Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

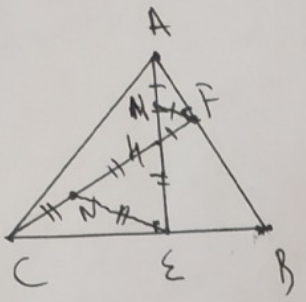
Шифр: **211007773**

ID профиля: **343247**

Вариант 13

Черновик

Математика 9кл.



$FM=2$

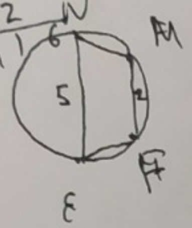
$EN=5$

$FM \parallel EN$

? $\angle ABC$, $S_{\triangle ABC}$, r - ?

$$\begin{array}{r|l} 477 & 13 \\ -39 & 36 \\ \hline 87 & \\ -78 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ +32 \\ \hline 416 \end{array}$$



$tg = \frac{\sqrt{75}}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

~~FN = ME~~

~~MN = FE~~

~~AC/2 = FE~~

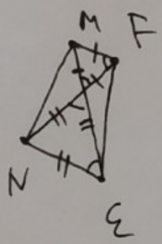
$MN = FE$

FM

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$

(9) $tg\, 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$



$32a_1 + a_2 + \dots a_n = 477$

$a_1 + a_2 + \dots + 14a_n = 477$

$13a_n = 31a_1$

$\angle = 60°$

$a_n \vdots 31 \Rightarrow a_n \geq 31$

$a_1 \vdots 13 \Rightarrow a_1 \geq 13$

$\sqrt{3} = \frac{9}{BE} \Rightarrow BE = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ +18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 75 \\ \hline 1620 \\ +2268 \\ \hline 24300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 31 \\ \hline 403 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 621 \\ \times 28 \\ \hline 4968 \\ +1242 \\ \hline 17388 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 9 \\ \hline 621 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ +192 \\ \hline 2304 \\ \times 3 \\ \hline 6912 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24300 \\ -17388 \\ \hline 6912 \end{array}$$

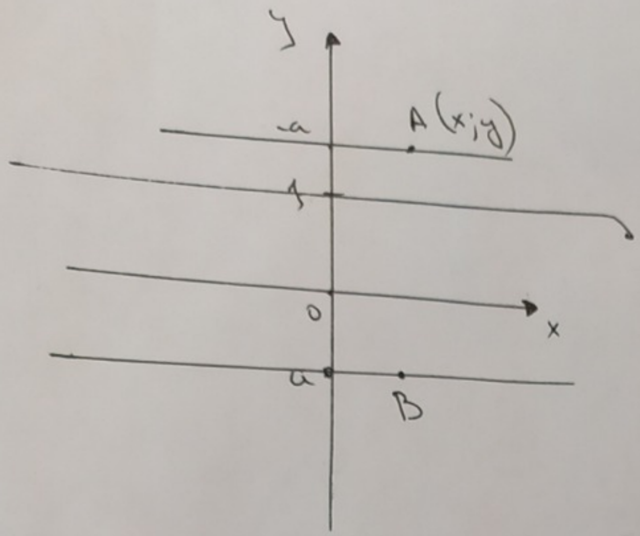
$\sqrt{6912} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2304} =$

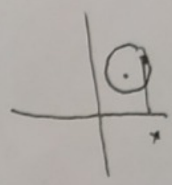
$= 3\sqrt{768} = 6\sqrt{192} = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot$

$\cdot \sqrt{96} = 12\sqrt{48} = 24\sqrt{12} = 48\sqrt{3}$

Черновик

Математика 9кл.





