Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007051**

ID профиля: **889780**

Вариант 13

Чистовик

№3.

A: $5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0.$

B: $a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$

$$\begin{cases} 5a^2 - 6ax_1 - 2ay_1 + 2x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1 = 0. \\ y_1 > 1 \\ y_2 < 1 \\ ax_2^2 + a^2y_2^2 - 8a^2x_2 - 2a^3y_2 + 12ay_2 + a^4 + 36 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a^2 - 6ax_2 - 2ay_1 + 2x_1^2 \end{cases}$$

A и B нах

4

Чистовик.

Пусть $a_2 = 14 \Rightarrow a_3 = 16$. Набор
$a_1 = 13$
$a_2 = 14$
$a_3 = 16$ Подходит
$a_4 = 31$

a_2 не может быть меньше либо равно 13, так как $a_1 < a_2$
$a_1 = 13$.

Пусть $n \geq 5$. Тогда $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} = 30$

$\Rightarrow$ $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} < a_n \Rightarrow$

$a_1 < a_2$
$a_1 < a_3$
$\vdots$
$a_1 < a_{n-1}$

$\Rightarrow$ $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} > (n-2)a_1 \geq 3 \cdot a_1 = 39 > 30$.

$\Rightarrow$ при $(n \geq 5)$ наборов нет.

Пусть $a_1 \geq 26$, тогда $a_n \geq 62 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_{n-1} + a_1 + a_n \geq 88 > 74 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ наборов при $a_1 \geq 26$ нет.

В итоге получили 2 набора:

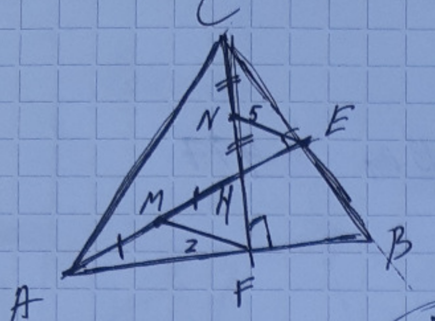
$a_1 = 13$, $a_2 = 30$, $a_3 = 31$

$a_2 = 13$, $a_2 = 14$, $a_3 = 16$, $a_4 = 31$

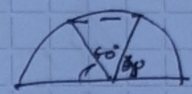
Ответ: $\{13, 30, 31\}$
$\{13, 14, 16, 31\}$.

Черновик.

1.



$NE \parallel MF \Rightarrow \angle NE$

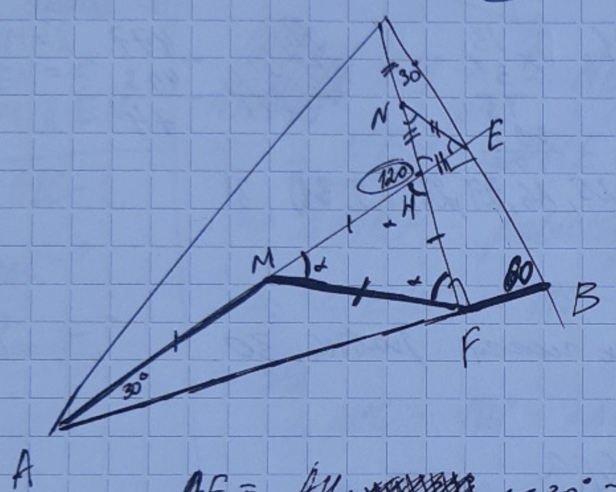


$\angle ABC = 60^\circ$

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$$

$$R = \frac{AC}{2\cdot\sin\angle ABC}$$

$\alpha = 60^\circ$



$$AC^2 = CH^2 + AH^2 - 2\cdot AH\cdot AC\cdot\cos 120^\circ$$

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 + AH\cdot HC$$

$$100 + 16 + 40 = 156 =$$

$$= 3\cdot 52 = 3\cdot 4\cdot 13 \Rightarrow \sqrt{AC^2} = \sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{13}.$$

$AH = 4,\ CH = 10$

$$R = \frac{AC}{2\cdot\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{13}}{\frac{4}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}} = 2\sqrt{13}.$$

$$AF = AH\cdot\cos 30^\circ = AH\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$FB = CF\cdot\operatorname{ctg} 60^\circ =$$

$$CF\cdot\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = CF\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\sqrt{3}}{3}.$$

$$AB = AF + FB = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$$

$$= 6\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB\cdot CF}{2} = \frac{6\sqrt{3}\cdot 12}{2} = 36\sqrt{3}.$$

Черновик

2.

