Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

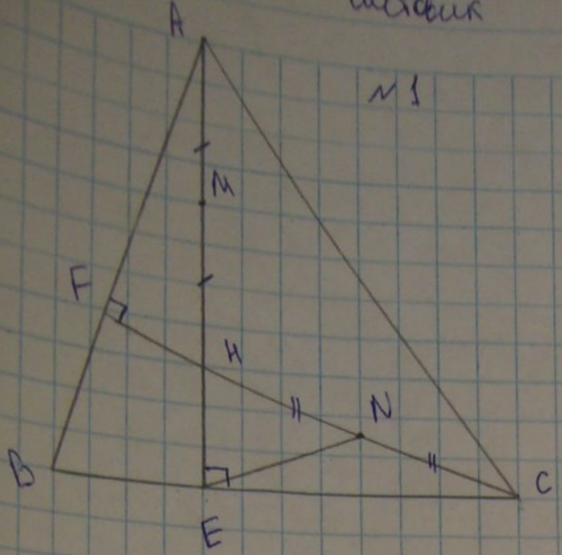
Шифр: **211005248**

ID профиля: **882859**

Вариант 14

Чистовик

№1



Т.к. $\triangle AFH$ и $\triangle CHE$ - прямоугольные, то $FM = AM = AH$ и $HN = NE = NC$

Тогда $\triangle FMH$ и $\triangle HNE$ - равнобедренные и $\angle MFH = \angle MHF = \angle NHE = \angle NEH$.

Т.к. $FM \parallel NE$, то $\angle MFH = \angle HNE$. Тогда $\triangle HNE$ - правильный и $\angle NHE = 60°$.

Аналогично, $\triangle FMH$ - правильный.

$\triangle CHE \sim \triangle CFB$ ($\angle HEC = \angle BFC$ и $\angle C$ - общий) $\Rightarrow \angle B = \angle CHE = 60°$.

$AB = \frac{AE}{\sin 60°} = 10\sqrt{3}$ и $BC = \frac{CF}{\sin 60°} = 16\sqrt{3}$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = 120\sqrt{3}$.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60° = 588$

$AC = 14\sqrt{3}$.

По обобщенной теореме синусов $R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = 14$.

Ответ: $60°$, $120\sqrt{3}$, 14

211005248 (U882859 M1275982)

Чистовик

№ 2

Пусть числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

По условию $29a_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 13a_n + \sum_{i=1}^{n} a_i = 450$

$\Rightarrow$ $29a_1 = 13a_n$. т.к. $a \in N$, то $a_n \vdots 29$.

т.к. $14a_n < 13a_n + \sum_{i=1}^{n} a_i = 450$, то $a_n < 32\frac{1}{7}$.

с учётом того, что $a_n \in N$ и $a_n \vdots 29$, делаем вывод $a_n = 29$
$a_1 = 13$.

Тогда $\sum_{i=1}^{n} a_i = 450 - 13 \cdot 29 = 73$.

Тогда сумма всех чисел, кроме первого и последнего равна 31.

т.к. числа лежат в промежутке от 13 до 29, то есть только 2 варианта.

$31 = 14 + 17 = 15 + 16$.

Ответ: 13, 14, 17, 29 или 13, 15, 16, 29.

Чистовик

№ 3

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$x^2+2x(a-y)+2y^2+2a^2=0$

$D=4a^2-8ay+4y^2-8y^2-8a^2=-4(a^2+2ay+y^2)=-4(a+y)^2$

$-4(a+y)^2\leq 0$. Чтобы уравнение имело решение и точка A существовала

$D=-4(a+y)^2\geq 0 \iff a+y=0$ или $y=-a$

Тогда $x_A=\frac{-2a+2y}{2}=-a+y=-2a$

Рассмотрим уравнение окружности:

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

Т.к. это уравнение окружности, то $a\neq 0$.

$x^2+y^2-2ax-\frac{6}{a}x-2y+a^2+\frac{9}{a^2}=0$

$(x-(a+\frac{3}{a}))^2-(a+\frac{3}{a})^2+(y-1)^2-1+a^2+\frac{9}{a^2}=0$

$(x-(a+\frac{3}{a}))^2+(y-1)^2=7$

Т.к. B – центр этой окружности, то $x_B=a+\frac{3}{a}$

Получается $x_A=-2a$, $x_B=a+\frac{3}{a}$

уравнение прямой $x-4=0$.

точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой, если они лежат в разных полуплоскостях, на которые прямая разбивает плоскость. Т.е. (x_A-4) и (x_B-4) разного знака

$\iff (x_A-4)\cdot(x_B-4)<0$

Черновик

№ 3

ω : $a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$.

$a^2x^2 - 2x(a^3 + 3a) + a^2y^2 - 2ya^2 + a^4 + 9 = 0$

т.к. это уравнение окружности, то $a \neq 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - \frac{6}{a}x - 2y + a^2 + \frac{9}{a^2} = 0$

$x^2 - 2x(a + \frac{3}{a}) + y^2 - 2y + a^2 + \frac{9}{a^2} = 0$

$(x - (a + \frac{3}{a}))^2 - (a + \frac{3}{a})^2 + (y-1)^2 - 1 + a^2 + \frac{9}{a^2} = 0$

$(x - (a + \frac{3}{a}))^2 \cancel{- a^2} - 6 \cancel{- \frac{9}{a^2}} + (y-1)^2 - 1 \cancel{+ a^2} \cancel{+ \frac{9}{a^2}} = 0$

$(x - (a + \frac{3}{a}))^2 + (y-1)^2 = 7$

т.к. B - центр ω, то $B(a + \frac{3}{a}; 1)$.

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$.

$x^2 + 2x(a - y) + 2y^2 + 2a^2 = 0$

~~$(x + (a-y))^2$~~

$D = 4a^2 - 8ay + 4y^2 - 8y^2 - 8a^2 = -4(a^2 + 2ay + y^2) = -4(a+y)^2$

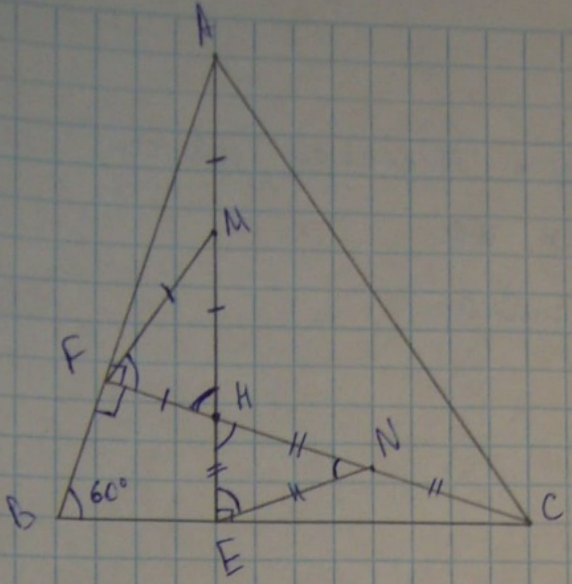
т.к. $4(a+y)^2 \geq 0$, то $-4(a+y)^2 \leq 0$. Чтобы уравнение имело решение $D = -4(a+y)^2 \geq 0 \Rightarrow a + y = 0$. ~~$y = a$~~ $y = -a$

Тогда $x = \frac{-2a + 2y}{2} = -a + y = -2a$.

Получается $x_A = -2a$, $x_B = a + \frac{3}{a}$

211005248 (U882859 M1275982)

Черновик



Т.к. $\triangle AFH$ и $\triangle CHE$ – прямоугольные, то $FM = AM = MH$ и $HN = EN = NC$

Тогда $\triangle FMH$ и $\triangle HNE$ – равнобедренные и $\angle MFH = \angle MHF = \angle NHE = \angle NEH$.

Т.к. $FM \parallel NE$, то $\angle MFH = \angle HNE$. Тогда $\triangle HNE$ – равносторонний и $\angle NHE = 60^\circ$.

Аналогично, $\triangle FMH$ – равносторонний.

$\triangle CHE \sim \triangle CFB$ ($\angle HEC = \angle BFC$ и $\angle C$ – общий) $\Rightarrow \angle B = \angle CHE = 60^\circ$

$\cancel{BC = \frac{CH \cdot CF}{CE} = \ldots = \frac{22 \cdot \ldots \cdot 24}{22 \cdot \sin 60^\circ} = 16\sqrt{3}}$.

