Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

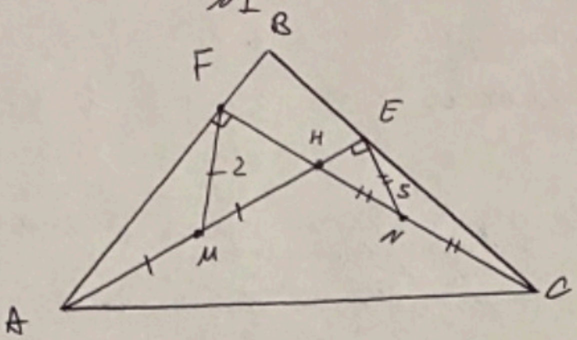
Шифр: **211007322**

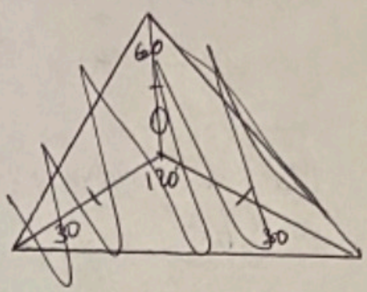
ID профиля: **815874**

Вариант 13

Чистовик

№1





1) $FM = AM = MH$
$EN = HN = NC$ (по св медианы в прямоуг. треуг.)

2) $\angle FMH = \angle HEN$ (т.к. $FM \parallel EN$)

3) $\angle MHF = \angle NHE$ (по св. верт. $\angle$)

4) $\triangle HMF \sim \triangle HEN$ (по двум углам)

5) $\frac{MH}{HE} = \frac{FM}{EN} \Rightarrow \frac{2}{HE} = \frac{2}{5} \Rightarrow HE = 5$
$\frac{FH}{FM} = \frac{HN}{EN} \Rightarrow \frac{FH}{2} = \frac{5}{5} \Rightarrow FH = 2$ (по св подобия и п.4)

6) $\angle EHC = \angle FHA = 60^\circ$ (по св равностор. треуг. и п.5)

7) $\angle HCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (по опр. суммы углов треуг. и п.6)

8) $\angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (по п.7)

9) $2FB = BC$ (по св $\triangle$ с углами 60 и 30°)

10) $FB^2 + 12^2 = (2FB)^2 \Rightarrow 12^2 = 3FB^2 \Rightarrow FB = 4\sqrt{3}$ (по $\hat{\triangle}$ Пифагора и п.9)

11) $S_{ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{9 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$ (по св площади $\triangle$)

12) $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC \cos(\angle AHC) = 156$ (по $\hat{\triangle}$ косинусов)

~~Ответ: $\angle ABC = 60$, $S_{ABC} = 36\sqrt{3}$~~

13) $AC^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos(120) = 3R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{13}$ (по $\hat{\triangle}$ косинусов)

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$ $S_{ABC} = 36\sqrt{3}$ $R = 2\sqrt{13}$

1

Чистовик

№2

Обозначим все написаные числа, как $a_0 a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, где a_0 – наименьшее, а a_n – наибольшее. $\Rightarrow 32a_0+a_1+a_2+a_3\dots a_n=477$

$a_0+a_1+a_2+a_3\dots+14a_n=477$

Вычтем из первого равенства второе и получим $31a_0=13a_n \Rightarrow a_0$ хотя бы 13, а a_n хотя бы 31 (т.к. a_0 и a_n – натур.) и 13 и 31 взаимно просты. Так же заметим, что если a_0 26 или больше, то $32\cdot 26>477 \Rightarrow a_0$ – может быть только 13, а a_n только 31. $\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\dots a_{n-1}=477-32a_0-a_n=30$, $\Rightarrow$ подойдут только числа 14 и 16 или 30 т.к. если чисел хотя бы 3, то их сумма $>13\cdot 3=39$, что $>30 \Rightarrow$ их либо 2 либо одно число.