$a_1, \ldots a_n$

$a_1 \le a_2 \ldots \le a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + 31a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i + 13a_n = 477$$

$31a_1 = 13a_n$

$\frac{31}{13}a_1 = a_n \Rightarrow a_1 \vdots 13$

$a_n \vdots 31.$

$$\begin{array}{r} \times\, 13 \\ 31 \\ \hline 13 \\ 39 \\ \hline 403 \end{array}$$

$477 - 403 = 74$

$$\begin{array}{r} -\,477 \\ 403 \\ \hline 74 \end{array}$$

$\boxed{a_1 = 13 \quad , a_n = 31}$

13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31

Сумма всех чисел 74

13, 31, Сумма остальных чисел равна 30.

13, 31, 30.

13, 31, 14, 16,

13, 31, ~~15, 15~~

2 набора

13, 30, 31

13, 14, 16, 31

$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0.$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0.$

$(x^2 + 2xy + y^2) + x^2 - 6ax + 9a^2$

$(x+y)^2 + (x$

$(x+y)^2$

$5a^2 +$

$a^2y^2 - 2a^3y + a^4$

211007051 (U889780 M1274606)

Чистовик

№2.

~~[illegible]~~ Нам дан набор чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$

Упорядочим его. Получим $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Известно, что ~~[illegible]~~ при увеличении в 14 раз a_n ~~[illegible]~~ сумма чисел на доске станет равна 477.

Также известно, что при увеличении в 32 раза a_1 сумма чисел на доске станет равна 477.

Тогда $S = a_1 + a_2 + \dots a_n$

$S + 31a_1 = S + 13a_n = 477.$

$31a_1 = 13a_n$

$\frac{31}{13} a_1 = a_n \Rightarrow a_1 \vdots 13$ (так как все числа целые)

$\Rightarrow$ Пусть $a_1 = 13$. Тогда $a_n = 31$

$\Rightarrow S = 477 - 13 \cdot 31 = 74 = a_1 + a_2 \dots + a_n$

$\Rightarrow a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 30$

Пусть $n = 2$. Сумма чисел $a_1 = 13$ и $a_2 = 31$ не равна 74. $\Rightarrow$ не подходит.

Пусть $n = 3$. ~~[illegible]~~ $a_1 = 13$, $a_3 = 31 \Rightarrow a_2 = S - a_1 - a_3 = 30 \Rightarrow$ набор единственный и возможный (для $n = 3$)

$a_1 = 13$
$a_2 = 30$
$a_3 = 31$

Пусть $n = 4$: $a_1 = 13$, $a_4 = 31 \Rightarrow a_2 + a_3 = S - a_1 - a_4 = 30$.

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$

$\Rightarrow$ Так как все числа различные и ~~[illegible]~~

Пусть $a_2 \geq 15$, тогда $a_3 > a_2 \geq 15 \Rightarrow a_3 > 15 \Rightarrow$

$a_2 + a_3 > 30 \Rightarrow$ при $a_2 \geq 15$ нет наборов.

2

Чистовик

№1

Дано:

$\triangle ABC$ - остр.

CF и AE - высоты

$CF \cap AE = H$

M - середина AH

N - середина CH

$FM = 2$

$EN = 5$

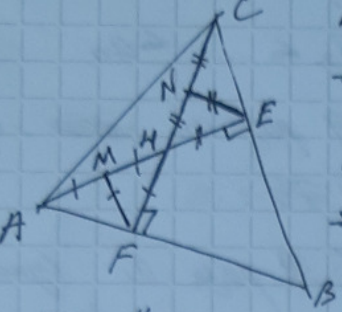
$FM \parallel EN$

$\angle ABC$ - ?

S_{ABC} - ?

$R_{оп.}$ - ?

Решение:



$\triangle CHE$ - прямоугольный, EN - медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow EN = NE = CN = 5$

$\triangle AHF$ - прямоугольный, FM - медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow FM = MH = AM = 2$

$EN \parallel FM \Rightarrow \angle NEM = \angle EMF$ (внутр. накрест. лежащие) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{(р/б)}{\angle NEH} = \underset{(верт.)}{\angle NHE} = \underset{(р/б)}{\angle MHF} = \angle \cancel{MH} MFH = \angle HMF \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MHF$ - равносторонний $\Rightarrow \angle MHF = \angle NHE = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EHF = 180° - \angle MHF = 120° \Rightarrow \angle ABC = \angle FBE = 180° - \angle EHF =$

$= 60°$

$\angle AHC = 180° - \angle AHF = 120° \Rightarrow$

по теореме косинусов $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2 \cdot HC \cdot AH \cdot \cos\angle AHC =$

$= AH^2 + HC^2 + AH \cdot HC$, $AH = 2 \cdot MF$, $CH = 2 \cdot NE$.

