Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005364**

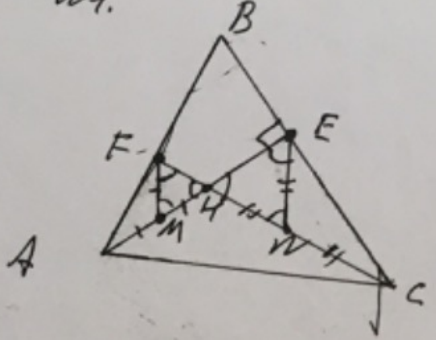
ID профиля: **801701**

Вариант 14

Математика

Чистовик (1)

№1.



Дано: $\triangle ABC$; CF - выс.
AE - выс.
$CF \cap AE = H$
M: $AM = MH$
N: $CN = NH$
$FM = 2$
$EN = 11$
$FM \parallel EN$

Найти $\angle ABC$

1. $\angle EMF = \angle MEN$ (как накрест)
$\angle MFN = \angle ENF$ (как накрест)
$\angle FHM = \angle EHN$ (как вертик)

2. FM - мед, $\angle HFA = 90°$ $\Rightarrow FM = AM = MH = 2 \Rightarrow \triangle MFH$ - р/б $\Rightarrow \angle MFH = \angle MHF \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle MFH$ - р/с $\Rightarrow$ все углы $= 60°$

аналогично $EN = HN = CN = 11 \Rightarrow \triangle NHE$ - р/б $\Rightarrow \angle NHE = \angle NEH$

3. $\triangle ABE$ и $\triangle AFH$ подобны по углам $\Rightarrow \angle ABC = 60°$.

Ответ: $\angle ABC = 60°$

Чистовик 2

№2

Дано
$a_1, a_2 ... a_n$

$30a_1 + a_2 + ... + a_n = 450 = a_1 + a_2 + ... 14a_n$

Пусть $a_2 + ... a_{n-1} = b$

Тогда $29a_1 = 13a_n \Rightarrow a_1 \vdots 13$
$a_n \vdots 29$

если $a_n = 29$, то $14a_n = 406 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + b = 44$

$\begin{cases} a_1 = \left[\begin{array}{l} 13 \Rightarrow b = 31 \\ 26 \text{ не может быть т.к. } a_1 < b \end{array}\right. \\ a_1 < b \end{cases}$

$b = 31 = \left[\begin{array}{l} 15 + 16 \\ 14 + 17 \end{array}\right.$

Ответ: 1) 13; 14; 17; 29

2) 13; 15; 16; 29.

Чистовик из [redacted] 3

$A(x;y)$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

Окр B

[redacted]

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

a-?

A и B [redacted] от [redacted] $x=4$ ·|·

$A \notin x=4$

$B \notin x=4$

$(x-y)^2+2a(a+x)=0$

$a^4-2a^3x+a^2x^2=(a^2-ax)^2$

$a(ay^2-6x-2ay)+9+(a^2-ax)^2$

$x^2+2x(a-y)+(a^2-2ay+y^2)+a^2+2ay+y^2=0$

$(x+a-y)^2+(a+y)^2=0$

$$\begin{cases} x+a-y=0 \\ a+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2a=0 \\ y=-a \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2a \\ y=-a \end{cases} \quad x=2y$$

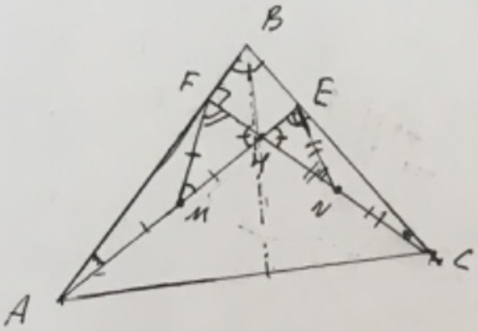
$A(-2a;-a)$

$a^2x^2-2x a(a^2+3)+(a^4+6a^2+9)+a^2y^2-2a^2y-6a^2=0$

$(ax-a^2-3)+a^2y^2-2a^2y+a^2-7a^2=0$

$(ax-a^2-3)^2+(ay-a)^2=7a^2$

Черновик №1. Листок



$FM = 2$
$EN = 11$
$FM \parallel EN$

$\angle ABC - ?$
$S_{\triangle ABC} - ?$
$R - ?$

Пусть $AM = x$; $NC = y$

1) $\angle EMF = \angle MEN$ (как накрест)
~~$\angle MEN = \angle$~~
$\angle MFN = \angle ENF$ (как накрест)
$\angle FHM = \angle EHN$ (как вертик) $\Rightarrow \triangle FHM \sim \triangle EHN$

