Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

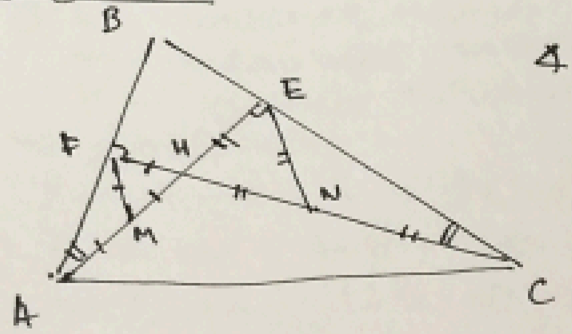
Шифр: **211005406**

ID профиля: **181179**

Вариант 14

Чистовик стр 1 Математика 9 вариант 14

Задача 1.



∢ ΔHEC: $\left.\begin{array}{l}\angle HEC = 90^\circ \\ HN = NC\end{array}\right| \Rightarrow HN = NC = EN$ по т. о медиане в п/у тр-ке

аналогично для ΔHFA:
$HM = MA = FM$

Пусть $\angle FHM = \alpha$, тогда $\angle EHN = \alpha$

ΔHNE – р/б $\Rightarrow \angle HEN = \alpha$

ΔHMF – р/б $\Rightarrow \angle HFM = \alpha$

$FM \parallel EN \Rightarrow \angle ENF = \angle NFM = \alpha$

∢ ΔHEN: все его углы $= \alpha$, значит $\alpha = 60^\circ$

т.о ΔFHM и ΔHEN – р/ст

∢ ΔFHA: $\left.\begin{array}{l}\angle F = 90^\circ \\ \angle H = 60^\circ\end{array}\right| \Rightarrow \angle A = 30^\circ$

∢ ΔEHC: $\left.\begin{array}{l}\angle E = 90^\circ \\ \angle H = 60^\circ\end{array}\right| \Rightarrow \angle C = 30^\circ$

$$\angle AHC = \angle FHE = \frac{360 - \angle FHM - \angle EHN}{2} = 120^\circ$$

Пусть $\angle HAC = \alpha$, $\angle HCA = \beta$

ΔAHC: $\alpha + \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

ΔABC: $\angle B = 180 - \angle A - \angle C = 180 - (\angle ABE + \angle EAC + \angle BCF + \angle FCA) =$

$= 180 - (30 + 30 + \alpha + \beta) = 180 - 120 = 60^\circ$

т.о $\angle ABC = 60^\circ$

т. косинусов для ΔAHC: $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2 - 2AH \cdot CH \cdot \cos\angle AHC} =$

$= \sqrt{4^2 + 22^2 - 2 \cdot 4 \cdot 22 \cdot (-1/2)} = \sqrt{588} = 14\sqrt{3}$

по т. синусов для ΔABC: $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{14\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \cancel{14\sqrt{3}}\ \frac{14\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}/2} = 14$$

∢ ΔFBC: $BC = FC \cdot \dfrac{1}{\cos\angle FCB} = (2EN + FM) \cdot \dfrac{1}{\cos 30^\circ} = \dfrac{24}{\sqrt{3}/2} = 16\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AE = \dfrac{1}{2} BC \cdot (2FM + EN) = \dfrac{1}{2} 16\sqrt{3} \cdot (4 + 11) = 120\sqrt{3}$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

$S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{3}$

$R = 14$

Чистовик стр 2 Математика 9 Вариант 14

Задача 2

Пусть b – большее число
m – меньшее число
r – сумма остальных чисел

по условию:

$$\begin{cases} 30m + r + b = 450 \\ m + r + 14b = 450 \end{cases} \Rightarrow 30m + r + b = m + r + 14b \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow 29m = 13b \Rightarrow m \vdots 13$, а $b \vdots 29$

наименьшее число $\in N$, $\vdots 13 = 13$

если $m = 13$, то

$30 \cdot 13 + r + b = 450 \Rightarrow \underline{r + b = 60}$

если $m > 13$ $(m \vdots 13)$, то $m \geq 26$, тогда

$30 \cdot m + r + b = 450 \Rightarrow r + b < 0$, но и r и $b \in N$

значит $m = 13$

наименьшее число $\in N$, $\vdots 29 = 29$

если $b = 29$, то

$m + r + 29 \cdot 14 = 450 \Rightarrow \underline{m + r = 44}$

если $b > 29$ $(b \vdots 29)$, тогда $b \geq 58$, тогда

$m + r + b \cdot 14 = 450 \Rightarrow m + r < 0$, но m и $r \in N$

значит $b = 29$

т.о. и m и b могут принимать только одно значение, при этом:

$$\begin{cases} r + b = 60 \\ b = 29 \end{cases} \Rightarrow r = 31$$, значит сумма чисел $(m < x < b)$ равна 31

