Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

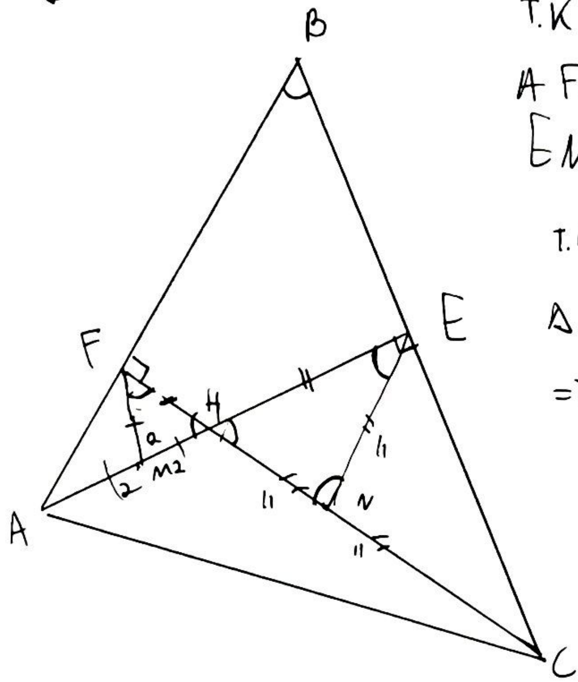
Шифр: **211005339**

ID профиля: **804227**

Вариант 14

Чистовик

№1



т.к $\triangle AFH$ и HEC - прямоуг, а FM и EN - их медианы, то $FM = AM = MH = 2$, $EN = HN = NC = 11$.

т.к $FM \parallel EN$, то $\angle HNE = \angle MFH$, т.к $\triangle FMH$ р-бр ($FM = MH$), то $\angle MFH = \angle FHM$ $\Rightarrow \angle HNE = \angle EHN$, но $\triangle HNE$ р-бр ($HN = NE$) $\Rightarrow \angle HNE = \angle HEN = \angle EHN \Rightarrow \triangle HEN$ и $\triangle FHM$ - равносторонние.

$BFHE$ - описанный четырехуг (т.к $\angle BFH + \angle BEH = 180°$) $\Rightarrow \angle ABC = \angle FHA = 60°$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S} = \frac{AC}{2 \cdot \sin B}$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2 \cdot AH \cdot HC \cdot \cos 120° = AH^2 + HC^2 + 2 \cdot AH \cdot HC \cdot \cos 60° =$$

$$= 4^2 + 22^2 + 4 \cdot 22 = \quad \Rightarrow AC = 2 \cdot 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

$$R = \frac{14\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 14$$

$$BC = \frac{FC}{\cos FBC} = \frac{24}{\cos 30°} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16\sqrt{3}$$

$$AB = \frac{AE}{\cos BAE} = \frac{15}{\cos 30°} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \frac{\sin \angle B}{2} = 16\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 120\sqrt{3}$$

Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$, $R = 14$

Чистовик ⑤

№2

$S=450=30a_1+a_2+\ldots+a_n$ – в порядке возрастания

$450=a_1+a_2+\ldots+14a_n$

$\Rightarrow 0=29a_1-13a_n$

$$a_1=\frac{13a_n}{29} \Rightarrow a_n \vdots 29$$

Минимально на доске может находиться 2 числа

$14a_{n_{max}}+a_{n_{max}}-min=450$

$15a_{n_{max}}-min=450 \Rightarrow min=14,\ a_{n_{max}}=\frac{435}{15}=29$

~~максимальное~~ данное значение чисел, ~~которое может находить~~ которые находятся на доске – 29

единственное число, к-е не больше $a_{n_{max}}$ и $\vdots 29$ – это 29, значит $a_1=13$

$a_2+\ldots+a_{n-1}=450-30\cdot13-29=31$

при чем каждое из оставшихся чисел >13, но <29

Дальше нам остается перебирать всевозможные варианты: $a_2=14, a_3=17$, или $a_2=15, a_3=16$

Значит на доске было написано 13, 14, 17, 29 или 13, 15, 16, 29

Ответ: (13, 14, 17, 29) или (13, 15, 16, 29)

Чистовик ③

№3 окр-ть:

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$(ax-(a^2+3))^2-(a^2+3)^2+(ay-a)^2-a^2+a^4+9=0$