$\frac{EN}{FM} = \frac{HN}{FH} = \frac{EH}{HM} = \frac{11}{2}$

$\frac{EH}{HM} = \frac{11}{2}$ $EH = \frac{11x}{2}$

2. $\triangle AFH$ и EHC

1) $\angle AFH = 90 = \angle CEH$
2) $\angle FHA = \angle EHC$ $\Rightarrow \triangle AFH \sim \triangle EHC \Rightarrow \frac{HC}{AH} = \frac{EH}{HF}$
$\angle FAH = \angle ECH$

Пусть $\angle MFH = \alpha = \angle ENH$
$\angle HMF = \beta = \angle HEN$

$\frac{2y}{2x} = \frac{\frac{11x}{2}}{HF}$

$\frac{HN}{HF} = \frac{11}{2}$

$\frac{y}{HF} = \frac{11}{2}$

$11HF = 2y$

$HF = \frac{2y}{11}$

$\frac{2y}{2x} = \frac{11x}{2} : \frac{2y}{11}$

$\frac{11x}{2} \cdot \frac{11}{2y} = \frac{121x}{4y}$

$\frac{121x}{4y} = \frac{2y}{2x}$ $\frac{121x}{4y} = \frac{y}{x}$

$4y^2 = 121x^2$

$2y = 11x$

$\angle ABC = \angle EHN = \angle FHM = \varphi$ т.к. $\angle AEB = 90$; EAB - общ

$\triangle AFH$

3. FM - мед $\Rightarrow FM = AM = x = 2$
аналогично для $EN = y = 11$

4. 1) $\triangle FHM$ - р/б т.к. $FM = MH = x \Rightarrow \angle FHM = \angle HFM$ (α)
2) $\triangle EHN$ - р/б т.к. $HN = EN \Rightarrow \angle EHN = \angle HEN$ (β)

$\Rightarrow \alpha = \beta = \angle FHM = \angle EHN = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 60°$

Черновик №2. Мапем.

$a_1, a_2 .. a_n$

$30a_1 + a_2 + ... + a_n = 450$

$a_1 + a_2 + ... + a_n = 450$

$9a_1 = 14a_n$

Пусть $a_2 + a_3 + ... a_{n-1} = b$

$30a_1 + b + a_n = \underline{450} = a_1 + b + 14a_n$

$29a_1 = 13a_n$

$\begin{array}{r} \times 29 \\ 14 \\ \hline 406 \end{array}$

$a_n \vdots 29$

$a_1 \vdots 13$

Если $a_n = 29$, то $14a_n = 406$ $\quad 450 - 406 = 44$

$a_1 + b = 44$

$a_1 = \left[\begin{array}{l} 13 \\ 26 \end{array} \right.$ не подходит.

$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 13 \\ b - a_1 = 31 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 26 \\ b - a_1 = 18 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ b > a_1 \end{array} \right.$ не подходит.

$a_1 = 13$

$30a_1 = 390$

$b + a_n = 60$

$60 - 29 = 31$

$b > a_1$

$31 = 15 + 16$

$31 = 14 + 17$

1) 13; 14; 17; 29

2) 13; 15; 16; 29.

$b > a_1$

Чистовик (4)

при $a=0$, то $A(0;0)$. $B(0;0) \Rightarrow a \neq 0$

B: $(x-a-\frac{3}{a})+(y-1)^2=7$ $-R^2$ $R=\sqrt{7}$

$B(a+\frac{3}{a};\ 1)$

$A(-2a;\ -a)$

$A \notin$ | $x=4$ $\Rightarrow$ $a\neq -2$

$B \notin$ | $a+\frac{3}{a}\neq 4$

$a^2-4a+3\neq 0$

$a \neq \frac{4\pm 2}{2} \neq \left[\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$ $a\neq 3;1$

$a\neq 0$; $a\neq 1$; $a\neq -2$; $a\neq 3$.