рассмотрим, сколько чисел могло быть написано. на доске точно написано m и b и сколько-то оставшихся $\leftrightharpoons k$

1. $k = 0$, тогда $r = 0$, но $r = 31$, значит $k \neq 0$
2. $k = 1$, тогда наибольшее число, которое могли взять, это 28 (т.к. $x < b$), но $r = 31$, значит $k \neq 1$
3. $k = 2$, тогда наименьшее число, которое могли взять, это 14 при этом $r = 31$, значит второе будет $r - x_1 = 17$. разберем такие пары:

x_1	14	15	16	17	18
x_2	17	16	15	14	13

– уже не подходит, т.к. все числа должны быть различными

при этом последние 2, которые подошли, получаются перестановкой предыдущих, т.о. при $k = 2$ есть 2 вар-та таких чисел

Чистовик стр 3 Математика 9 вариант 14

(продолжение зад. 2)

4. $k \geq 3$, тогда

если взять три наименьших числа, которые можно взять:

$14, 15, 16$, то их сумма $14+15+16=45 > r=31$

а если брать большие числа, то их сумма будет ещё больше

а если брать больше чисел, то их сумма тоже будет больше

т.о их сумма никогда не будет $= r$

т.о $k < 3$

т.о осталось лишь 2 варианта таких чисел (при $k=2$)

Ответ: $\{13, 14, 17, 29\}$, $\{13, 15, 16, 29\}$.

Чистовик стр 4 Математика 9 вариант 14

Задача 3

чтобы точки A и B лежали по разные стороны от $x=4$, достаточные условия $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_A < 4 \\ x_B > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_A > 4 \\ x_B < 4 \end{cases} \end{array}\right.$

обозначения: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$

окружность центром в (.) B задаётся уравнением:

$(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=r^2$, где r – радиус этой ок-ти.

значит

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2x^2-2a^3x-6ax)+(a^2y^2-2a^2y)+a^4+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((ax)^2-2(ax)(a^2+3)+(a^2+3)^2)-(a^2+3)^2+$$
$$+(ay-a)^2+a^2+a^4+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ax-(a^2+3))^2+(ay-a)^2-(a^2+3)^2+\cancel{(ay-a)^2}+a^2+a^4+9=0$$

$$\Leftrightarrow (ax-a^2-3)^2+a^2(y-1)^2=(a^2+3)^2-a^2-a^4-9$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005406**

ID профиля: **181179**

Вариант 14

Задача 2

Всего различных чисел 15, значит различных дублей тоже всего 15

Если фокусник хочет вытащить 2 карточки так, чтобы был хотябы один дубль, ему нужно вытащить одну карточку дубль, а вторую не важно какую.

Всего вариантов выбрать дубль ровно 15, т.к дублей всего 15

из оставшихся карточек нам подойдут не все:
на синей стороне не должно быть написано то же число, что и на дубле, т.е на синей может быть написано 14 различных чисел.
на красной стороне аналогично может быть написано 14 различных чисел.
значит подходящих карточек из оставшихся для этого дубля

будет $14 \cdot 14 = 196$

т.о

вытащить дубль: 15 вариантов
вытянуть карточку, чтобы числа не повторились: 196
значит способов вытащить 2 карточки, как хочет фокусник будет $15 \cdot 196 = 2940$

Ответ: 2940 способов.

