Часть 1

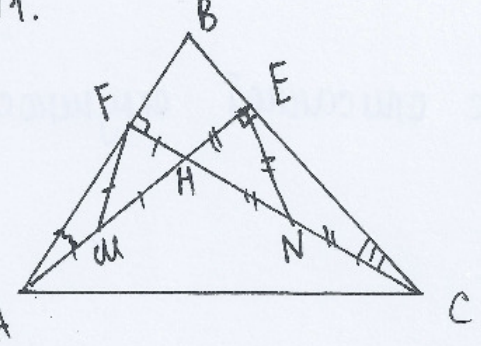
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007553**

ID профиля: **89274**

Вариант 13

Задача №1.



$FM = 2$

$EN = 5$

Т.к $\triangle ABC$ - остроугольный, то высоты пересекаются внутри $\triangle ABC$.

FM - медиана прямоугольного $\triangle AFH$, значит $FM = AM = MH$

EN - медиана прямоугольного $\triangle HEC$, значит $EN = HN = NC$.

$\triangle MFH$ - равнобедренный, т.к $FM = MH \Rightarrow \angle MFH = \angle MHF$.

$\triangle HEN$ - равнобедренный, т.к $EN = HN \Rightarrow \angle NHE = \angle NEH$.

Т.к $FM \parallel EN$, то $\angle MFH = \angle HNE$, т.к. они накрест лежащие.

$\angle MHF = \angle EHN$, т.к они вертикальные $\Rightarrow \angle MFH = \angle MHF = \angle EHN = \angle HEN = \angle HNE$ (т.к $\angle MFH = \angle HNE$ по доказанному).

В $\triangle HEN$ $\angle EHN = \angle ENH = \angle HEN \Rightarrow \triangle HEN$ - равносторонний.

Аналогично $\triangle FMH$ - равносторонний (углы в этих треугольниках по $60°$). Значит $\angle FHE + \angle MHN = 360° - (60° + 60°) = 240°$

$\angle MHN = \angle FHE$ как вертикальные $\Rightarrow \angle FHE = \frac{240°}{2} = 120°$

$\angle ABC = 360° - 90° - 90° - 120° = 60°$ из четырехугольника $FBEH$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$.

$\triangle ABE \sim \triangle AHF$ по 2 углам (они прямоугольные и $\angle FAE$ - общий)

$\frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AF}$; $AF = \sqrt{AH^2 - FH^2} = \sqrt{(2MH)^2 - FH^2} = \sqrt{(2FM)^2 - FM^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$.

$AB = \frac{AE \cdot AH}{AF} = \frac{(2+2+5)\cdot(2+2)}{\sqrt{12}} = \frac{9 \cdot 4}{2\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}}$

$\triangle FBC \sim \triangle EHC$ по 2 углам (они прямоугольные и $\angle BCF$ - общий)

$\frac{FC}{EC} = \frac{BC}{HC}$; $EC = \sqrt{HC^2 - HE^2} = \sqrt{(2HN)^2 - HE^2} = \sqrt{(2EN)^2 - EN^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$

$BC = \frac{FC \cdot HC}{EC} = \frac{(5+5+2)\cdot(5+5)}{\sqrt{75}} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 5}{5\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60° = \frac{9 \cdot 24}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$

Продолжение №1.

$$S_{ABC} = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4R}$$, где R – радиус описанной окружности

$$R = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}}$$

$AC^2 = AO^2+OC^2-2AO\cdot OC\cdot \cos\angle AOC$ по теореме косинусов из $\triangle AOC$

$$AC^2 = (2\cdot 2)^2+(5\cdot 2)^2-2\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot \cos 120^\circ = 16+100+200\cdot\frac{1}{2} = 216$$

$$AC = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$$

$$R = \frac{\frac{18}{\sqrt{3}}\cdot\frac{24}{\sqrt{3}}\cdot 6\sqrt{6}}{4\cdot 36\sqrt{3}} = \frac{24\cdot 2\sqrt{6}}{4\cdot 2\sqrt{3}} = 6\sqrt{2}$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 36\sqrt{3}$, $R = 6\sqrt{2}$

Задача №2. Пусть a_1 – самое маленькое число,
a_n – самое большое,
x – сумма остальных чисел

Тогда $32a_1 + x + a_n = 477$ и $a_1 + x + 14a_n = 477$

$32a_1 + x + a_n = a_1 + x + 14a_n \Rightarrow 31a_1 = 13a_n$

Т.к. 31 и 13 – простые числа, то $a_1 \vdots 13$ и $a_n \vdots 31$.