$y\left(\frac{12}{a}-2a\right)$

$\frac{6}{a}-a$

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay^2+a^4+36=0$

$y^2+(2x-2a)y+2x^2+5a^2-6ax=0$ $\quad D=(2x-2a)^2-4(2x^2+5a^2-6ax)=$

$=4x^2+4a^2-8ax-8x^2-20a^2+24ax=$

$=16ax-16a^2-4x^2=-(4x^2-16ax+16a^2)=$

$=-(2x-4a)^2\leq 0 \Rightarrow 2x-4a=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x=2a$

$y=\frac{2a-2x}{2}=a-x=-a$

~~ax~~

~~ay^2~~ $(a^2+12a)y^2-2a^3\cdot y+a^2x^2-8a^2x+a^4+36=0$

$D=4a^6-4(a^2x^2-8a^2x+a^4+36)=0$

$a\neq 0$

$(x-c)^2+(y-d)^2-R=0$ $\quad x^2+y^2-8x-2ay+\frac{12y^2}{a}+a^2+\frac{36}{a^2}=0$

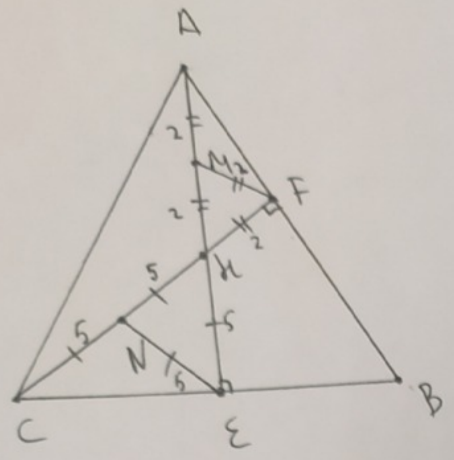
$(x-4)^2+(y-a)^2$ $\quad R=16-\frac{36}{a^2}-\frac{12y^2}{a}$

211007773 (U343247 M1278214)

Чистовик.

Математика 9кл.

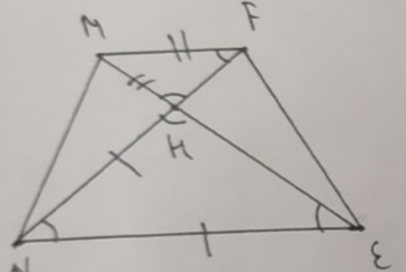
Задача № 1.



AE и CF – высоты; $MF \parallel EN$; $MF=2$; $EN=5$

$\angle ABC,\ S_{\triangle ABC},\ R$ – ?

Решение: заметим, что M и N – это точки Эйлера, а F и E основания высот $\Rightarrow$ все эти точки лежат на окружности 9 точек $\Rightarrow$ MFEN – вписанный. Причём $MF \parallel EN$ и $MF \neq EN$ $\Rightarrow$ это равнобокая трапеция (случай прямоугольника отсекает то, что $MF \neq EN$). Заметим, что $EN = CN = HN$ и $MF = AM = HM$, как



медианы прямоугольных треугольников. Тогда $\triangle MHF$ и $\triangle NHE$ равнобд. $\Rightarrow \angle NEH = NHE$ и $\angle MHF = \angle MFH$, причём ~~$\triangle MHF$~~ $\angle MFH = \angle HNE$ из $MF \parallel NE$, а ещё $\angle MHF = \angle NHE$, ибо они вертикальные $\Rightarrow$ $\angle NEH = \angle NHE = \angle MHF = \angle MFH = \angle NHE \Rightarrow$ в $\triangle MHE$ все углы равны $\Rightarrow$ он равносторонний, и все углы по $60°$. $\angle ABC = 360° - \angle HEB - \angle HFB - \angle EHF = 360° - 90° - 90° - \angle NHM$ (равны как вертикальные) $= 180° - (180° - \angle NHE) = 180° - 180° + \angle NHE = 60°$. Мы знаем, что $NH = NE = HE = 5$ и $MF = MH = HF = 2$. ~~Тогда $AE = \sqrt{HF^2 + AH^2} =$~~

~~$= \sqrt{AF^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$ (из т. Пифагора). Аналогично $CE =$~~ Из теоремы Пифагора:

$AF = \sqrt{AH^2 - HF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$ и $CE = \sqrt{CH^2 - HE^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100-25} = \sqrt{75}$.