Чистовик стр 2 Математика 9 вариант 14

Задача 1

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

вычтем из первого ур-я второе:

$$x^4+y^4-x^2y^2-7x^2-7y^2+3x^2y^2=37-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^2y^2+y^2-7x^2-7y^2=30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)-30=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)=\frac{7\pm\sqrt{49+120}}{2} \overset{x^2\geq 0,\; y^2\geq 0}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=10$$

значит из первого ур-я:

$$7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \Leftrightarrow 3x^2y^2=63 \Rightarrow x^2y^2=21$$

получаем:

$$\begin{cases} x^2y^2=21 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \overset{\text{по т. Виета}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases} \end{array}\right.$$

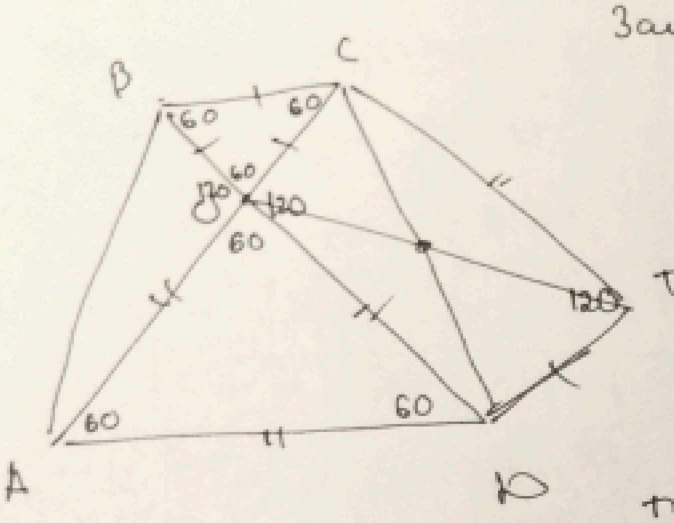
при этом оба варианта (которые для x^2 и y^2) подходят

заметим, что в ур-ях нет нечётных степеней x и y, значит проверять знак x и y нет смысла

Ответ: $\{(\pm\sqrt{7};\pm\sqrt{3});\ (\pm\sqrt{7};\mp\sqrt{3});\ (\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{7});\ (\pm\sqrt{3};\mp\sqrt{7})\}$

Чистовик стр 3 Математика 9 вариант 14

Задача 3



Заметим, что $\triangle BOC$ – р/с, $\triangle AOC$ – р/с, смежные $\angle BOC = \angle AOD$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC \parallel AD$

$\triangle BOC$ симметричен отн. своей высоты

$\triangle AOC$ симметричен отн. своей высоты

их высоты лежат на одной прямой, т.к перпендикулярны параллельным прямым и проходят через одну точку, т.о AB симметричен DC относительно прямой высот.

т.о $ABCD$ – р/б трапеция, $AB = CD$

$\angle BOC = 60° = \angle AOD \Rightarrow \angle BOA = \angle COD = \frac{360 - 60 \cdot 2}{2} = 120°$

$\exists M$ – середина CD

T сим. O отн $M \Rightarrow OM = MT$ и $CM = MD \Rightarrow$

$\Rightarrow OCTD$ – пар-м $\Rightarrow \angle CTD = 120°$ и $\angle OCT = \angle ODT = 60°$

отсюда же $CT = OD$ и $CO = DT$

$\triangle BCT$: $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120°$, $BC = BO$, $CT = OD = OA$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCT = \triangle BOA$ (по углу и 2 сторонам) $\Rightarrow BT = BA$

$\triangle ADT$: $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60° + 60° = 120°$, $AD = OA$, $DT = CO = BC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle ADT$ (по 2 ст. и углу между. ними) $\Rightarrow AT = BA$

$\Rightarrow BT = BA = AT \Rightarrow \triangle BAT$ – р/с (правильный)

Черновик стр 4   Математика 5   вариант 4
(продолжение зад 3.)

по пред. пункту $\triangle ABT$ – р/с, значит его площадь:

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} h \cdot AB$$

по т. кос для $\triangle BOA$:

$$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot OA \cdot \cos\angle BOA} =$$

$$= \sqrt{9+16-2\cdot 3\cdot 4\cdot\left(-1/2\right)} = \sqrt{37}$$

$$h = BT / \sin 60^\circ = 37 / \left(\sqrt{3}/2\right) = \frac{37\cdot 2}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2}\sqrt{37}\cdot\frac{37\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{37\sqrt{37}}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}\cdot h = \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{BC\cdot\sin 60}{\cancel{\sin 60}} + \frac{AD\cdot\sin 60}{\cancel{\sin 60}}\right) = \frac{49\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37\cdot 2}{\sqrt{3}} : \frac{49\sqrt{3}}{2} = \frac{37}{49}$$

Ответ: б) 37 : 49