Если это одно число $\Rightarrow$ это только 30

Если это две числа $\Rightarrow$ то они <17 т.к. $30-17=13$, что не больше 13 $\Rightarrow$ эти числа лежат на промежутке $[14;16] \Rightarrow$ это либо 14 и 16 либо 15 и 15, но эти числа должны быть различными $\Rightarrow$ подходит только 14 и 16

Ответ: 13, 14, 16, 31

или

13, 30, 31

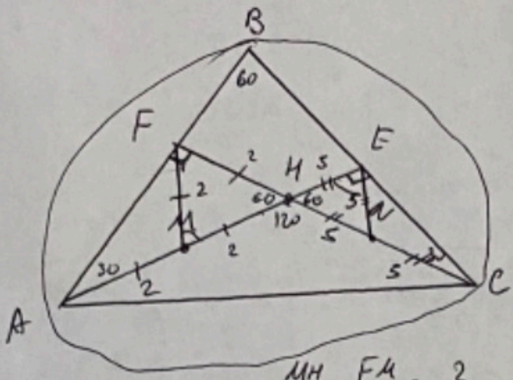
2

Черновик

$32 \cdot 26$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 26 \\ \hline 192 \\ 64 \end{array}$

666



$\frac{12}{\sqrt{3}} = FB$

$\frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$a^2 + 12^2 = 4a^2$

$12^2 = 3a^2$

$3^2 \cdot 4^2 = 3a^2$

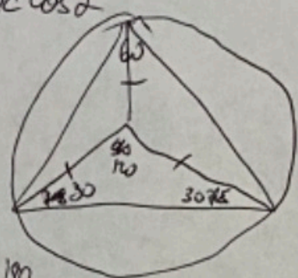
$3 \cdot 4^2 = a^2$

$\frac{MH}{HE} = \frac{FM}{EN} \Rightarrow \frac{2}{HE} = \frac{2}{5}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$4 \cdot 8\sqrt{3}$

$36\sqrt{3}$



$4\sqrt{3} = a$ – FB

$\cancel{AF^2 = 4^2 + 2^2 = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$

$5 \cdot x$

$AC = \sqrt{10^2 + 4^2 + 4 \cdot 10}$

$BC = 8\sqrt{3}$

180

150

$100 + 16 + 40 = 156$

$\frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 20}{2} = 80\sqrt{3}$

$(8\sqrt{3})^2 = a^2 + a^2 + a \cdot a = 3a^2$

$52 \cdot 3$

$26 \cdot 2 \cdot 3$

$13 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$8\sqrt{3}$ $\sqrt{3}a$

29 1
28 2
27 3
26 4
...
16 14

$\begin{array}{r} 31 \\ -13 \\ \hline 18 \end{array}$

19

2+2

2 3 4 5 6 7

4

a b c d e f...

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \dots \quad a_n$

26

62

$31a_0 - 13a_n = 0$

$31a_0 = 13a_n$

$32a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \dots a_n = 477$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \dots 14a_n = 477$

$a_n = 31$

$a_0 = 13$

$\frac{44 \cdot 19}{2} = 22 \cdot 19$

$\begin{array}{r} 19 \\ \times 22 \\ \hline 38 \\ 38 \\ \hline 418 \end{array}$

$a_0 = 13$

$a_n = 31$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array}$

$\begin{array}{r} 416 \\ + 31 \\ \hline 447 \end{array}$

13+14 ... 31

31+30 ... +13

10 20

13 ~~20 18~~ 31

13 10 20 31

30

$\begin{array}{r} 477 \\ - 447 \end{array}$

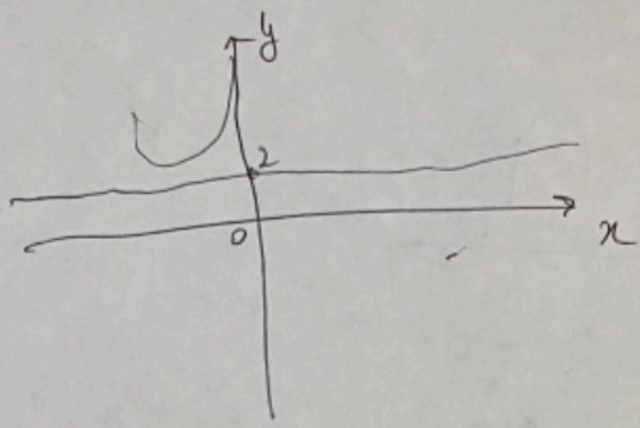
$13 + \begin{array}{r} 31 \\ + 14 \\ \hline 124 \\ 31 \\ \hline 434 \end{array}$

$\boxed{1+2+3+4+5+6+7+8}$

3 6 10 15 21 28 36

211007322 (U815874 M1278236)