Также $BF = \sqrt{BC^2 - CF^2}$ и $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{(AF+BF)^2 - 9^2} \Rightarrow BE^2 = AF^2 + BF^2 - 81 +$

$+ 2AF \cdot BF$ ~~$\Rightarrow \ldots \sqrt{12} \cdot BF \Rightarrow 2\sqrt{12}\, BE = 69 \Rightarrow BE = \frac{69}{2\sqrt{12}}$~~ $\Rightarrow BE^2 = 12 - 81 + BC^2 - CF^2 +$

$+ 2\sqrt{12} \cdot \sqrt{BC^2 - CF^2} \Rightarrow BE^2 = -69 + BE^2 + CE^2 + 2 \cdot BE \cdot CE - 144 + 2\sqrt{12} \cdot \sqrt{BE^2 + CE^2 + 2BE \cdot CE - 144} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -69 + 75 - 144 + 2 \cdot BE \cdot \sqrt{75} + 2\sqrt{12} \cdot \sqrt{2BE \cdot CE + BE^2 - 69} \Rightarrow 2 \cdot 69 = 2\sqrt{75}\, BE + 2\sqrt{12} \cdot$

$\cdot \sqrt{2BE \cdot CE + BE^2 - 69} \Rightarrow 69 - \sqrt{75}\, BE = \sqrt{12} \cdot \sqrt{2BE \cdot CE + BE^2 - 69} \Rightarrow 75BE^2 + 69^2 - 138\sqrt{75}\, BE =$

$= 24\sqrt{75}\, BE + 12BE^2 - 12 \cdot 69 \Rightarrow 63BE^2 + 69 \cdot 81 = \sqrt{75} \cdot BE \cdot 162 \Rightarrow 7BE^2 + 69 \cdot 9 =$

$= \sqrt{75} \cdot BE \cdot 18 \Rightarrow 7 \cdot BE^2 - 18\sqrt{75}\, BE + 69 \cdot 9 = 0 \quad D = 18^2 \cdot 75 - 4 \cdot 7 \cdot 69 \cdot 9 = 6912$

$BE = \frac{18\sqrt{75} \pm 48\sqrt{3}}{14} = \frac{9 \cdot 5\sqrt{3} \pm 24\sqrt{3}}{7} = \frac{45\sqrt{3} \pm 24\sqrt{3}}{7} \Rightarrow BE = 3\sqrt{3}$; $\frac{69}{7} \cdot \sqrt{3}$

1 лист

Чистовик.

Задача №1 (продолжение).

Рассмотрим $BE = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{AE(CE+BE)}{2} = \frac{9(5\sqrt{3}+3\sqrt{3})}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$. Если $BE = \frac{69}{7} \cdot \sqrt{3}$, то $BE > 9\sqrt{3} > 9 = AE \Rightarrow BE > AE$, но $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle BAE = 30^\circ \Rightarrow BE < AE$, в общем можно было это всё не считать, а сказать сразу через $tg\, 60^\circ$. Из теоремы синусов $2R = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{2AC}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{AC}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2 - 2AH \cdot CH \cdot \cos \angle AHC} = \sqrt{4^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{116 + 80 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{116 + 40} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$.

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{39}$.

2 лист

Чистовик. Математика 9кл.

Задача №2.