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2 + AH \cdot HC} = \sqrt{16 + 100 + 40} = \sqrt{156} =$

$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{13}$

по теореме синусов $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2 \cdot \sin\angle ABC} = \frac{2 \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{13}}{\cancel{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}} =$

$= 2\sqrt{13}$

$AB = AF + FB = AH \cdot \cos 30° + CF \cdot ctg\, 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} =$

$= 6\sqrt{3}$. $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$.

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 36\sqrt{3}$; $R_{оп} = 2\sqrt{13}$.

211007051 (U889780 M1274606)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007051**

ID профиля: **889780**

Вариант 13

Черновик

4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \quad \mid 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases} \quad y\neq 0$$

$a=x+y$, $b=xy$

$x^2+y^2=(a^2-2b)$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=$

$=(a^2-2b)^2-2b^2$

$$\begin{cases} 3(a^2-2b)-2b^2=3 \\ 3((a^2-2b)^2-2b^2)+2b^2=51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a^2-2b)= \\ 3(a^2-2b)^2-6b^2+2b^2=51 \end{cases}$$

$3(a^2-2b)=2b^2+3$

$3\frac{3(a^2-2b)^2}{3}-4b^2=51$

$9(a^2-2b)^2-12b=153$

$(2b^2+3)^2-12b=153$

$4b^4+\cancel{12b}+9=154$

$4b^4=144$

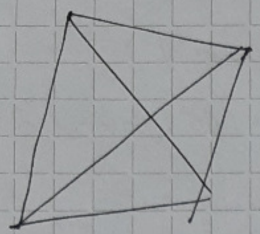
$b^4=36$

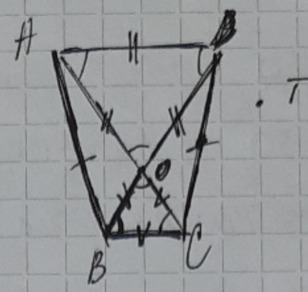
$$\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{6} \quad 1 \\ b=-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} b=\sqrt{6} \\ 3a^2-6b-2b^2=3 \end{cases}$

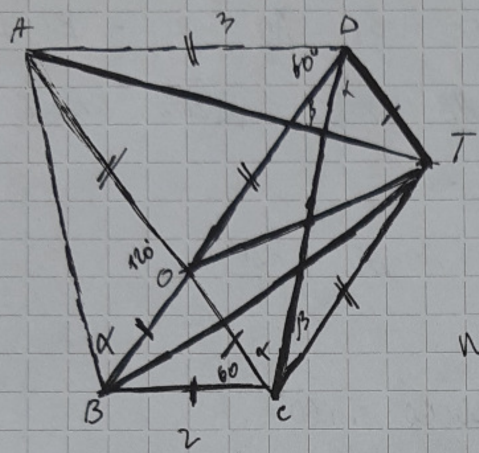
$a^2=$

Черновик.





ABCD - трап. равнобокая.



~~[illegible]~~ $\alpha+\beta=60°$

он равносторонний

по т. косинусов

Чистовик

1.1. $\begin{cases} b=\sqrt{6} \\ a=\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$

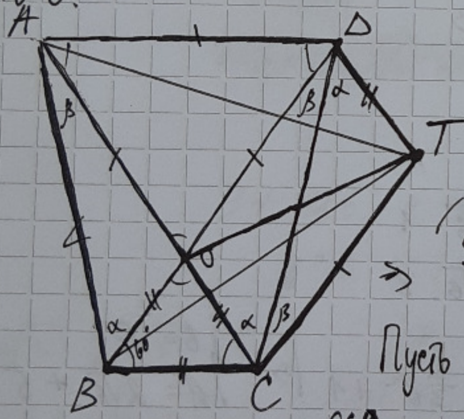
1.2. $\begin{cases} b=\sqrt{6} \\ a=-\sqrt{2}-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$

2.1. $\begin{cases} b=-\sqrt{6} \\ a=\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$

2.2. $\begin{cases} b=-\sqrt{6} \\ a=\sqrt{2}-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{2})$.

№6.