Черновик



$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$2x^2$

$a^2x^2+a^2y^2=-a^4+2a^3y+8a^2x-36$
$-12ay-36$

x^2+y^2

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 416 \\ \times\ 31 \\ \hline 447 \\ -\ 477 \\ \hline 80 \end{array}$$

$AC=\sqrt{4^2+10^2+1\cdot 10}=$
$=\sqrt{16+100+40}=$

$\sqrt{156}=\dots=2\sqrt{39}$

$156=3\cdot2\cdot2\cdot13$

52
26
13

$a^2+a^2+a^2=156$

$3a^2=156$

$a^2=2\cdot2\cdot13$

$a=2\sqrt{13}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007322**

ID профиля: **815874**

Вариант 13

Чистовик

№1

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases} \quad \exists\ x^2+y^2=a \quad x^2y^2=b \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b=3 \\ a^2-2b+\frac{2}{3}b=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\frac{2b+3}{3} \\ \frac{(2b+3)^2}{9}-\frac{4}{3}b=17 \end{cases} \quad \frac{4b^2+12b+9-12b}{9}=17 \quad 4b^2+9=153 \quad b=6 \quad a=5$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^2=5-y^2 \\ 5y^2-y^4=6 \end{matrix} \Rightarrow y^4-5y^2+6=0 \quad (y^2-3)(y^2-2)=0$$

$y=\sqrt{3} \Rightarrow x=\sqrt{2}$
либо
$y=\sqrt{2} \Rightarrow x=\sqrt{3}$

Ответ: $x=\sqrt{2}$ $y=\sqrt{3}$
либо
$x=\sqrt{3}$ $y=\sqrt{2}$

Чистовик

№2

Возможны два случае либо ~~все~~ обе, вытянутые карточки дубли, либо только одна из них дубль.

I] фокусник вытащил два дубля => на первом могут быть любые числа от 1 до 12 => 12 способов, а на второй карточке любое число, кроме того что на первой => 11 способов => всего: 12·11

II] фокусник вытащил один дубль и один не дубль => для дубля возможно 12 способов, для остав. карты ~~на~~ с одной стороны 11 способов, с другой стороны 10 способов (т.к. ~~все~~ числа должны быть отл. от чисел на дубле и при этом вторая карта не дубль). Заметим так же, что карточки ~~на~~ у которых А на синем и Б на красном, отл. от карточек у которых А на красном и Б на синем =>

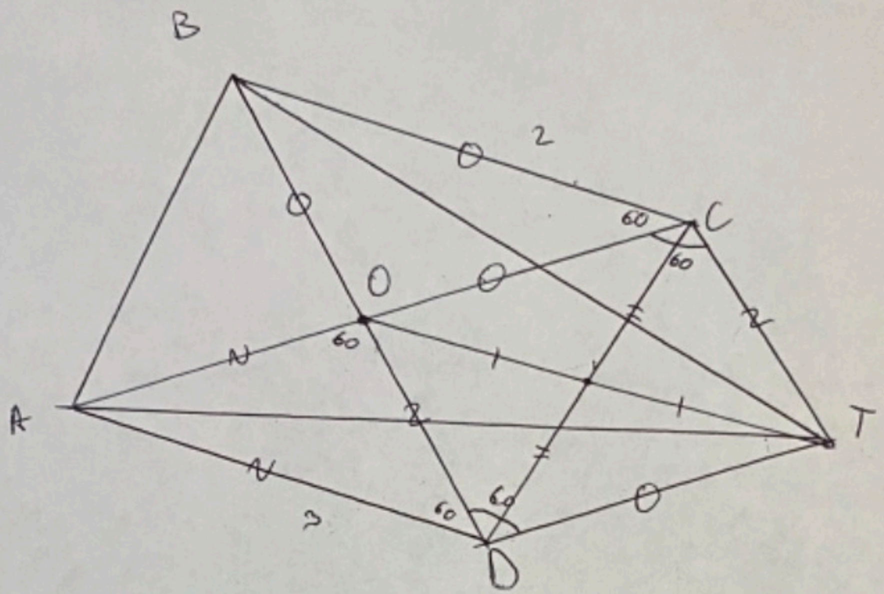
=> нужно умножить кол-во способов на 2 => всего: 12·11·10·2

Я разобрал все возможные случаи и подсчитал кол-во способов для каждого случая => всего: $12\cdot11\cdot10\cdot2+12\cdot11=12\cdot11(20+1)=2772$ способов

Ответ: 2772.