Пусть у нас есть набор этих чисел: $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Тогда из условия $32a_1+a_2+\ldots+a_n=477=14a_n+\ldots+a_2+a_1 \Rightarrow 31a_1=13a_n \Rightarrow a_1 \vdots 13$ и $a_n \vdots 31 \Rightarrow a_1 \geq 13$ и $a_n \geq 31$, ибо числа натуральные. Тогда все числа ≥ 13. Посмотрим на $32a_1+a_2+\ldots+a_n \geq 32\cdot 13+(n-2)\cdot 13+31=416+31+(n-2)\cdot 13=447+(n-2)\cdot 13$, причём эта сумма равна $477 \Rightarrow (n-2)\cdot 13 \leq 30 \Rightarrow n-2 \leq 2 \Rightarrow n \leq 4 \Rightarrow$ всего чисел было ≤ 4. Понятно, что $a_1=13$ и $a_n=31$, ибо иначе $a_1 \geq 26$ и $a_n \geq 62 \Rightarrow 31a_1$ и $13a_n$ уже будут больше 477, а там ещё надо добавлять $\Rightarrow$ суммы будут больше 477. $a_1=13$ и $a_n=31$, понятно, что при $n=2$ не сходится, ибо $477 \neq 32\cdot 13+31=447 \Rightarrow$ сумма всех чисел, кроме a_1 и a_n $=477-447=30 \Rightarrow$ если $n=3$, то $a_2=30$, подходит, ибо $13<30<31$. Если $n=4$, то $a_2+a_3=30$, причём a_2 и $a_3>11$ и $a_3>a_2 \Rightarrow a_2 \geq 12$ и $a_3 \geq 13 \Rightarrow$ пары $(12;18)$; $(13;17)$; $(14;16)$. То есть мы разобрали все варианты для $n \leq 4$, а для $n>4$ доказали, что такого не бывает.

Ответ: $(11;12;18;31)$; $(11;13;17;31)$; $(11;14;16;31)$; $(11;30;31)$.

Чистовик

Задача №3. Математика 9кл.

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$y^2+(2x-2a)y+2x^2+5a^2-6ax=0$

$D=(2x-2a)^2-4(2x^2+5a^2-6ax)=4x^2+4a^2-8ax-8x^2-20a^2+24ax=-4x^2-16a^2+16ax=-(4x^2-16ax+16a^2)=-(2x-4a)^2\le 0$, если $D<0$, то корней нет $\Rightarrow$ точки A не существует $\Rightarrow D\geq 0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow 2x-4a=0 \Rightarrow x=2a$

$y=\frac{2a-2x\pm\sqrt{D}}{2}=a-x\pm\frac{0}{2}=a-x=$

$=a-2a=-a$. Значит у нас есть точка $A(2a;-a)$.

$\cancel{a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay^2+a^4+36=0}$

$\cancel{x^2+y^2-8x-2ay+\frac{12y^2}{a}+a^2+\frac{36}{a^2}=0}$

$\cancel{(x-4)^2+(y-a)^2+\frac{12y^2}{a}+\frac{36}{a^2}-16=0}$, заметим, что $a\neq 0$, иначе $36=0$, тогда можно изначально поделить обе части на a^2.

~~Т.к. это уравнение окружности~~ $\cancel{\Rightarrow}$ ~~её центр~~ $\cancel{B(4;a)}$ ~~и~~ $\cancel{R=16-\frac{12y^2}{a}-\frac{36}{a^2}}$.

~~Пусть~~ $\cancel{a<1\Rightarrow -a>1}$. ~~Тогда окружность по оси y не выше, чем~~

$\cancel{a+R=a+16-\frac{12y^2}{a}-\frac{36}{a^2}}$, ~~мы хотим, чтобы~~ $\cancel{a+16-\frac{12y^2}{a}-\frac{36}{a^2}<1}$, ~~если левая часть~~ $\cancel{<0}$, ~~то нам уже подходит, если~~ $\cancel{\geq 0}$, ~~то домножаем всё на~~ $\cancel{a^2\Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow a^3+16a^2}$

$\cancel{a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay^2+a^4+36=0}$

$\cancel{x^2+y^2-8x-2ay+\frac{12}{a}y^2+a^2+\frac{36}{a^2}=0}$

$\cancel{(x-4)^2+\left(y-\boxed{\frac{12+a}{a}}y-\boxed{\frac{a}{12+a}}\right)^2+\frac{36}{a^2}-16+a^2-\frac{a}{12+a}=0}$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$