$a+\frac{3}{a}<4$ $|\cdot a$

$a^2-4a+3<0$ $(a-1)(a-3)$

$a^2-a-3a+3<0$

$a(a-1)-3(a-1)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2a>4\\ a+\frac{3}{a}<4\end{cases}\\ \begin{cases}-2a<4\\ a+\frac{3}{a}>4\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<-2\\ (1;3)\end{cases} \text{ нет реш.}\\ \begin{cases}a>-2\\ (-\infty;1)\cup(3;+\infty)\end{cases} \setminus\{0\}\end{array}\right.$$

$+$ 1 $-$ 3 $+$

$a\neq 0$

~~$a\in(-\infty;-2)$~~

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(3;+\infty)$

211005364 (U801701 M1276402)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005364**

ID профиля: **801701**

Вариант 14

Чистовик (1)

Задача № 4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Пусть $x^2=t$
$y^2=f$, тогда

$$\begin{cases} 7t+7f-3tf=7 \\ t^2+f^2-tf=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t-3tf+7f-7=0 \\ t^2-tf+f^2=37 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(t+f)=7+3tf \\ (t+f)^2-3tf=37 \end{cases} \Rightarrow t+f=1+\frac{3}{7}tf$$

Пусть $tf=a$

$$\left(1+\frac{3}{7}a\right)^2-3a=37$$

$$1+\frac{6}{7}a+\frac{9}{49}a^2-3a=37$$

$$\frac{9}{49}a^2-2\frac{1}{7}a-36=0 \quad \Big| \frac{49}{3}$$

$$3a^2-35a-588=0$$

$$D=1225+7056=8281=91^2$$

$$\begin{cases} a=\frac{35\pm 91}{6}=\left[\begin{array}{l} 21 \\ -9 \text{ не подходит} \end{array}\right. \\ a\geq 0 \text{ т.к } a=tf=x^2y^2 \end{cases}$$

$tf=21$

$f=\frac{21}{t}$

$$7t^2+7\cdot\frac{21}{t}-3t^2\cdot\frac{21}{t}-7=0 \quad \Big| \frac{t}{7}$$

$t^2-10+21=0$

$(t-3)(t-7)=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=7 \end{array}\right. \quad t\geq 0$$

Чистовик 3

Задача №5

Дано: 15^2 карт $\overset{к}{x}|\overset{с}{x}$ - дубль. Найти кол-во способов вытащить 2 карты, где есть дубль, но нет повторений

а - карта

$a_1 \neq a_2 \neq \dots a_n$

Решение:

1) Пусть вытащит 2 дубля

$C_{15}^2 = \frac{15!}{13! \cdot 2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ сп

2) Пусть вытащит так - $\boxed{x|x}$ и $\boxed{z|y}$, где $x \neq y \neq z$

1 дубль

кол-во способов взять $x - 15$, $z - 14$, $y - 13$ получаем $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ сп

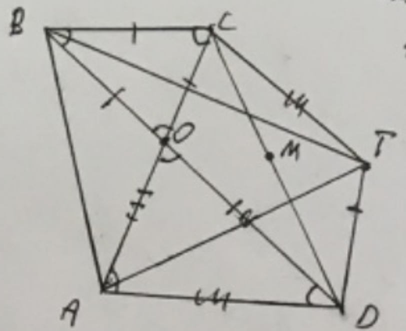
3) $105 + 2730 = 2835$ сп.

Ответ: 2835 способов.

211005364 (U801701 M1276403)

Чистовик ④

№6.



Дано $ABCD$ – четырёхуг. выпук.

$AC \cap BD = O$ $BC = 3$ $AD = 4$

M: $CM = MD$

T сим относительно M к O

ΔOBC и ΔAOD – прав

Найти

1) Док-ть ABT – прав

2) $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}$ – ?

1. ΔAOD – прав $\Big|$ $\Rightarrow \angle OAD = \angle ADO = \angle AOD = 60°$;
$AD = OA = OD$

ΔBOC – прав $\Big|$ $\Rightarrow \angle OBC = \angle BCO = \angle BOC = 60°$;
$OB = BC = OC$.