Т.к все числа натуральные, то $a_1 \geq 13$ и $a_n \geq 31$.

Если $a_1 > 13$, то $a_1 \geq 26$, но тогда $26 \cdot 32 = 832$, что уже больше 477.

Значит $a_1 = 13$.

Если $a_n > 31$, то $a_n \geq 62$, но тогда $62 \cdot 14 = 868$, что уже больше 477

Значит $a_n = 31$.

$32 \cdot 13 + x + 31 = 477 = 32 + x + 31 \cdot 14$

Отсюда следует, что $x = 30$

Остальные числа, т.е все, кроме наименьшего и наибольшего, заключены в промежутке от 14 до 30 включительно.

Тогда сумму, равную 30, мы можем получить 2умя способами Это может быть число 30 или числа 14 и 16, т.к. числа попарно различны

13, 30, 31 или 13, 14, 16, 31 – возможные варианты

Ответ: 13, 30, 31 или 13, 14, 16, 31.

211007553 (U89274 M1277622)

Задача №3. $5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0.$

Решим квадратное уравнение относительно x.

$$2x^2+2x(y-3a)+y^2+5a^2-2ay=0$$

$$D=4(y-3a)^2-8(y^2+5a^2-2ay)=4(y^2-6ay+9a^2)-8y^2-40a^2+16ay=$$

$$=4y^2-24ay+36a^2-8y^2-40a^2+16ay=-4y^2-8ay-4a^2=$$

$$=-4(y^2+2ay+a^2)=-4(y+a)^2\geq 0$$, т.к. x – существует.

$$(y+a)^2\geq 0 \quad |\cdot(-4)$$

$$-4(y+a)^2\leq 0 \quad \Rightarrow \quad y+a=0 \quad \Rightarrow a=-y$$

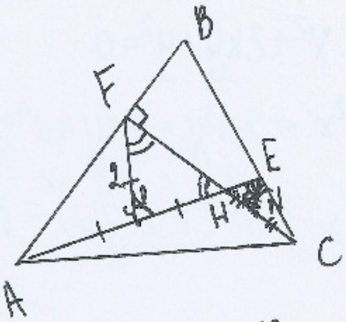
Теперь решим его относительно y

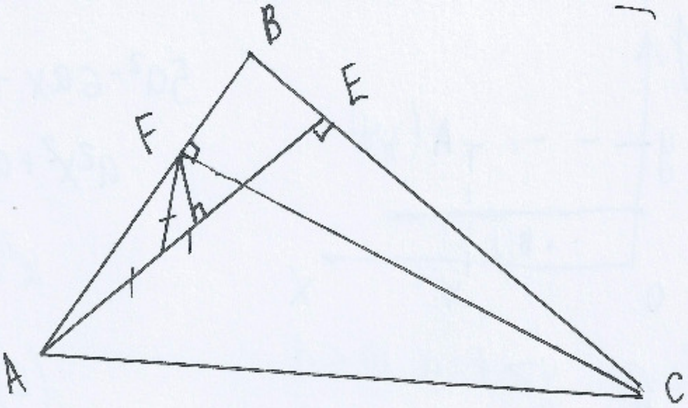
$$y^2+2y(x-a)+2x^2-6ax+5a^2=0$$

$$D=4(x^2-2ax+a^2)-8x^2+24ax-20a^2=-4x^2+16ax-16a^2=$$

$$=-4(x-2a)^2\geq 0$$, т.к. y – существует $\Rightarrow$ тогда $x=2a$

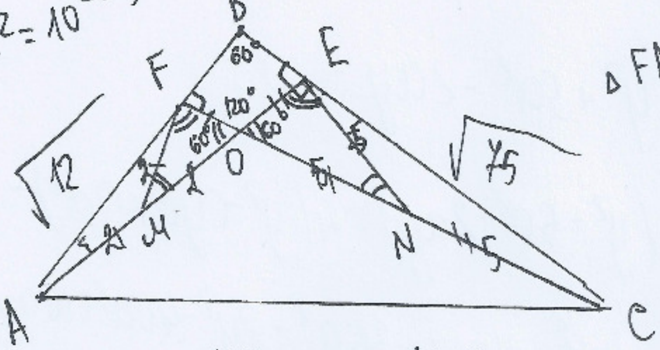
№1.