$\cancel{a^2}(x-a-\frac{3}{a})^2+\cancel{a^2}(y-1)^2=7\cancel{a^2}$

координаты $B(a+\frac{3}{a};1)$

$a+\frac{3}{a}<4,\ x>4$ | $a+\frac{3}{a}>4,\ x<4$

$\frac{(a-3)(a-1)}{a}<0,\ x>4$ | $\frac{(a-3)(a-1)}{a}>0,\ x<4$

$a\in(-\infty;0)\cup(1;3)$ | $a\in(0;1)\cup(3;\infty)$

ур-е точки A:

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$x^2+2x(a-y)+2y^2+2a^2=0$

$(x+a-y)^2-(a-y)^2+2y^2+2a^2=0$

$(x+a-y)^2+(a+y)^2=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+a-y=0 \\ a+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-2a$

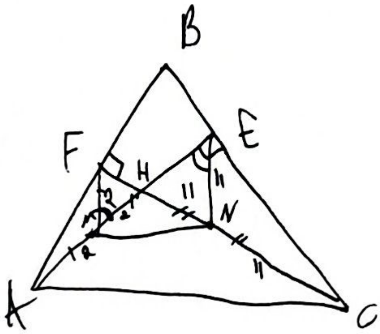
$\begin{cases} a+\frac{3}{a}<4 \\ x>4 \end{cases}$ | $\begin{cases} a+\frac{3}{a}>4 \\ x<4 \end{cases}$

$\begin{cases} a\in(-\infty;0)\cup(1;3) \\ a<-2 \end{cases}$ | $\begin{cases} a\in(0;1)\cup(3;\infty) \\ a>-2 \end{cases}$

$\Rightarrow a\in(-\infty;-2)$ | $\Rightarrow a\in(0;1)\cup(3;\infty)$

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(3;\infty)$

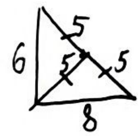
Черновик (4)



$S \in P$

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{b}{2\cdot \sin B}$

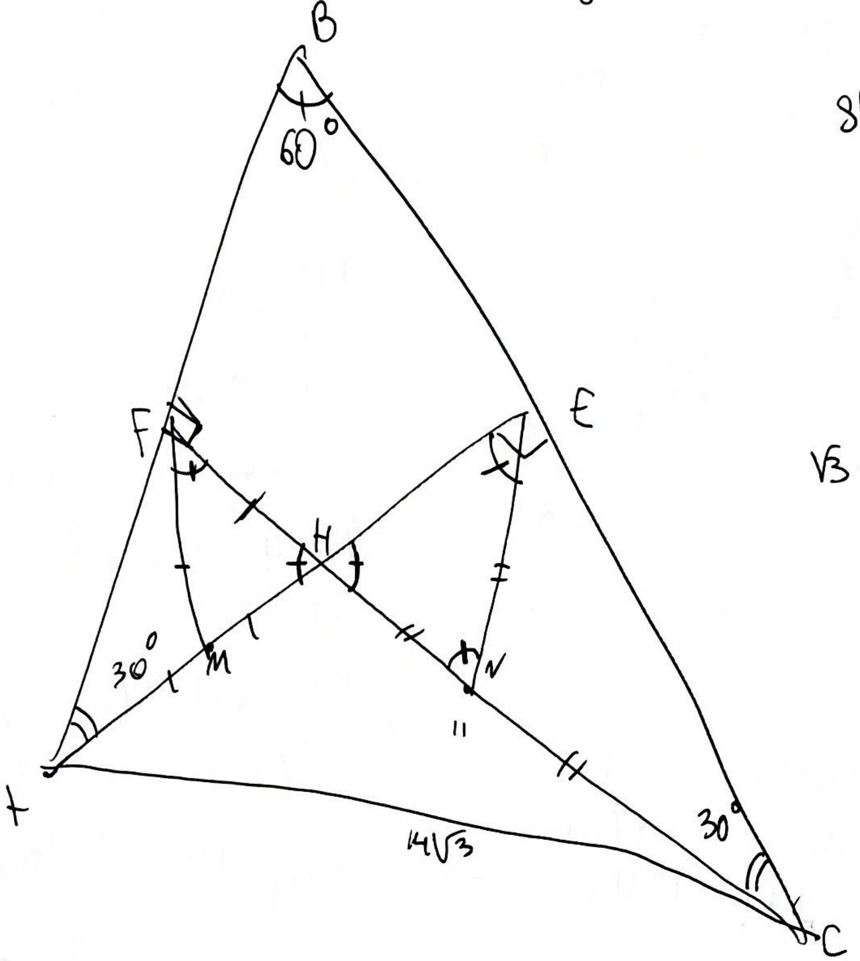
$\frac{ac\cdot \sin B}{2}$



$\frac{6\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 8} = 5$

$3\cdot 40$

$8\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$



$\sqrt{3}\cdot 8\cdot 2$

$\sqrt{3}\cdot 5\cdot 2$ $\frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$99+4$
103

