Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

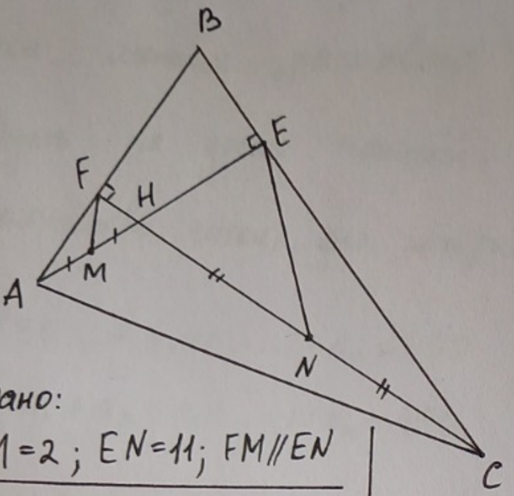
Шифр: **211005209**

ID профиля: **830896**

Вариант 14

Лист 1 Чистовик

Задание 1



Дано:

$FM = 2$; $EN = 11$; $FM \parallel EN$

$\angle ABC$; S_{ABC}; R — ?, где

S_{ABC} — площадь $\triangle ABC$

R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности

Решение:

FM — медиана в прямоугольном треугольнике AFH $\Rightarrow$ $FM = MH$ (по св-ву прям. треугольника)

EN — медиана в прямоугольном треугольнике HEC $\Rightarrow$ $EN = HN$ (по св-ву прям. треуг.)

$FM \parallel EN \Rightarrow \angle MFH = \angle HNE$

$\triangle FMH \sim \triangle ENH$ (по 2-м сторонам и углом между ними) $\Rightarrow \angle FMH = \angle HNE$

$\Rightarrow \angle FHM = \angle MFH$ (т.к. $\triangle FMH$ — равнобедренный)

$= \angle FMH \Rightarrow \triangle FMH$ — равносторонний

$\Rightarrow \angle FHA = 60° \Rightarrow \angle FAH = 30° \Rightarrow \angle ABC = 60°$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \frac{1}{2}(\underset{AH+HH}{\underset{\parallel}{2 \cdot FM}} + \underset{HE}{\underset{\parallel}{EN}}) \cdot (tg\angle BAE \cdot \underset{BE}{\underset{\parallel}{AE}} + ctg\angle ECH \cdot \underset{EC}{\underset{\parallel}{HE}}) =$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 11) \cdot (tg\,30° \cdot (2 \cdot 2 + 11) + ctg\,30° \cdot 11) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 15 + \sqrt{3} \cdot 11\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$$

$$\left[S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}\right]$$

По теореме синусов: $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$

По теореме косинусов: $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2 \cdot AH \cdot HC \cdot \cos\angle AHC$

$$\Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{\sqrt{(2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 11)^2 - 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (11 \cdot 2) \cdot \cos 120°}}{2 \cdot \sin 60°} = \frac{\sqrt{4 \cdot 4 + 4 \cdot 121 + 4 \cdot 22 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}}{\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{14\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 14$$

Ответ: $60°$; $120\sqrt{3}$; 14

Лист 2 Чистовик

Задание 2

Т.к. на доске написаны различные натуральные числа, то мы можем „расставить" их в порядке возрастания.

Пусть на доске написан набор чисел $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ (где n – количество чисел), для которых $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_n$. Тогда по условию:

$$\begin{cases} 30a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 450 \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + 14a_n = 450 \end{cases} \Rightarrow \quad 29a_1 = 13a_n$$

Т.к. числа натуральные, то $a_1 \vdots 13$ и $a_n \vdots 29$

Докажем, что $a_1 = 13$ и $a_n = 29$.

Пусть $a_1 > 13$, тогда $a_1 \geq 2 \cdot 13 = 26$, но $29 \cdot 26 = 377 \cdot 2 > 450$

$\times$ т.к. $30a_1 < 450$

$\Rightarrow a_1 = 13 \Rightarrow a_n = \frac{29a_1}{13} = 29$

$\Rightarrow 30 \cdot 13 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + 29 = 450 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 31 \\ 13 < a_2 < a_3 \dots < a_{n-1} < 29 \end{cases}$$

Т.к. $a_2 \geq 14$, то в наборе всего 4 числа

$\Rightarrow a_2 + a_3 = 31$

a_2	a_3	a_2+a_3
14	15	29
14	17	31
15	16	31
16	17	>31
⋮	⋮	

А 14+15 и 14+16 в сумме дают меньше 31.