Аналогично, $AB = \cancel{\frac{AH \cdot AE}{AF} = \frac{4 \cdot 15}{4 \sin 60^\circ} =}$

$AB = \frac{AE}{\sin 60} = 10\sqrt{3}$ и $BC = \frac{CF}{\sin 60} = 16\sqrt{3}$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 120\sqrt{3}$.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cos 60^\circ = 588$

$AC = 14\sqrt{3}$

По обобщенной теореме синусов $R = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = 14$

Ответ: 60°, $120\sqrt{3}$, 14

211005248 (U882859 M1275982)

Черновик

№2

$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 13 \\ \hline 87 \\ 29 \\ \hline 377 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 450 \\ -377 \\ \hline 73 \end{array}$$

$29a_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 13a_n + \sum_{i=1}^{n} a_i = 450$

$29a_1 = 13a_n$

$$\begin{array}{r|l} 225 & 7 \\ \cline{2-2} 21 & 32 \\ \hline 15 & \\ 14 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

т.к. $a \in N \Rightarrow a_1 \vdots 13$ и $a_n \vdots 29$

т.к. $14a_n < 13a_n + \sum_{i=1}^{n} a_i = 450$

$a_n < 32\frac{1}{7}$, с учетом того что $a_n \in N$ и $a_n \vdots 29$

делаем вывод $a_n = 29$. и $a_1 = 13$.

Тогда $\sum_{i=1}^{n} a_i = 450 - 13 \cdot 29 = 450 - 377 = 73$

$13 < a_j < 29$ и $\sum_{j=2}^{n-1} a_j = 31$

$31 = 14 + 17 = 15 + 16$, других вариантов нет.

13, 14, 17, 29

и

13, 15, 16, 29

211005248 (U882859 M1275982)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005248**

ID профиля: **882859**

Вариант 14

Чистовик

№1

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Пусть $a=x^2$, $b=y^2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 7(a+b)-3ab=7 \\ (a+b)^2-3ab=37 \end{cases}$$

Пусть $u=a+b$, $v=ab$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 7u-3v=7 \\ u^2-3v=37 \end{cases} \Rightarrow u^2-37=7u-7=3v$$

$$u^2-7u-30=0$$

$$\left[\begin{array}{l} u=10 \\ u=-3 \text{ - не подходит} \end{array}\right. \Rightarrow v=21$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \text{ и } b=7 \\ a=7 \text{ и } b=3. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \text{ и } y=\pm\sqrt{7} \\ x=\pm\sqrt{7} \text{ и } y=\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};\sqrt{7})$,

$(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};\sqrt{3})$

Чистовик.

№5

Пусть n/m – карточка с числом n на синей стороне и числом m на красной стороне.

Подходящие способы вытаскивания карт.

1 карта	2 карта
a/a 15 сп, т.к. 15 дублей в колоде	b/b 14 сп, т.к. осталось 14 дублей в колоде
a/a 15 сп, т.к. 15 дублей в колоде	b/c 14·13 сп, т.к. 14 сп выбрать число на одной стороне и 13 сп – на другой
~~b/c~~ ~~15·14 сп, т.к. 15 сп выбрать число на одной стороне и 14 сп – на другой.~~	~~a/a~~ ~~13 сп., т.к. в колоде только 13 подходящих дублей~~

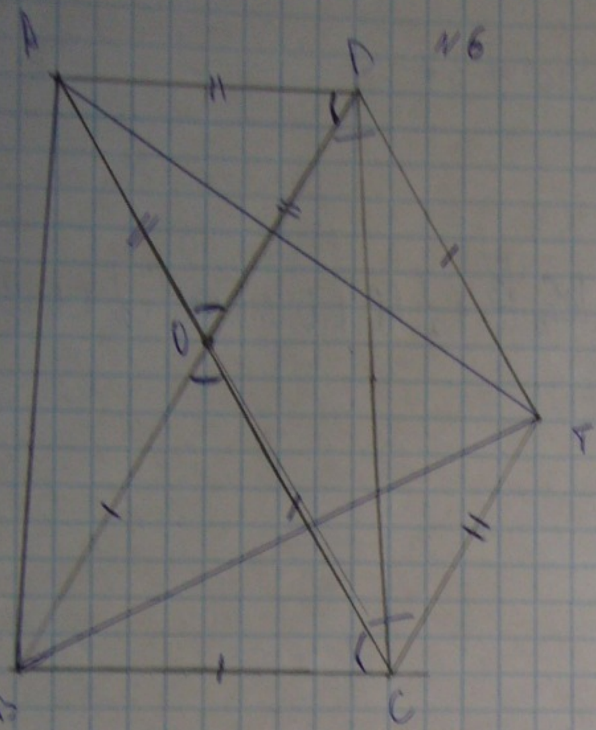
~~Итого способов 15·14 + 15·14·13 + 15·14·13 = 5670~~