$AF^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$EC^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$



$\triangle FMO$ и $\triangle OEN$ – Мс

$\angle AOC + \angle FOE = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

$\angle ABC = 60^\circ$

$AC^2 = 4^2 + 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 116 + 10 = 126$

$AC = \sqrt{126} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 7} = 3\sqrt{14}$

$\triangle AFO \sim \triangle AEB$

$\frac{AO}{AB} = \frac{FO}{EB} = \frac{AF}{AE}$

$AB = \frac{AO \cdot AE}{AF} = \frac{4 \cdot 9}{\sqrt{12}} = \frac{36}{2\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}}$

$\triangle FBC \sim \triangle EOC$

$\frac{FC}{EC} = \frac{BC}{OC}$

$BC = \frac{FC \cdot OC}{EC} = \frac{12 \cdot 10}{\sqrt{75}} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 5}{5\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{18 \cdot 24}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} \Rightarrow R = \frac{\frac{18 \cdot 24}{3} \cdot 3\sqrt{14}}{4 \cdot 36\sqrt{3}} = \sqrt{42}$.

$416 + 31 = 447$

$22 \times 13 = 416$

$\sqrt{216} = \sqrt{4 \cdot 54} = 2\sqrt{9 \cdot 6} = 6\sqrt{6}$

№2.

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

$a_1 + \ldots + a_n + 31a_1 = 477 = a_1 + \ldots + a_n + 13a_n$

$31a_1 = 13a_n$

$a_1 \vdots 13 \quad a_n \vdots 31$

$14 + 15 + \ldots + 30 = 44 \cdot 8 + 22 = 344 + 24 = 368$

$62 \times 14 = 248 + 620 = 868$

$26 \times 32 = 52 + 780 = 832$

$13 \cdot 32 = 26 + 390 = 416$

$31 \times 14 = 124 + 310 = 434$

$13 \cdot 32 + x + 31 = 477$

$x = 30$

$13 + x + 434 = 477$

$x = 30$

211007553 (L89274 M1271622)

$416 + 31 = 447$

$\boxed{13, 14, 16, 31 \text{ или } 13, 30, 31}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007553**

ID профиля: **89274**

Вариант 13

Чистовик

Задача №1. $\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 & (1) \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 & (2) \end{cases}$

из (2) уравнения $x^4+y^4=17-\frac{2}{3}x^2y^2$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

из (1) уравнения $3(x^2+y^2)=3+2x^2y^2$; $x^2+y^2=\frac{3+2x^2y^2}{3}$

$(x^2+y^2)^2=\left(\frac{3+2x^2y^2}{3}\right)^2=(x^4+y^4)+2x^2y^2=17-\frac{2}{3}x^2y^2+2x^2y^2$

$(3+2x^2y^2)^2=9\cdot\left(17+\frac{4}{3}x^2y^2\right)$

$9+12x^2y^2+4x^4y^4=9\cdot 17+12x^2y^2$; $4x^4y^4=9\cdot 16$

$x^4y^4=9\cdot 4$; $(x^2y^2)^2=36$.

Т.к $x^2\cdot y^2\geq 0$, то $x^2\cdot y^2=6$; Подставим $x^2\cdot y^2=6$ в

(1) уравнение. $3x^2+3y^2-2\cdot 6=3$; $x^2+y^2=\frac{3+12}{3}=5$

$x^2=5-y^2 \Rightarrow x^2\cdot y^2=(5-y^2)\cdot y^2=6$

$-y^4+5y^2-6=0$. Пусть $y^2=t$

$-t^2+5t-6=0$; $D=25-4\cdot 6=1$

$t=\frac{-5\pm 1}{-2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=2 \end{array}\right.$ $y^2=3$, $y^2=2$

$x^2=\frac{6}{y^2} \Rightarrow x^2=2$, $x^2=3$

$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=\cancel{2^4+3^4+\frac{2}{3}\cdot 1312}$ $2^2+3^2+\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 3=4+9+4=17$

все сходится.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ Либо x и y меняются местами

Ответ: $y=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{2}$; $y=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{2}$; $y=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{2}$; $y=-\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{2}$; $y=\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{3}$; $y=-\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{3}$; $y=-\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{3}$;

Чистовик

Задача №2 Написать на карточках с каждой стороны по одному числу от 1 до 12 – это $12 \cdot 12 = 12^2$ способов. Т.к у нас столько и имеется карточек, то каждый вариант карточки присутствует. Всего дублей – 12 штук, т.к у нас 12 различных чисел. Т.е выбрать карточку-дубль – это есть 12 способов.

Вторую карточку нужно выбрать так, чтобы никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках.

Всего 12^2 ~~карточек~~ карточек, одну мы уже вытянули. Осталось $12^2 - 1$. На карточке-дубль написано какое-то число. И это число встречается ещё на $11 \cdot 2$ карточек, помимо той карточки дубля, т.к данное число может быть со всеми остальными числами как на красной стороне, так и на синей. Значит $12^2 - 1 - 2 \cdot 11 = 12^2 - 23 = 144 - 23 = 121$ вариант вытащить вторую карточку (не дубль).