2

№3 Чистовик



1) $DCTD$ – # (по priz., что диагонали дел. пополам)

2) $\angle OCT = 180^\circ - \angle COD = \angle BOC = 60^\circ$ (по св # и угл.)
$\angle ODT = \angle OCT$

3,5) $BC = OC = OT$
$AD = OD = CT$

3) $\angle BCT = \angle ADT = \angle BOA = 120^\circ$ (по угл. и п.2) (по св # и отсв прав. Δ)

4) $\Delta ADT = \Delta BCT = \Delta BOA$ (по стороне углу и стороне)

5) $AB = BT = AT$ (по п.4)

6) $AB = \sqrt{4+9+6} = \sqrt{19}$ (по т. косинусов)

7) $S_{ABO} = S_{COD} = S_{CTD}$ (по св #)

8) $S_{ABO} = S_{BCT} = S_{ADT}$ (т.к. это равные Δ)

9) $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{S_{ABCD} + S_{ACDT} - S_{ADT} - S_{BCT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{S_{ABCD} - S_{ABO}}{S_{ABCD}}$ (по п. 8)

10) $S_{ABO} = \sqrt{p(p-3)(p-2)(p-\sqrt{19})} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{19}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{19}-1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{19}+1}{2} \cdot \dfrac{5-\sqrt{19}}{2}} = \sqrt{\dfrac{25-19}{4} \cdot \dfrac{19-1}{4}} =$
$p = \dfrac{5+\sqrt{19}}{2}$

$= \sqrt{\dfrac{6 \cdot 18}{16}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{4}$ (по формуле Герона)

11) $S_{ABCD} = 2S_{ABO} + S_{AOD} + S_{BOC} = \dfrac{12\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ (по формуле Герона)

12) $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\frac{25\sqrt{3}}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{19}{25}$ (по п. 10, 11)

Ответ: $\dfrac{19}{25}$

3

211007322 (U815874 M1278237)

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

Черновик

$x^2y^2=b \quad x^2+y^2=a$

$$\begin{cases} 3a-2b=3 \\ a^2-2b+\frac{2}{3}b=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3+2b}{3} \\ \frac{(3+2b)^2}{9}-\frac{4}{3}b=17 \end{cases}$$

$2x^2y^2$

$\frac{2}{3}-2=\frac{2}{3}-\frac{6}{3}=-\frac{4}{3}$

$6x^2-5x^2y^2+6y^2$

$\frac{9+12b+4b^2-12b}{9}=17$

$x^2+y^2=5$

$x^2y^2=6$

$4b^2+9=17\cdot 9$

$4b^2=144=12^2=4^2\cdot 3^2$

$b^2=4\cdot 3^2$

$b=2\cdot 3=6 \quad a=\frac{12+3}{3}=5$

$x^2=\frac{6}{y^2}$

$\frac{12+3}{3}=4+1$

$12 \cdot 11 \cdot 11 = 132$, $132 \cdot 21 = 2772$

$17 \cdot 9 = 153$, $153 - 9 = 144$

$36 \cdot 4 = 144$, $144 + 9 = 153$

$\sqrt{\frac{5\sqrt{19}}{2}\left(\frac{\sqrt{19}-1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{19}}{2}\right)}$

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$AT=\sqrt{9+4+6}=\sqrt{19}$

$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\frac{3}{2\sqrt{19}}$

$\frac{3}{16} \cdot \frac{19}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{19}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{19}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{19}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{19}$

$\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}$ $\sqrt{3\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=\sqrt{3}$