$16+22(22-4)=$
$=16+22\cdot 18=$
$=4(4+11\cdot 9)$

$4\cdot 103 = 412$

$16+22(22+4)=$
$=16+22\cdot 26$

$103 \,|\, 13$

13
$\cdot\, 9$

13
$130+13$
143
147

$147 \,|\, 3$
$-12 \quad 49$
27

$2\sqrt{103}$

$4(4+11\cdot 13)=$
$=4\cdot 147$

$a_1, a_2 \dots a_n$ Черновик (5)

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$30+2+3+4+5+$

$450 = 29 + \frac{2 + 1\cdot(n-1)}{2} \cdot n$

421

$842 = 2n + n^2 - n = n^2 + n$

$n^2 + n - 842 = 0$

$421 \cdot 2 =$

$450 \geq 29 + \frac{2+1(n-1)}{2} \cdot n$

$842 \geq n^2 + n$

$\times 21$
11

$210 + 21 =$
231

$\frac{1+21}{2} \cdot 21 = 11 \cdot 21$

49

$\frac{1+49}{2} \cdot 49$

$25 \cdot 49$

421 | 13
-39
31 | 3

23
× 7
21
14

49
25
245
98

19
× 15
95
19
285

421 | 19
-38 | 2

421 | 23
-23 | 1
191

421 | 21
-2

$\frac{1+19}{2} \cdot 19$

$\frac{1+29}{2} \cdot 19 = 15 \cdot 19$

$\frac{1+39}{2} \cdot 19 = 20 \cdot 19$

$380 + 40 = 400 + 21$

$380 + 40 = 420$

$max_n = 40$

$31 - 14$

$450 = 30a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$450 = a_1 + a_2 + \dots + 14a_n$

$0 = 29a_1 - 13a_n$

$13a_n = 29a_1$

21 19

$14a_x + a_{x-1} = 450$

$14a_x + a_{x-1} = 450$

$15a_x = 449$

31
-14
17

445 | 15
-30 | 2
145

15
× 25
75
30
375

90 + 30

440
390
420
435

435

435 | 15
-30 | 2
135

× 13
390

450
-390
60
-29

Черновик 6

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$(x+a)^2+a^2-2xy+2y^2=0$ $\qquad x>4$

$(x+a)^2+a^2-x^2+y^2+(x-y)^2=0$

$(x+a)^2+a^2+(y-x)(x+y)+(x-y)^2=0$

$a^2+(x+a)^2+(x-y)(-x-y+x-y)=0$

$a^2+(x+a)^2-2y\cdot(x-y)=0$

$a^2+(x+a^2)^2=2xy+2y^2$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$\cancel{-2ax(a^2x+}$

$-2ax(a^2+3)$ $\qquad +a^4+9$

$(ax-(a^2+3))^2-a^2-3+(ay-a)^2-a^2=0$

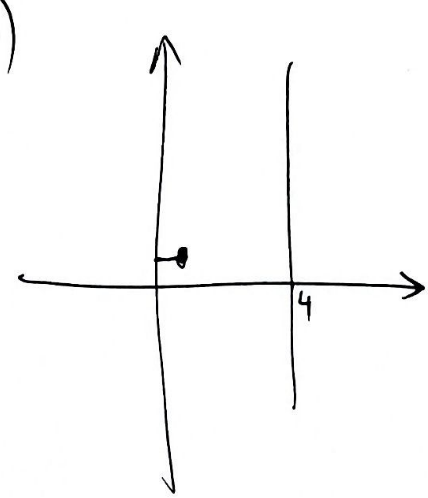
$(ax-(a^2+3))^2+(ay-a)^2=2a^2+6-a^4$

$a^2\left(x-a-\frac{3}{a}\right)^2+a^2(y-1)^2=2a^2+6-a^4$

$B\left(a+\frac{3}{a};1\right)$ $\qquad a+\frac{3}{a}<4 \qquad a+\frac{3}{a}-4<0$

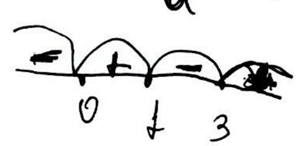
$a+\frac{3}{a}<4$

$a<0,\quad a\in(1;3)$



$\frac{a^2-4a+3}{a}<0$

$\frac{(a-3)(a-1)}{a}<0$



черновик. 7

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$x^2 + 2x(a-y) + 2y^2 + 2a^2 = 0$