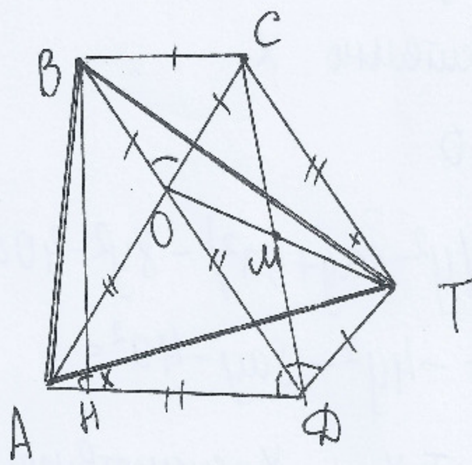
Значит вытащить одновременно две карточки по таким правилам из условия – это $12 \cdot 121 = 12 \cdot 11^2$ способов.

$12 \cdot 11^2 = 1452$

Ответ: 1452 способа.

Чистовик

Задача №3.



а) M – середина CD; $CM = MD$

$OM = MT$, т.к. T симметрично O относительно M.

$\angle OMD = \angle CMT$ как вертикальные

$\triangle OMD = \triangle TMC$ по 2 сторонам и углу между ними ($OM = MT$, $CM = MD$, $\angle OMD = \angle CMT$).

Значит $OD = CT$ и $\angle TOD = \angle CTO$ как соответственные элементы

Значит $CT \parallel OD$, т.к. углы TOD и CTO накрест лежащие, и они равны.

Т.к $OD = CT$ и $CT \parallel OD$, то $OCTD$ – параллелограмм.

$\angle BOC = \angle ODT$ как соответственные углы при $OC \parallel DT$.

$\angle BOC = 60^\circ$, т.к. $\triangle BOC$ – правильный $\Rightarrow \angle ODT = 60^\circ$.

$\angle ODA = 60^\circ$, т.к. $\triangle ODA$ – правильный $\Rightarrow \angle ADT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

~~ΔCTO~~ $\angle OCT = \angle TDO = 60^\circ$ по свойству параллелограмма

$\angle BCO = 60^\circ$, т.к $\triangle BOC$ – правильный $\Rightarrow \angle BCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

$\triangle BCT = \triangle TDA$ по 2 сторонам и углу между ними ($\angle BCT = \angle ADT = 120^\circ$; $AD = CT$, т.к $AD = OD$, а $OD = CT$, т.к $OCDT$ – параллелограмм; $DT = BC$, т.к $DT = OC$, т.к $OCDT$ – параллелограмм, а $OC = BC$). Значит $BT = AT$ как соответственные элементы

Пусть $\angle TAD = x$, тогда $\angle CTB = x$, так как $\angle TAD = \angle CTB$ как соответственные элементы равных треугольников).

$\angle ATD = 180^\circ - \angle ADT - \angle TAD = 180^\circ - 120^\circ - x = 60^\circ - x$

$\angle CTD = 180^\circ - \angle TDO$ как односторонние углы при $CT \parallel OD$.

$\angle CTD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$; $\angle BTA = \angle CTD - \angle CTB - \angle ATD =$

$= 120^\circ - x - (60^\circ - x) = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

чистовик

Продолжение №3. $\triangle BTA$ – равнобедренный, т.к $BT=TA$.

Тогда $\angle ABT = \angle BAT = \dfrac{180^\circ - \angle BTA}{2} = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Получилось, что $\angle ABT = \angle BAT = \angle BTA = 60^\circ$, значит

$\triangle ABT$ – правильный.

б) $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT$ по теореме косинусов из $\triangle BCT$.

$BT^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 120^\circ = 4+9+4\cdot 3\cdot \frac{1}{2} = 13+6 = 19$, т.к

мы доказали, что $CT = AD = 3$, а $BC=2$ по условию.

$$S_{ABT} = \frac{BT \cdot AT \cdot \sin\angle BTA}{2}$$

Т.к $AT=BT$, то $S_{ABT} = \dfrac{BT^2 \cdot \sin\angle BTA}{2} = \dfrac{19 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{19\sqrt{3}}{4}$.

Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle DOC$:

$BO=OC$, т.к. $\triangle BOC$ – правильный; $AO=OD$, т.к $\triangle AOD$ – правильный

$\angle BOA = \angle COD$ как вертикальные

$\triangle ABO = \triangle DOC$ по 2 сторонам и углу между ними

$AB = CD$ как соответственные элементы.