Все остальные пары чисел в сумме дают больше 31.

$\Rightarrow$ других пар чисел удовлетворяющих условию нет.

Ответ: всего существует 2 набора чисел: 13; 14; 17; 29

13; 15; 16; 29

211005209 (U830896 M1274304)

Лист 3

Чистовик

Задание 3

Преобразуем уравнение окружности с ~~точкой~~ центром в точке B в общий вид:

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$(a^2x^2 - 2ax(a^2+3) + (a^4+6a^2+9)) + (a^2y^2 - 2ay \cdot a + a^2) = 6a^2 + a^2 \Leftrightarrow$

$(ax - (a^2+3))^2 + (ay - a)^2 = 7a^2$

Из данного уравнения мы можем найти координаты $(x_B; y_B)$ точки B

$ax_B - (a^2+3) = 0 \Rightarrow x_B = \frac{a^2+3}{a}$ ($a \neq 0$, т.к. иначе уравнение для окружности не имеет смысла $(9 = 0_{\varkappa})$)

$ay_B - a = 0 \Rightarrow y_B = 1$

Преобразуем уравнение для координат точки A:

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(a^2 + ax + \frac{x^2}{4}\right) + \left(y^2 - xy + \frac{x^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{\left(a + \frac{x}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(y - \frac{x}{2}\right)^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} a + \frac{x}{2} = 0 \\ y - \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2a \\ y = \frac{x}{2} = -a \end{cases}$

Найдём нужные нам значения параметра a:

1) $a > 0$ $(x_B < 0 < 4 \Rightarrow x_A > 4)$

$\begin{cases} \frac{a^2+3}{a} > 4 \\ -2a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a-1) > 0 \\ a > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ a > -2 \end{cases} \Rightarrow$

$a \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$

Лист 4 Чистовик

Задание 3 (продолжение)

2) $a<0$ $(x_A<0<4 \Rightarrow x_B>4)$

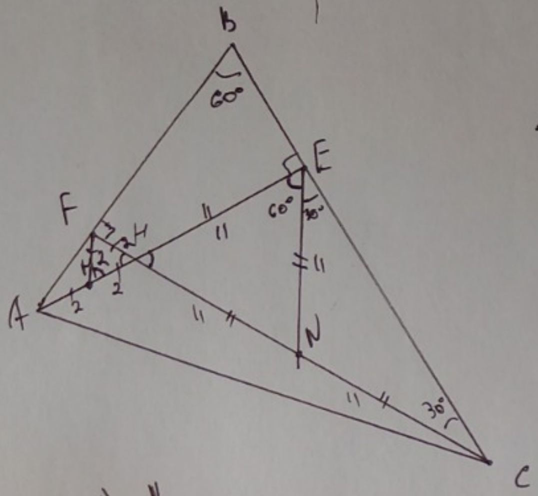
$$\begin{cases} \frac{a^2+3}{a}<4 \\ -2a>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(1;3) \\ a<-2 \end{cases} \Rightarrow a\in\varnothing$$

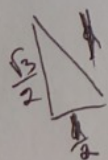
Ответ: $a\in(0;1)\cup(3;+\infty)$

211005209 (U830896 M1274304)

Черновик

№1





$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$8\cdot 15\cdot\sqrt{3}=$

$80+40$

abc

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sqrt{4\cdot 4+4\cdot 121+4\cdot 22}=$

$=2\sqrt{4+121+22}=$

125

$=2\cdot\sqrt{147}$

$4+121$

$125+22=147$

$147=3\cdot 49$

$2\cdot 7$

№3

$2y(y-x)$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+$

$+a^4+9=\infty\Rightarrow$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$a^2x^2-2a^3x-6ax=$

$=a^2x^2-2ax(a^2+3)+$

$+(a^2+3)^2$

№2 $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\ldots\ldots\leq a_n$

$$\begin{cases}30a_1+a_2+a_3+a_4\ldots\; a_n=450\\ a_1+a_2+a_3\ldots+14a_n=450\end{cases}$$

