) $\Rightarrow MN = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x^2-0,25} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{37}}{2}$.

⑥ б) продолжение.

$$x = \frac{2\sqrt{37}}{2} = \sqrt{37} = BA = CD = AT = BT$$

$$S_{ABCD} = \underline{3{,}5 \cdot \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= (3{,}5)^2 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 12{,}25 \cdot \sqrt{3}$$

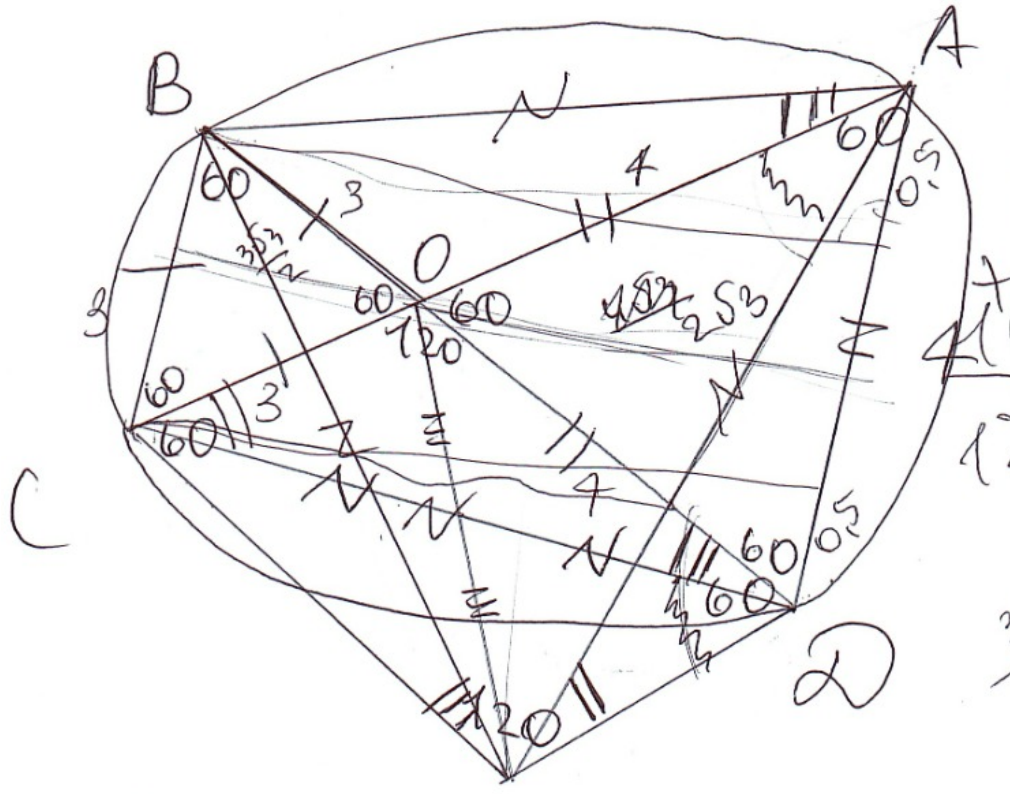
$$S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{37} \cdot \frac{\sqrt{37} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{37 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{\frac{37 \cdot \sqrt{3}}{4}}{12{,}25 \cdot \sqrt{3}} = \frac{37}{49}$$

Ответ: б) $\frac{37}{49}$

Черновик



$3{,}5$
$\times 3{,}5$
175
$+105$
$12{,}25$

$\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{2}$ ~~$8\sqrt{3}$~~

$\frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{a^2-0{,}25}$

^{2}49
$\times 3$
147

$\frac{\sqrt{37}}{2}$

$$\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

B:

$3{,}5\cdot\sqrt{a^2-0{,}25}$

$$\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=a^2$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{147}{4}}{2}$$

$\frac{1}{4}$ $\frac{4\cdot 37}{148}$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

148 | 2
74 | 2
37 | 37

$$\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}}{6\sqrt{a^2-0{,}25}}\ 2 \quad 48$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{2}=\frac{147}{4}=a^2-0{,}25=\frac{a^2\sqrt{3}}{24(\sqrt{a^2-0{,}25})}=\frac{a^2}{8\sqrt{3}\sqrt{a^2-0{,}25}}$$