~~Ответ: 5670 способов~~ Зачеркнул, т.к. пришло пояснение к задаче.

Итого способов $15 \cdot 14 + 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2940$

Ответ: 2940 сп.

№6



а) т.к. $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – правильные, то $\angle ADO = \angle AOD = \angle BOC = \angle BCO = 60°$

и $AD = DO = AO$, $CO = BC = BO$.

$\angle AOB = 180° - 60° = 120°$

В силу симметрии T относительно середины CD ~~DT=OC~~

ODTC – параллелограмм. Тогда $\angle ODT = \angle OCT = 180° - \angle DOC = 60°$.

и $DT = OC$, $CT = OD$.

Тогда $\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle TCB \Rightarrow AB = AT = BT$, т.е.

$\triangle ABT$ – правильный.

Чистовик

б) $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 120° = 37$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + S_{AOB} + S_{DOC} = \frac{AD^2\sqrt{3}}{4} + \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin 120° + \frac{1}{2} DO \cdot CO \cdot \sin 120° =$

$= \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{16\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{37\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{37}{49}.$

Ответ: $\frac{37}{49}.$

4

Черновик.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 3 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$3x^4+3y^4-3x^2y^2-7x^2-7y^2+3x^2y^2=104$$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=a+b \\ v=ab \end{cases} \qquad u^2 \geq 4v$$

$$3a^2+3b^2 \cancel{-3ab} \cancel{-7a-7b} +3ab=104$$

$$\begin{cases} 7u-3v=7 \\ u^2-3v=37 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 49 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$7u-7=u^2-37$$

$$u^2-7u-30=0$$

$$\left[\begin{array}{l} u=10 \\ u=-3 \text{ - не подходит.} \end{array}\right.$$

$$70-3v=7$$

$$v=21$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} a=3 \quad b=7 \\ a=7 \quad b=3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \text{ и } y=\pm\sqrt{7} \\ x=\pm\sqrt{7} \text{ и } y=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\sqrt{3}; -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{7})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{7})$; $(\sqrt{3}; \sqrt{7})$;

$(-\sqrt{7}; -\sqrt{3})$ $(-\sqrt{7}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{7}; -\sqrt{3})$; $(\sqrt{7}; \sqrt{3})$

Черновик

№ 5

$\frac{a}{a}$

$14 \cdot 13$

a/a и b/b — $15 \cdot 14$

a/a и b/c — $15 \cdot 14 \cdot 13$

b/c и a/a — $15 \cdot 14 \cdot 13$

$15 \cdot 14(1 + 13 + 13) = 27 \cdot 15 \cdot 14$

1 дубль, 2 дубль

15 сп, 14 сп

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 14 \\ \hline 60 \\ 15 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 210 \\ \times 27 \\ \hline 1470 \\ 420 \\ \hline 5670 \end{array}$$

5670 сп.

Пусть n/m — карточка с числом n на синей стороне, m на красной стороне.