$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sqrt{19}+2\sqrt{3}}{2}$

c 10 11
x 11 10

$\boxed{12}\cdot 11\cdot 10\cdot 2 +$
$+ 12\cdot 11$
$12\cdot 11(20\ 21)$

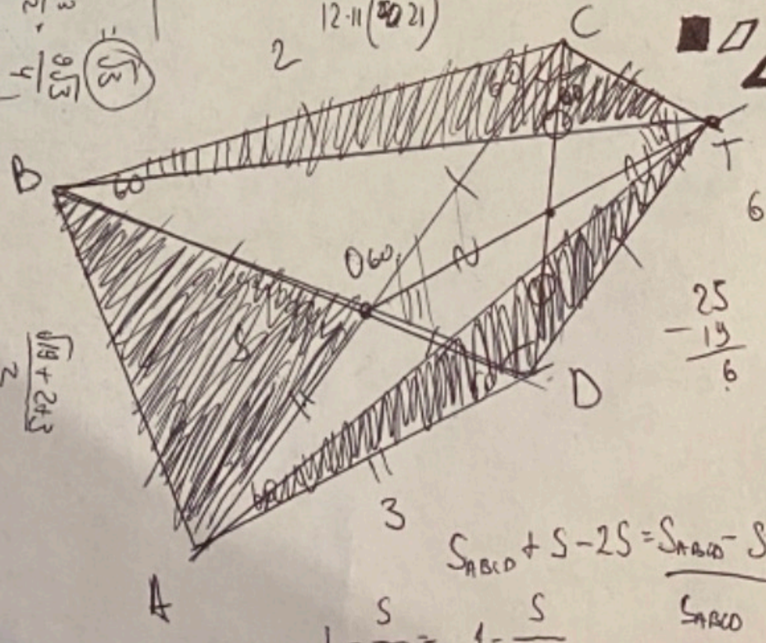
$S-2S_1$

$2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3$

$6\cdot 6\cdot 3$

$25-19=6$

60



$6a-5ab$

$a^2-5a+6=0$

$D=25-4\cdot 6=1$

$S_{ABCD}+S-2S=S_{ABCD}-S$

$\frac{S_{ABCD}-S}{S_{ABCD}}$

$1-\frac{S}{S_{ABCD}}=1-\frac{S}{2S+x}$

211007322 (U815874 M1278237)

Черновик.

16 32
16 $\boxed{26 \text{ из } 32}$

$$-\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 & 1\cdot 17 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 & 1\cdot 3 \end{cases}$$

$17 \cdot 3 = 51$

$(y^2+y)^2 \quad 2y^3+2x^3$

$x^4+y^4-51x^2-51y^2+36x^2y^2=0 \quad 2x^2y^2+34$

$\frac{2}{3}x^2y^2=x^2+y^2-1$

$x^2=a \quad y^2=b$

$a^2+b^2-51a-51b+36ab=0$

$x^4+y^4+x^2+y^2=18$

$(a+b)^2+34ab-51a+51b$

$x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)=18$

$+2ab$

$51 : 3 = 17$

$(a+b)^2-17(3a-2ab+3b)=0$

$1+\frac{2x^2}{2x^2-3} \quad +2x^2y^2$

$y^2(3-2x^2)=3-3x^2$

$y^2=\frac{3x^2-3}{2x^2-3}$

$(x^2+y^2)^2+$

$2 \ 2 \ 2$

$S_{ABO}=S_{ABCD}-\frac{x}{2}$

$S_{ABCD}-\frac{S_{ABCD}-x}{2}$

$\frac{x}{S_{ABCD}}$

$x^4+\frac{(3x^2-3)^2}{(2x^2-3)^2}+x^2\frac{2}{3}\frac{3x^2-3}{2x^2-3} \quad \sqrt{3}$

$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$33 \quad 3+3+3$

$x^2y^2=a \quad x^2+y^2=b$

$x^4+\frac{(3x^2-3)^2}{(2x^2-3)^2}+\frac{6x^4-6x^2}{6x^2-9}$

$\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}$

$b=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 11}}{2}$

$+2x^2y^2$

$\frac{9}{2}-\frac{6}{2}$

$3b-2a=3$

$b^2-2a+\frac{2}{3}a=17$

$(2x^2-3)^2x^4+(3x^2-3)^2$

$b^2-2b-11=0$

$6-17 \quad 17-6=11$

$\frac{2}{3}-\frac{6}{3}=-\frac{4}{3}$

$3b-2a=3 \Rightarrow a=\frac{3b-3}{2}$

$6-17=11$

$b^2-\frac{4}{3}a=17 \quad b^2-\frac{4}{3}\cdot\frac{3b-3}{2}=b^2-2b+6=17$

$12+9+4=25$

$a\left(\frac{2}{3}-2\right)$

$$\frac{\frac{19\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}}$$