$x^2+y^2-8x-2ay+\frac{12}{a}y+a^2+\frac{36}{a^2}=0$

$(x-4)^2+\left(y-\left(\frac{6}{a}-a\right)\right)^2+a^2+\frac{36}{a^2}-16-\left(\frac{6}{a}-a\right)^2=0$, это уравнение окружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у неё её центр $B\left(4;\frac{6}{a}-a\right)$ и $R=16+\left(\frac{6}{a}-a\right)^2-a^2-\frac{36}{a^2}=$

$=16+\frac{36}{a^2}+a^2-12-a^2-\frac{36}{a^2}=4 \Rightarrow$ окружность не ниже $\frac{6}{a}-a-4$ и не выше,

4 лист чем $\frac{6}{a}-a+4$.

Чистовик

Математика 9кл.

Задача №3 (продолжение).

Пусть $\begin{cases} -a > 1 \Rightarrow a < -1 \\ \frac{6}{a} - a + 4 < 1 \Rightarrow 6 - a^2 + 4a > a \Rightarrow 6 - a^2 + 3a > 0 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 - 3a - 6 < 0$ ветви вверх

$D = 9 + 24 = 33$

$a = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \Rightarrow a = \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2}; \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right)$

Еще II случай, $\begin{cases} -a < 1 \Rightarrow a > -1 \\ \frac{6}{a} - a^2 + 4 > 1 \end{cases}$

5 лист

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007773**

ID профиля: **343247**

Вариант 13

Черновик.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1 \Rightarrow \frac{2}{3}x^2y^2=x^2+y^2-1$$

$$x^4+y^4+x^2+y^2-\cancel{16}\,18=0$$

?

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times\ 11 \\ \hline 131 \\ 131\ \ \\ \hline 1441 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3a+3b-2ab=3 \\ a^2+b^2+\frac{2}{3}ab=17 \end{cases} \Rightarrow +3a^2+3b^2+2ab=51$$

$$\begin{array}{r} 143 \\ \times\ 12 \\ \hline 286 \\ +\ 143\ \ \\ \hline 1716 \end{array}$$

$$3a^2+3b^2+3a+3b=54$$

$$a^2+b^2+a+b=18$$

$$a(a+1)+b(b+1)=18$$

$$\frac{2}{3}ab=a+b-1$$

$$a\left(\frac{2}{3}b-1\right)=b-1$$

$$(3-2b)a=3(\cancel{b}1-b)$$

$$a=\frac{3(1-b)}{3-2b}$$

? $12\cdot121=144\cdot143-132\cdot131-12\cdot22$

? $121=12\cdot143-11\cdot131-22$

 1716 1441

$$\cancel{a^2+b^2+\frac{9(1-b)^2}{(3-2b)^2}+\frac{2}{3}b\cdot\frac{3(1-b)}{3-2b}=17}$$