Т.к. $\angle BCO = 60^\circ$ и $\angle OAD = 60^\circ$, то $\angle BCO = \angle OAD \Rightarrow BC \parallel AD$, т.к

эти углы накрест лежащие. $\Rightarrow ABCD$ – равнобедренная трапеция, т.к

$BC \parallel AD$ и $AB=CD$

Проведем $BH \perp AD$; $BH^2 = AB^2 - AH^2$

Т.к $ABCD$ – р/б трапеция, то $AH = \frac{1}{2}(AD-BC) = \frac{1}{2}(3-2) = 0{,}5$.

$BH^2 = BT^2 - AH^2 = 19 - 0{,}25 = 18{,}75 \Rightarrow BH = 2{,}5\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC+AD)\cdot BH = \frac{1}{2}(2+3)\cdot 2{,}5\sqrt{3} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{19\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}} = \frac{19}{25} = 0{,}76$$

211007553 (U89274 M1277623)

Ответ: 0,76.

Черновик. 1. $\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$

$x^2(3-2y^2)=3(1-y^2)$

$x^2=\dfrac{3(1-y^2)}{3-2y^2}$

$$y^4+\left(\frac{3(1-y^2)}{3-2y^2}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{3(1-y^2)}{3-2y^2}y^2=17$$

$$y^4+\frac{9(1-2y^2+y^4)}{9-12y^2+4y^4}+\frac{2(1-2y^2+y^4)}{}$$

$1875=25^2\cdot3$

$$x^4+y^4+2x^2y^2=(x^2+y^2)^2=17+2x^2y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=17+\frac{4}{3}x^2y^2$$

$1875 \,|\, 25$; -175; 75; 125; -125; 0

$$x^2+y^2=\frac{3+2x^2y^2}{3}$$

$\frac{19}{25}=\frac{19\cdot4}{100}=0{,}76$

$$\left(\frac{3+2x^2y^2}{3}\right)^2=17+\frac{4}{3}x^2y^2$$

$$9+12x^2y^2+4x^4y^4=9\cdot17+12x^2y^2;\quad 4x^4y^4=9\cdot16;\quad x^4y^4=36$$

$\boxed{x^2y^2=6}$ $\cancel{x^2y^2=-6}$

$3x^2+3y^2=3+2\cdot6=15,\quad x^2+y^2=5$

$(5-x^2)x^2=6;\quad x^4-5x^2+6=0$

$t^2-5t+6=0$

$D=25-4\cdot6=1$

$t=\frac{5\pm1}{2}=3$ или 2

$x^2=3,\ x^2=2$
$y^2=3,\ y^2=2$

$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=9+4+\frac{2}{3}\cdot3\cdot2=13+4=17$

$121 \times 12 = 242 + 121 = 1452$

к с / к с: 11, 12, 13, 14, … ; 21, 22, 23, …

к с: 121, 122, …

12^2 – всего

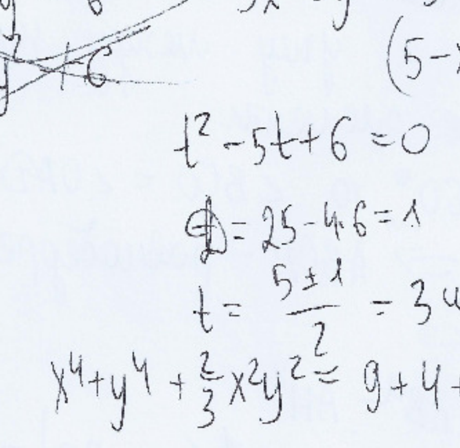
$12\cdot(12^2-12-11)=12\cdot(12\cdot11-11)=12\cdot(11^2)=12\cdot11^2$

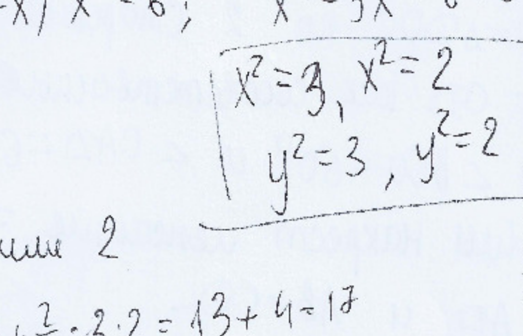
3

$\boxed{\frac{K}{K}}$ с К – 11 штук

$BC=2,\ AD=3$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=?$





$\triangle BCT=\triangle TDA$ по 2 ст. и уг. м. н.

$\triangle ABT$ – р/б, $\angle BTA=60$!

$12 \times 12 = 24 + 12$