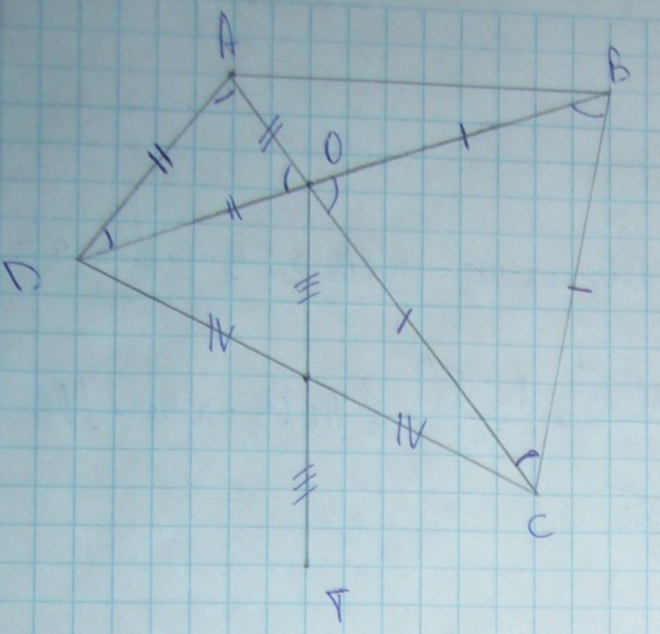
1 карта	2 карта
a/a 15 сп т.к 15 дублей	b/b 14 · ~~13~~ сп т.к 14 дублей осталось
a/a 15 сп т.к	b/c 14 · 13, т.к первое число можно выбрать 14 сп и 2 – 13 сп
b/c	a/a

Итого способов $15 \cdot 14 + 15 \cdot 14 \cdot 13 + 14 \cdot 13 \cdot 15 = 5670$

Ответ: 5670

$$\begin{array}{r} 210 \\ \times 14 \\ \hline 840 \\ 210 \\ \hline 2940 \end{array}$$

211005248 (U882859 M1275983)

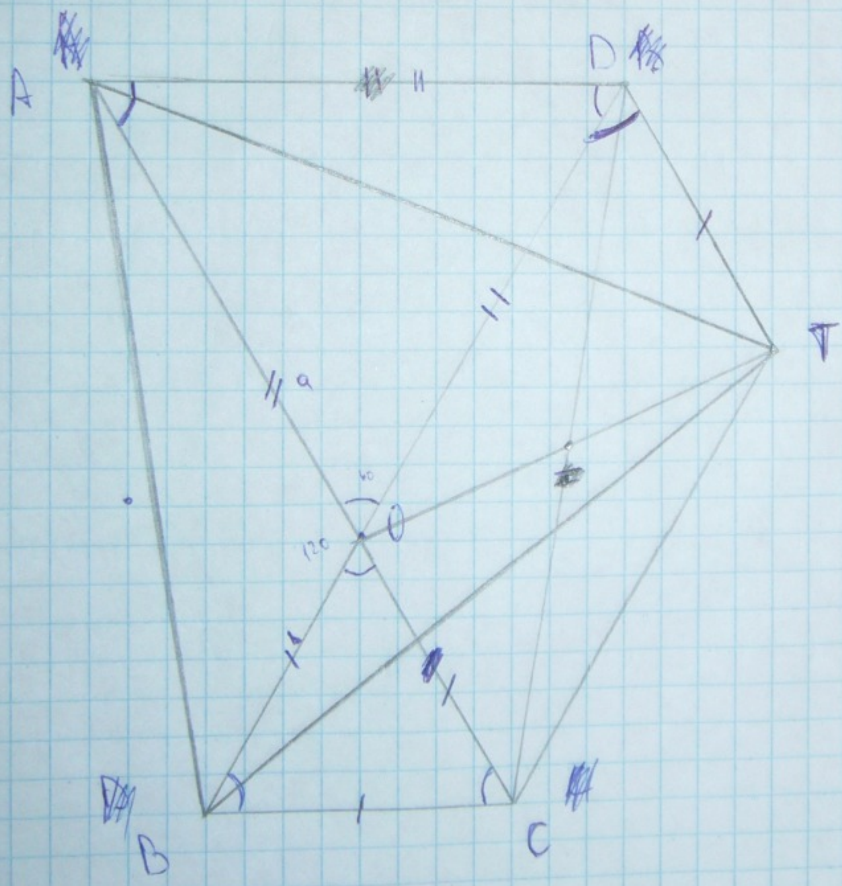


$\frac{1}{2}$ $\frac{(1)\,a\sqrt{3}}{2}$

б) $S_{ABCD} = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{4} + \frac{16\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\frac{3\cdot4\cdot}{4}$

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}$

$\cancel{\frac{25\sqrt{3}}{4}}$ $\frac{25\sqrt{3}+24}{4}$



$AB^2 = 9 + 16 + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\cdot12 = 37$

$S_{ABT} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{37\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}+24}{4}} =$

$= \frac{37\sqrt{3}}{25\sqrt{3}+24} = \ldots$