11 вариантов

$b\neq\frac{3}{2}$

Вытащим дробью: $12\cdot121$

$144\cdot143$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$144-12=132$

~~1+11+11=23~~

$132\cdot131+12\cdot2\cdot11$

$$51x^2+51y^2-34x^2y^2=3x^4+3y^4+2x^2y^2$$

$$51x^2+51y^2=3x^4+3y^4+36x^2y^2$$

$$\cancel{17x^2+17y^2=x^4+y^4+12x^2y^2}$$

$$\cancel{17(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2+10x^2y^2}$$

$$\cancel{51(x^2+y^2)=}$$

$$17x^2+17y^2=x^4+y^4+12x^2y^2$$

144 карточки

Черновик

Математика 9кл

$$9a^2+9b^2+6ab=153$$

$$9a^2+9b^2+4a^2b^2+18ab-12a^2b-12ab^2=9$$

$$4a^2b^2+153+12ab-12a^2b-12ab^2=9$$

$$\cancel{144+12ab=12a^2b+12ab^2} \qquad 144=4ab(4a+4b-ab-1)$$

$$\cancel{12+ab=ab(a+b)} \qquad 36=ab(4a+4b-ab-1)$$

$$\cancel{ab(a+b-1)=12}$$

$$\cancel{a=b=2}$$

$$a=2+x$$
$$b=2-y$$

$$(2+x)(2-y)(3+x-y)=12$$

$$(4+2x-2y-xy)(3+x-y)=12+6x-6y-3xy+4x+2x^2-2xy-x^2y-4y-2xy+2y^2+xy^2=$$

$$\Rightarrow 10x+10y-7xy+2x^2+2y^2-x^2y+xy^2=0$$

$$10(x-y)-xy(x-y)+2x^2+2y^2-7xy=0$$

$$(10-xy)(x-y)+2x^2+2y^2-7xy=0$$

$$\cancel{(x-y)(10-xy}$$

$$a^2b+ab^2-ab=12$$

$$b\cdot a^2-b\cdot a+ab^2-12=0$$

$$\cancel{D=b^2-4b(ab^2-12)}$$

$$\begin{array}{l|l} 3a^2+3b^2+2ab & 3a+3b-2ab \\ \hline -\ 3a^2-2a^2b+3ab & a+b+\frac{2}{3}ab \\ \hline 3b^2+2a^2b-ab & \\ -\ 3b^2-2ab^2+3ab & \\ \hline 2a^2b+2ab^2-4ab & \\ -\ 2a^2b+2ab^2-\frac{4}{3}a^2b^2 & \\ \hline \frac{4}{3}(ab)^2-4ab & \end{array}$$

Черновик. Математика 9кл.

? $12 \cdot 121 = 144 \cdot 143 - 132 \cdot 131 - 12 \cdot 2 \cdot 11$

$121 + 22 + 131 \cdot 11 = 143 \cdot 12$

$12 \cdot 11 \cdot 10 + \frac{12 \cdot 11}{2} = \cancel{144}$

$11 + 2 + 131 = 12 \cdot 13$

$= 66(1+20) = 21 \cdot 66$

$144 =$

132

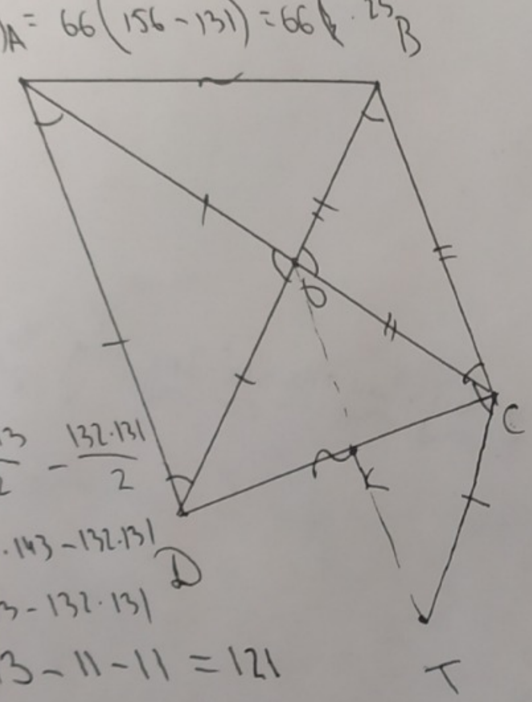
$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 12 \\ \hline 242 \\ +\ 121\ \ \\ \hline 1452 \end{array}$$

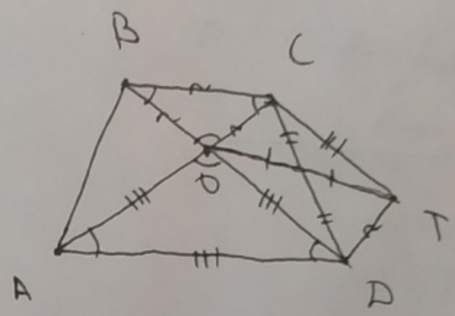
$\frac{144 \cdot 143 - 132 \cdot 131}{2} =$