$29a_1=13a_n$

$14+15$

$13\cdot 29=377$

$60-29=31$

$390-13=$

$=377$

$30\cdot 13+a_2+a_3+\ldots+29=450$

390

$13\cdot 30=390-13=$

$=377$

$a_2+a_3\ldots+a_{n-1}=31$

$14\cdot 30=$

$=420-14=406$

$13a+14\cdot 29$

$50-19=31$

211005209 (U830896 M1274304)

Черновик

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0 \Leftrightarrow$

$\left(a^2x^2-2ax(a^2+3)+a^4+9+6a^2\right)+\left(a^2y^2-2ay\cdot a+a^2\right)=a^2+6a^2$

$a^2y^2-2a^2y$

$(ax-(a^2+3))^2$

$B\left(\frac{a^2+3}{a};1\right)$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$2\left(a^2+ax+\frac{x^2}{4}\right)+2\left(y^2 \cancel{+} xy\right.$

$a^2-4a+3>0$

$\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$

$\frac{0,25+3}{0,5}=\frac{3,25}{0,5}=$

$=\frac{\cancel{325}}{\cancel{50}}=\frac{13}{2}$

211005209 (U830896 M1274304)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005209**

ID профиля: **830896**

Вариант 14

Лист 1 Чистовик

Задание 4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4+2x^2y^2-7(x^2+y^2)=30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)(x^2+y^2-7)=30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ x^2+y^2=\left[\begin{array}{l} 10 \\ -3 \text{ — не подх., т.к. } x^2+y^2\geqslant 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)=7+3x^2y^2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2y^2=21 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)^2=16 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-y^2|=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2=7 \\ y^2=3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ y^2=7 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{7} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{7} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ записан в виде координат $(x;y)$

Ответ: $(\sqrt{7};\sqrt{3});(\sqrt{7};-\sqrt{3});(-\sqrt{7};\sqrt{3});(-\sqrt{7};-\sqrt{3});(\sqrt{3};\sqrt{7});(\sqrt{3};-\sqrt{7});(-\sqrt{3};\sqrt{7});(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$

Лист 2 Чистовик

Задание 5

1) Всего дублей в наборе карточек — 15

Т.к. одна из нужных нам карточек точно является дублем, то „выбрать" данную карту мы можем 15-ю способами

2) Т.к. никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках, то карточки, имеющие такое же число как и на „выбранном" дубле, мы „выбрать" не можем.
=> Количество карточек, не содержащих такого же числа как и на дубле — $14 \cdot 14 = 196$ для одного дубля

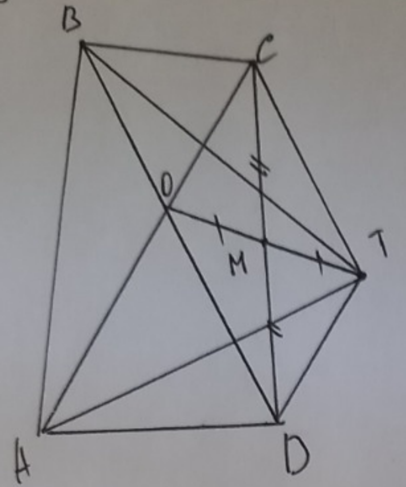
3) Т.к. дублей 15, узнаем общее количество способов:

$15 \cdot 196 = 2940$

Ответ: 2940 способами

Лист 3 Чистовик

Задание 6



M — середина стороны CD

а) Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle DOA$ — правильные, то $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$) ($\angle OBC = \angle ODA$), при этом равнобокая ($AB = CD$), т.к. $\triangle OCD = \triangle OBA$ (по 2-м сторонам и углу между ними); либо $ABCD$ — прямоугольник (если $\angle OBA = 30^\circ$).

$OM = MT$ и $CM = MD$ (по условию) $\Rightarrow$

$CTDO$ — параллелограмм (по признаку) $\Rightarrow$

$\angle OCT = 180^\circ - \angle COD = \angle BOC = 60^\circ = \angle ODT$

$OC = DT$ & $OD = CT$

$\angle BCT = 120^\circ = \angle ADT = 60^\circ + 60^\circ$

$\Rightarrow$ $\triangle ADT = \triangle TCB$ (по 2-м сторонам и углу между ними) $\Rightarrow$

$AT = BT$

~~$\triangle BDA = \triangle BDT$ (по~~.