$$\frac{148}{4}=a^2$$

3,5 $\frac{2\sqrt{37}}{4}=$

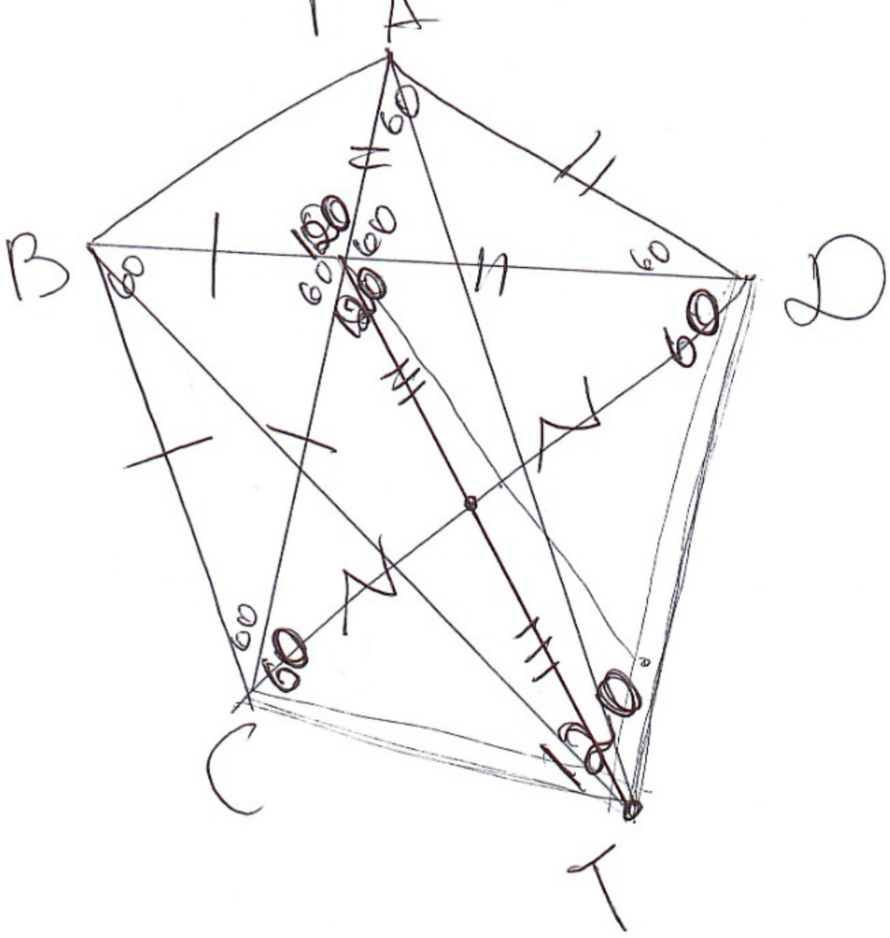
211005453 (U834725 M1273492)

[illegible]

~~④ Продолжение~~

~~$k = y^2 = 13 \Rightarrow y = \pm\sqrt{13}$~~

Черновик



Черновик

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$

$x^4+y^4-x^2y^2=37$

$x^2=$

$7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7$ ~~813.410~~

$x^4+y^4-x^2y^2=37$ 13

$\underbrace{x^4+y^4+2x^2y^2}-7x^2-7y^2=30$

$(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=30$

$(\underbrace{x^2+y^2}_{t})(\underbrace{x^2+y^2}_{t}-7)=30$

$70-3x^2y^2=7$

$t(t-7)\ 30$ $69-3x^2y^2=0$

$t^2-7t-30=0$ $x^2y^2=23$

$D=49-4\cdot-30=$

$=49+120=169=13^2$

$x_1=\frac{7\pm13}{2}=10$ $x^2+y^2=10$

$x^2y^2=23$

$x^2+y^2=10$

$y^2=10-x^2$

$x^4-23-10x^2=0$ $x^2(10-x^2)=23$

$100-4\cdot23$ $t^2-10t+23=0$ $10x^2-x^4=23$

$=$ ~~192~~ 8 59

Черновик

$\{\ 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$

$x^4+y^4-x^2y^2=37$

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$

$3x^4+3y^4-3x^2y^2=111$

$3x^4-7x^2+3y^4-7y^2=104$

$(x^2-y^2)^2=37+x^2y^2$

$(\sqrt7x-\sqrt7y)^2=$

$=7x^2+7y^2-\cancel{2}14xy$

$\times\,37$
3
111
$-\,7$
104

$-\,x^4+y^4 \mid x^2+y^2$
$x^2+y^2x^2 \mid x^2-y^2$
$y^4-y^2x^2 \quad +2y^2$
$-\,y^4+\cancel{x}y^2$
$-2y^2x^2$
$-\,-2y^2x^2-2y^4$
$2y^4$

15\. $\boxed{\frac{a}{a}}$

$\frac{14}{14}$

$15\cdot14^2$ $\boxed{15}\boxed{14\cdot13}$ $14\cdot13$

$\frac{15\cdot14}{2}$

$\times\,15$
14

$\times\,15$
7
105

$\times\,15$
14
$+60$
15
210

$\times\,15$
14
$+60$
15
310
$\times\,13$
63
21
2730
105

$\times\,21$
13
63
21
2730
2835

$+\,2730$
105
2835

$\times\,210$
13