$1 = a + b - \frac{2}{3}ab$

$\frac{4}{9}a^2b^2 + 1 - \frac{4}{3}ab = a^2 + b^2 + 2ab$

$= \frac{12 \cdot 11}{2}(12 \cdot 13 - 131) = 66(156 - 131) = 66 \cdot 25$





143

$\angle BCT = 120°$

? $12 \cdot 143 = \frac{144 \cdot 143}{2} - \frac{132 \cdot 131}{2}$

? $12 \cdot 2 \cdot 143 = 144 \cdot 143 - 132 \cdot 131$

? $2 \cdot 143 = 12 \cdot 143 - 132 \cdot 131$

$143 - 11 - 11 = 121$

? $12 \cdot 121 - 12 \cdot \frac{11}{2} =$

? $12 \cdot 121 = \frac{144 \cdot 143}{2} - \frac{132 \cdot 131}{2} - 12 \cdot 2 \cdot 11$

$$\begin{cases} 3a + 3b - 2ab = 3 \\ 3a^2 + 3b^2 + 2ab = 51 \end{cases}$$

$\cancel{(3a+3b)}^2$

$(\sqrt{3}a + \sqrt{3}b)^2 - 4ab = 51$

$3a^2 + 2b \cdot a + 3b^2 - 51 = 0$

$D = 4b^2 - 12(3b^2 - 51) =$

$= 4b^2 - 36b^2 + 12 \cdot 51 = 36 \cdot 17 - 32b^2$

$a = \frac{-2b \pm \sqrt{D}}{6} = \frac{-b \pm \sqrt{9 \cdot 17 - 8b^2}}{3}$

$\cancel{3b + 3(-b}$

$3b - b + \sqrt{9 \cdot 17 - 8b^2} - 2b\left(\frac{-b + \sqrt{9 \cdot 17 - 8b^2}}{3}\right) = 3$

? $12 \cdot 121 = \frac{144 \cdot 143}{2} - \frac{132 \cdot 131}{2} - 12 \cdot 2 \cdot 11$

? $121 + 22 + \frac{11 \cdot 131}{2} = \frac{12 \cdot 143}{2}$

? $11 + 2 + \frac{131}{2} = \frac{12 \cdot 13}{2}$

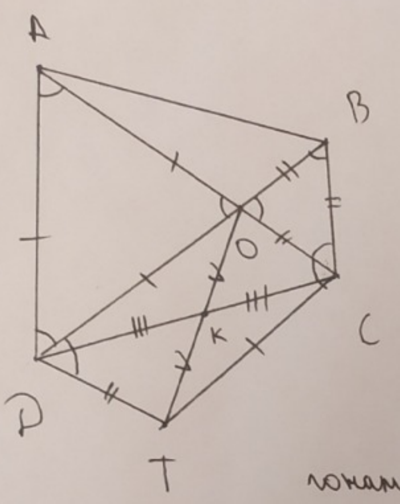
? $22 + 4 + 131 = 12 \cdot 13 = 156$

Чистовик.

Математика 9кл.

Задача №6.

$BC=2;\ AD=3$



? $\triangle ABT$ – правильный,

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Решение: $OK = TK$ из симметрии, $KD = KC$, ибо K – середина $\Rightarrow OCTD$ – параллелограмм, ибо диагонали разбиваются напополам. Тогда $CT = OD$ и $CT \parallel OD \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OCT = \angle BOC$, как накрест лежащие $\Rightarrow \angle BCT = \angle ACB + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$, также $OC = TD$ и $OC \parallel DT \Rightarrow$ аналогично $\angle ODT = \angle AOD \Rightarrow \angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Также $\angle AOB = 180^\circ - \angle AOD = 60^\circ + 180^\circ = 120^\circ$. Тогда $\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle BCT$, ибо у них есть угол 120° и прилежащие к нему стороны равны по AO и BO (просто стороны $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$) $\Rightarrow AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный.