$\triangle ABC = \triangle BTD$ (по 2-м сторонам ($AC = BD$ (диагонали равнобокой трапеции или прямоугольника)) и углу между ними ($\angle BDT = \angle BCA = 60^\circ$)

$\Rightarrow$ $BT = AB$

$\Rightarrow \triangle ABT$ — правильный

ч.т.д.

б) $S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\underset{BO^2}{BC^2} + \underset{AO^2}{AD^2} - 2 \cdot \underset{BO}{BC} \cdot \underset{AO}{AD} \cdot \cos\angle BOA) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (3^2 + 4^2 + \cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}) = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

[$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2 \cdot BO \cdot AO) \cdot \cos\angle BOA$ по теореме косинусов]

Лист 4 Чистовик

Задание 6 (продолжение)

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h_{тр}$, где $h_{тр}$ – высота трапеции ABCD

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD \right) = \frac{\sqrt{3} \cdot (3+4)^2}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{37\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{37}{49}$$

[S_{ABT} – площадь $\triangle ABT$, S_{ABCD} – площадь ABCD]

Ответ: 37:49

211005209 (U830896 M1274305)

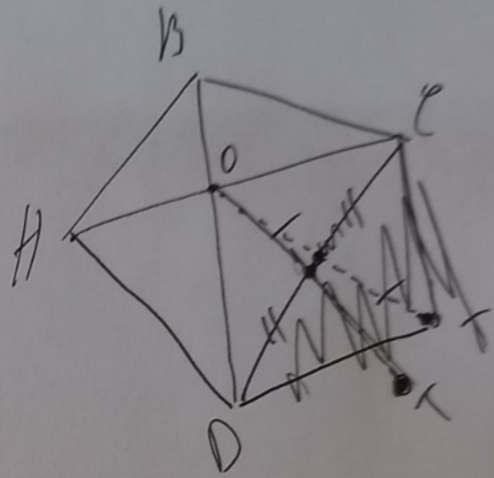
Черновик ~~Чистовик~~

Задание 4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ -3x^2y^2=37\cdot3-3x^4-3y^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^4-3y^4+37\cdot3-7=0 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$



$100-\underbrace{4\cdot21}_{84}=16$

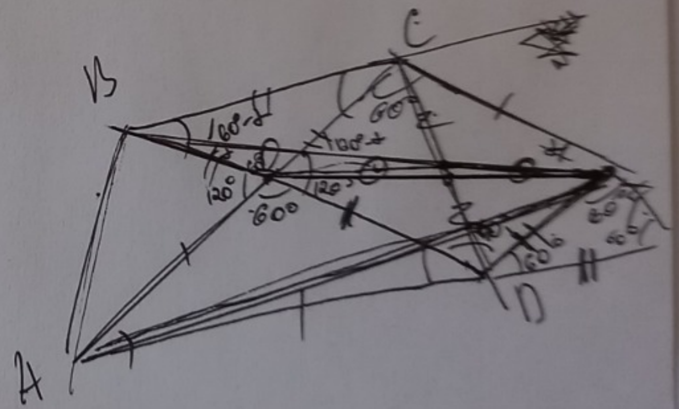
$7\cdot7+7\cdot3-3\cdot7\cdot3=7$

$7\cdot10-7\cdot9=7$

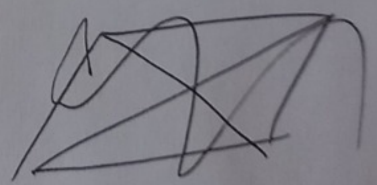
$\underbrace{49+9}_{58}-\underbrace{7\cdot3}_{21}=37$

N5

15^2



$\boxed{15\cdot14^2}$



$\frac{1}{2}ab\sin60°$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

14

14

$12+9+16$

25

$14\cdot14=$

$140+56=196$

$196\cdot15=1960+$

$+980=2940$

211005209 (U830896 M1274305)

Черновик

11

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2+37\cdot 3-3x^4-3y^4=7 \\ \\ 3x^4-\cancel{7}x^2 \end{cases}$$

$$x^4+y^4+2x^2y^2-\underbrace{7x^2-7y^2}_{7(x^2+y^2)}=30$$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-7)=30$$

$$t(t-7)=30$$

$$t^2-7t-30=0$$

$$(t-10)(t+3)=0$$

$$\Rightarrow t=\begin{cases} 10 \\ -3 & \text{- не подх} \end{cases}$$

$$x^2+y^2=$$