$(x + a - y)^2 - (a-y)^2 + 2y^2 + 2a^2 = 0$

$-(a^4 + 8a^2 + 9)\ \cancel{a} - a^2 + a^4 + 9 = -7a^2$

$(x+a-y)^2 + a^2 + 2ay + y^2 = 0$

$(x+a-y)^2 + (y+a)^2 = 0$

$-2a > 4$

$a <$

$\cancel{2a}\ -4 > 2a$

$a < -2$

$-2a < 4$

$a > -2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005339**

ID профиля: **804227**

Вариант 14

Чистовик (1)

№4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$x^2=a,\quad y^2=b$

тогда $\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$

вычтем из 2-го ур-е первое

$$a^2+b^2+2ab-7(a+b)=30$$

$$(a+b)^2-7(a+b)-30=0$$

$$(a+b-10)(a+b+3)=0$$

$a+b=10;\ a+b=-3,$

$b=10-a$

$7a+7(10-a)-3a(10-a)=7$

$a^2-10a+21=0$

$(a-3)(a-7)=0$

$a=3;\ a=7;$

$\Rightarrow b=7;\ b=3;$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{7}$ или

$y=\pm\sqrt{3};\ x=\pm\sqrt{7}$

$b=-(3+a)$

$\cancel{7a-7(3+a)+3a(3+a)=7}$

$\cancel{3a^2+9a+28=0}$

$a^2+(3+a)^2+(3+a)a=37$

$3a^2+9a-28=0$

$D=81+4\cdot 28\cdot 3=139\cdot 3$

$a=\dfrac{-9\pm\sqrt{417}}{6}=\pm\dfrac{\sqrt{417}}{6}-1{,}5$

$b=-\left(\dfrac{\sqrt{417}}{6}+1{,}5\right)$ или $\dfrac{\sqrt{417}}{6}-1{,}5$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{417}}{6}-1{,}5};\ y=\pm\sqrt{-\dfrac{\sqrt{417}}{6}-1{,}5}$

или наоборот, но тогда под корнем – отр. число

$\Rightarrow$ так быть не может

Ответ: $x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{7}$ или $y=\pm\sqrt{3};\ x=\pm\sqrt{7}$

Чистовик 2

№5

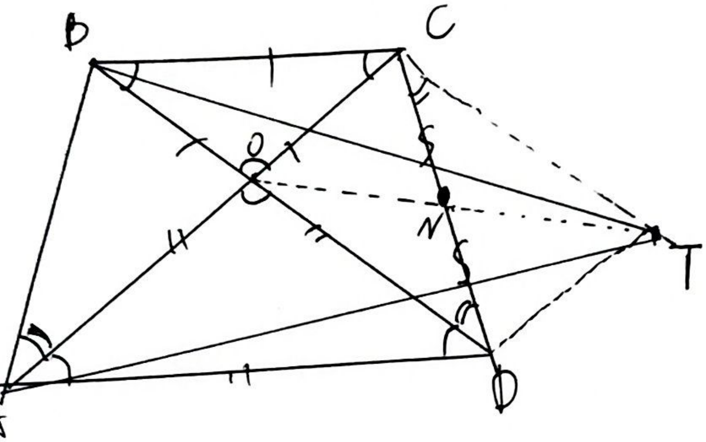
всего – 15 дублей => шанс взять его $= \frac{15}{15^2} = \frac{1}{15}$

если человек возьмет дубль, то у него есть право взять только одну из 14^2 карт. Тогда у него есть $15 \cdot \cancel{1} \cdot 14^2$ способов вытащить дубль и вторую карту так, чтобы на них не совпадало ни одно число.

Ответ: $15 \cdot 14^2$ способов

Чистовик (3)

№7



ABCD – равнобедренная трапеция, т.к $BC \parallel AD$ и $BD = AC$

б) $AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos 120^\circ =$

$= 9 + 16 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 25 + 12 = 37$

$S_{ABT} = AB \cdot BT \cdot \sin 60^\circ = 37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$AB = BT = AT$ т.к $\triangle ABT$ – правильный

$S_{ABCD} = \cancel{\frac{\sin 60^\circ}{2} \cdot 1 \cdot 3}$ $S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\sin 60^\circ}{2} \cdot 3 \cdot 7 + \frac{\sin 60^\circ}{2} \cdot 4 \cdot 7 =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 49$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{\frac{49}{2}} = \frac{74}{49}$