2. T сим. относительно M к O $\Rightarrow OCTD$ – парал ($CM = MD$; $OM = MT$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow CT = OD$; $CO = TD$; $\angle COD = \angle CTD$; $\angle OCT = \angle TDO$
$\angle COT = 120$ $(180 - \angle AOD) = \angle CTD$ $\Big|$ $\Rightarrow \angle OCT = 60° = \angle TDO$

3. $\Delta BCT = \Delta ATD$
1) $CT = AD$
2) $BC = TD$
3) $\angle BCT = 120°$ $(60° + 60°) = ADT$ $\Big|$ $\Rightarrow BT = AT$.

4. $\Delta ABO = \Delta COD$
1) $AO = OD$
2) $BO = OC$ $\Big|$ $\Rightarrow BA = CD$
3) $\angle BOA = \angle COD$

5. $BA = CD$
$\Delta CTD = \Delta ATD$
1) $CT = AD$
2) TD ~~[illegible]~~ – общ
3) $\angle ADT = 120° = CTD$ $\Big|$ $\Rightarrow CD = AT = AB = BT \Rightarrow \Delta ADT$ – прав.

ч.т.д.

211005364 (U801701 M1276403)

Черновик №1.

$x^2=t$
$y^2=f$

$$\begin{cases} 7t+7f-3tf=7 \\ t^2+f^2-tf=37 \quad \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2+3f^2-3ft=111 \\ 7t+7f-3tf=7 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3t^2+3f^2-7t-7f=104$ $\quad t>0$, $f>0$

$3t^2-7t=104-3f^2-7f$

$t(3t-7)+f(3f-7)=104$

$t(3t-7)=104-f(3f-7)$

$t^2+7t-4tf+7f+f^2=44$

$(t-f)^2+7t-2tf+7f$ $\quad 7t-tf-tf+7f$

$t(7-f)-f(t-7)$

$(x^2-y^2)^2-x^2(7-x^2)-y^2(y^2-7)$

$$\begin{cases} 7t+7f-3tf=7 \\ t^2+f^2-tf=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t-3tf+7f-7=0 \\ t^2-tf+f^2=37 \end{cases}$$

$7t-2tf+7f=$

$7t-tf-tf+7f$

$t(7-f)-f(t-7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(t+f)=7+3tf \\ (t+f)^2-3tf=37 \end{cases}$$

$t+f=1+\frac{3}{7}tf$

Пусть $tf=a$

211005364 (U801701 M1276403)

$$\left(1+\frac{3}{7}a\right)^2-3a=37$$

$$1+\frac{6}{7}a+\frac{9}{49}a^2-3a=37$$

$$\frac{9}{49}a^2-2\frac{1}{7}a-36=0 \quad |49$$

$$9a^2-105a-6^2 7^2=0$$

$$9a^2-90a-15a$$

$$9a^2-90a-15a-42^2=0$$

$$\frac{9}{49}a^2-\frac{15}{7}a-36=0 \quad \Big|\frac{49}{3}$$

$$3a^2-35a-588=0$$

$$D=1225+7056=8281=91^2$$

$$12\cdot 49$$

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{35+91}{2}=21 \\ a_2=\dfrac{35-91}{6} = \text{не подходит} \end{cases}$$

$a \geq 0$ тк $a=tf=x^2y^3$

$tf=21$

$15\cdot 7=105$

$105=$

$6\cdot 7=42$

$42\cdot 2=84$

$105 \,|\, 5$
$21 \,|\, 7$
$3 \,|\, 3$
1

$6^2\cdot 7^2=7\cdot 7\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2$

$4\cdot 9=36$

$(2\cdot 3)^2=36$

$3^2\cdot 4^2=144$

$(3\cdot 4)^2=144$

$35\times 35=1225$

$49\times 12=588$

726

$\frac{-54}{6}=-9$

$8281 \,|\, 91$
$819 \quad 91$
91
91

$91\times 9=819$

$91-35=54$

211005364 (U801701 M1276403)