$S_{\triangle ABT} = \sin 60^\circ \cdot \dfrac{AT \cdot BT}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4}$. Заметим, что $ABCD$ – равнобокая трапеция, ибо $\angle ADO = 60^\circ = \angle OBC \Rightarrow AD \parallel BC$ и $AB = CD$, ибо $\triangle AOB = \triangle COD$ по I признаку, причём это не параллелограмм, ибо $BC \neq AD \Rightarrow OD \neq OB \Rightarrow$ диагонали не разбиваются напополам. Тогда $S_{ABCD} = \dfrac{BC+AD}{2} \cdot h = \dfrac{2+3}{2} \cdot h = 2{,}5h$.

$h = \sqrt{AB^2 - \left(\dfrac{AD-BC}{2}\right)^2}$ из теоремы Пифагора $\Rightarrow h = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S_{ABCD} = 2{,}5 \cdot \sqrt{AB^2 - \frac{1}{4}}$.

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4 \cdot 2{,}5 \cdot \sqrt{AB^2 - \frac{1}{4}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{10} \cdot \dfrac{AB^2}{\sqrt{AB^2 - \frac{1}{4}}}$. Понятно, что $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos 120^\circ} =$

$= \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{13 + 12 \cdot 0{,}5} = \sqrt{13+6} = \sqrt{19} \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{10 \cdot \sqrt{19 - 0{,}25}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{10 \cdot \sqrt{18{,}75}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{\sqrt{1875}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{625}} = \dfrac{\sqrt{19}}{25}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{19}}{25}$.

Мг 1

Чистовик. Математика 9кл.

Задача №1.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

Пусть $a=x^2$ и $b=y^2$

$$\begin{cases} 3a+3b-2ab=3 \\ a^2+b^2+\frac{2}{3}ab=17 \Rightarrow 3a^2+3b^2+2ab=51 \end{cases} \Rightarrow 3a+3b+3a^2+3b^2=54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+a^2+b^2=18$$

$$3a+3b-2ab=3 \Rightarrow b=\frac{3-3a}{3-2a} \Rightarrow a+a^2+\frac{3-3a}{3-2a}+\left(\frac{3-3a}{3-2a}\right)^2=18 \Rightarrow (3-2a)^2\cdot a+$$

пусть $a \neq 1{,}5$

$$+(3-2a)^2a^2+(3-3a)(3-2a)+(3-3a)^2=18(3-2a)^2 \Rightarrow (9+4a^2-12a)a+(9+4a^2-12a)a^2+$$

$$+9-9a-6a+6a^2+9+9a^2-18a=18(9+4a^2-12a) \Rightarrow 9a+4a^3-12a^2+9a^2+4a^4-12a^3+$$

$$+9-15a+6a^2+9+9a^2-18a=18\cdot 9+72a^2-18\cdot 12a \Rightarrow -24a-8a^3+4a^4+12a^2+18=18\cdot 9+72a^2-$$

$$-18\cdot 12a \Rightarrow 4a^4$$

Лист 2.

211007773 (U343247 M1278215)

Чистовик.

Математика 9кл.

Задача №5.

В нашей выборке обязан быть дубль, его выбрать 12 способов. Посмотрим, сколько из оставшихся 143 карт мы можем брать, для этого мы поймём, что мы не можем брать ровно $2 \cdot 1 \cdot 11 = 22$, ибо дубль занят $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ на ровной 1 стороне есть эта цифра, на другой остаётся 12 вариантов, и стороны можно менять местами $\Rightarrow$ можно брать $143 - 22 = 121$ $\Rightarrow$ всего вариантов $12 \cdot 121 = 1440 + 12 = 1452$. Но поймём, что если мы взяли дубль, а потом к нему ещё один дубль, то этот вариант мы посчитали 2 раза, ибо их можно менять местами, таких пар $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ $\Rightarrow$ всего вариантов $1452 - 66 =$ $= 1386$.

Ответ: 1386 вариантов.

211007773 (U343247 M1278215)