Ответ: $\frac{74}{49}$

Черновик

4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$x^2=a$
$y^2=b$

$\cancel{x^4}+y^4$ $(x^2-y^2)^2+x^2y^2=37$

$(x^2-y^2)^2+6(x^2+y^2)+(x^2-y^2)=44$

$(x^2-y^2)(1$

$7x^2+7y^2-3x^4-3y^4=7-3\cdot 37$

$7x^2+y^2-3x^2y^2$

$7x^2+y^2(7-3x^2)$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$1\cdot 15$

$-(7a+7b)+(a+b)^2=30$

$(a+b)^2-7(a+b)-30=0$

$((a+b)-10)(a+b+3)=0$

$a+b=10$, $a+b=-3$, $\cancel{b=}a$

$12\cdot 2$

$a=10-b$;

$12-7$

$7a+70-7a-30a+3a^2=7$

63 63

$(3a-\cancel{7})(a+\cancel{4})$

$(3a-12)(a+2)$

$7a-21-7a+9a+3a^2=7$

$3a^2+3a-28=0$

a^2+3a-

Черновик

5

$7a-7(a+3)+3a(a+3)=7$

$-21+3a^2+9a=7$

$3a^2+9a-28=0$

$D=81+4\cdot3\cdot28=81+16\cdot3\cdot7=$

$=3(16\cdot7+27)$

$3\cdot9$

$D=9^2+4\cdot28\cdot3$

$12+9$

2^2

$16\cdot7=112$, $112+27=139$

$17\cdot7$

13^2

$13\cdot13$

$139:7$

$139:13$

$180-120-60$

$17\cdot7=119$

$7a+7(-3-a)-3a(-3-a)=7$

$-21+9a+3a^2$

$139:7$

$a^2+(3+a)^2+(3+a)a$

$a^2+a^2+9+6a+3a+a^2=37$

$3a^2-3a+9=37$

$\cancel{a^2-a+3=0}$

$+9a$

$28\cdot12=336$

$336+81=417$

$417:3=139$

Черновик

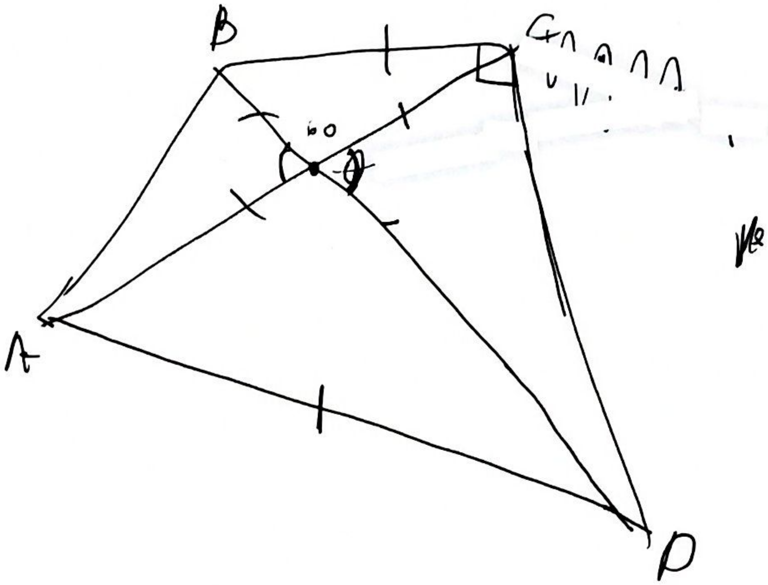
15×15

75

15

225

6

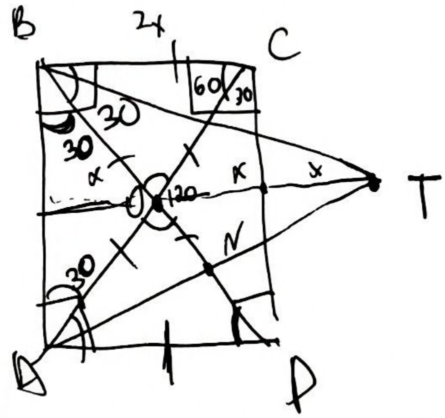


$$\frac{15^2!}{(15^2-2)!\cdot 2!)}$$

$$\frac{225!}{223!\cdot 2!} = \frac{224\cdot 225}{2} =$$

$$= 112\cdot 225$$

25+



$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{1}$ $\cancel{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{3}$ $\cancel{\frac{2}{2}}$ $\frac{3}{3}$ $\cancel{\frac{2}{3}}$ $\cancel{\frac{2}{1}}$ $\frac{3}{1}$ $\cancel{\frac{3}{2}}$

$$\frac{3x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot x$$

$$\frac{mn}{m+n}$$