$tf = 21$

$f = \frac{21}{t}$

$\frac{\cancel{7}\cdot 7\cdot 3}{\cancel{t}}\cdot\frac{t}{7} = 21$

$7t^2 + 1\cdot\frac{21}{t} - 3t\cdot\frac{21}{t} - 7 = 0 \;\Big|\cdot\frac{t}{7} \quad t \neq 0$

$\frac{3\cdot 7\cdot 21}{t} = 21t$

~~$t^2 + 4\cdot 21 - 21t - 7 = 0$~~

~~$t^2 - 21t + 14 = 0$~~

$t^2 - 10t + 21 = 0$

$D = 100 - 84 = 16 = 4^2$

$t = \frac{10 \pm 4}{2} = 7;\ 3$

$t = x^2$

$x = \left[\begin{array}{l}\sqrt{7}\\ -\sqrt{7}\\ \sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\end{array}\right.$

аналогично для y

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{7})$ $(-\sqrt{3}; -\sqrt{7})$
$(\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{7}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7} -\sqrt{3})$

3/4 3/4 1/2 2/4

4/3 4/3

$15 \cdot 14 = 210$

2/4 – 4.

3/4 – 4.

1/3 – 4

1/4 – 4

2/3 – 4

2/4

$24 = 4!$

№2

всего 15 где $x = y$

к с

$x \mid x$ ← $x \neq y$

$y \mid y$

← Пусть выходит 2 дубля

$C_{15}^{2} = \frac{15!}{13! \cdot 2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$

1 дубль – 15 сп.

$\times \begin{array}{r}15\\14\end{array}$

$\times 3$

2730

Пусть

к с

$x \mid x$

$y \mid z$ где $y \neq z \neq x$

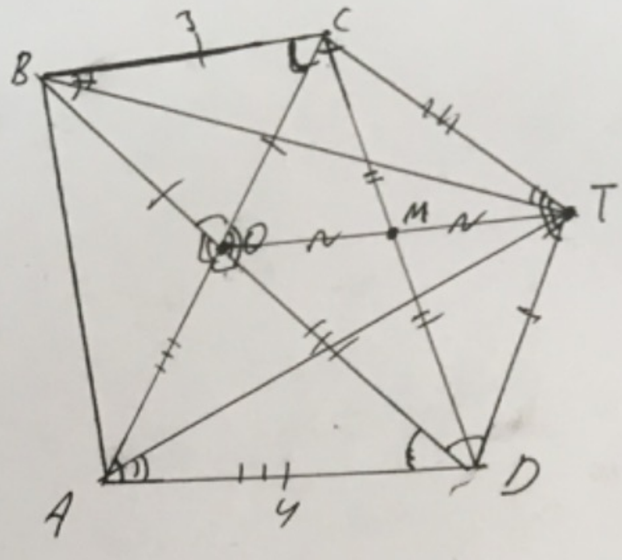
$y \neq x$ – 14 сп., что $z \neq x \neq y$ – 13 сп.

$15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ сп

$2730 + 105 = 2835$

Ответ: 2835

№6



M-серед

1. $\angle AOD = \angle BOC$ (как вертик) $\Rightarrow COD = \angle BOA = 120°$ (как вертик)

2. $OCTD$ - $\underbrace{\text{парал}}_{}$ т.к. диаг делятся $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow CT = OD$; $CO = TD$

3. $\angle OCT = \angle TDO = 60°$

4. $\Delta BCT = \Delta ATD$ по 2 ст. и углу между ними. $\Rightarrow BT = AB \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle TBA = \angle TAB$

5. $\Delta ABO = \Delta COD$ по 2 ст. и углу. $\Rightarrow AB = CD$

6. $\Delta CTD = \Delta ATD$ по 2 ст и углу $\Rightarrow CD = AT = BT = AB =$
$\Rightarrow ABC$ - прав.

Чистовик 2

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = 3 \end{array}\right. \\ t = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \sqrt{7} \\ -\sqrt{7} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

аналогично для t и y $\quad y = \left[\begin{array}{l} \sqrt{7} \\ -\sqrt{7} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{array}\right.$ при $x^2 \neq y^2$

Ответ: $(\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{7}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7}\ -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{7})$.