Заметим, что $ABCD$ – трапеция равнобокая ($AD \parallel BC$, $\triangle AOB = \triangle DOC$ (по 2 ст. и углу)).

Также заметим, что $DTCO$ – паралл. (диагонали делятся точкой пересечения пополам).

$\Rightarrow TC = DO$, $DC = OC$

Пусть $\angle ABO = \alpha$, $\angle BAO = \beta$. $\alpha+\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\angle OCB$ также равен α, $\angle ODC = \beta$ ($ABCD$ – р/б. трап).

$\Rightarrow DT \parallel OC \Rightarrow \angle DTC = \angle DCO = \alpha$

$DO \parallel TC \Rightarrow \angle CDO = \angle DCT = \beta$

Заметим, что $\triangle ADT = \triangle TCB$ по 2 ст. и углу между ними.

($TC = OD = AD$, $DT = OC = BC$,

$\angle BCT = 60^\circ + \alpha + \beta = 120^\circ = 60^\circ + \beta + \alpha = \angle ADT$) $\Rightarrow AT = BT$.

Чистовик

4. $\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases} \Big| 3$

$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases}$

Сделаем замену $a=x+y$, $b=xy$

$\begin{cases} 3(a^2-2b)-2b^2=3 \\ 3((a^2-2b)^2-2b^2)+2b^2=51 \end{cases}$

$\begin{cases} 3(a^2-2b)^2-6b^2+2b^2=51 \\ 3(a^2-2b)=3+2b^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{9(a^2-2b)^2}{3}-4b^2=51 \\ 3(a^2-2b)=3+2b^2 \end{cases}$

$\frac{(3+2b^2)^2}{3}-4b^2=51 \quad \Big| \cdot 3$

$(3+2b^2)^2-12b^2=153$

$9+\cancel{12b^2}+4b^4-\cancel{12b^2}=153$

$b^4=36 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\sqrt{6} \quad 1 \\ b=-\sqrt{6}. \quad 2 \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} b=\sqrt{6} \\ 3a^2=6b+2b^2+3 \end{cases} \Big| \Rightarrow \begin{cases} b=\sqrt{6} \\ a^2=2b+\frac{2}{3}b^2+1 \end{cases} \Big| \Rightarrow \begin{cases} b=\sqrt{6} \\ a^2=2\sqrt{6}+5 \end{cases} \Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b=\sqrt{6} \\ \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad 1.1. \\ a=-\sqrt{2}-\sqrt{3} \quad 1.2. \end{array}\right. \end{cases}$

2) $\begin{cases} b=-\sqrt{6} \\ 3a^2=6b+2b^2+3 \end{cases} \Big| \Rightarrow \begin{cases} b=-\sqrt{6} \\ a^2=-2\sqrt{6}+5 \end{cases} \Big| \Rightarrow \begin{cases} b=-\sqrt{6} \\ \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{3}-\sqrt{2} \quad 2.1. \\ a=\sqrt{2}-\sqrt{3}. \quad 2.2. \end{array}\right. \end{cases}$

1

Черновик.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases}$$

$\cancel{3x^4+3x^2+3y^4+3y^2=54}$

$\cancel{x^4+x^2+y^4+y^2=18}$ $\cancel{x+y=a}$ $\cancel{b=xy}$

$\cancel{x^2+y^2=a^2-2b}$, $\cancel{x^4+y^4=(a^2-2b)^2-2b^2}$

$\cancel{(a^2-2b)^2-2b^2+a^2-2b=18}$

$a=x+y$, $b=xy$

$$\begin{cases} 3a^2-6b-2b^2=3 \\ 3(a^2-2b)^2-6b^2+2b^2=51 \end{cases}$$

$3x^2+3y^2=3+2x^2y^2$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$3a^2-6b-2b^2=3$

$3(a^2-2b)^2-6b^2+2b^2=51$

$\frac{(3+2b^2)^2}{3}-4b^2=51$

$9+\cancel{12b^2}+4b^4-\cancel{12b^2}=153.$

$b^4=36$

$3a^2=3+2b^2+6b$

$3a^2=3+$

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$.

$6+9-12=3$ ✓

$12+27+12=51$ ✓

$$\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{6} \quad 1 \\ b=-\sqrt{6}. \quad 2 \end{array}\right.$$

1) $a^2=1+4+2\sqrt{6}$

$a^2=5+2\sqrt{6}.$

$a=(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$a=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Чистовик.

Заметим, что $\triangle BCT = \triangle BOA$ (по двум ст. и углу между ними)

$TC = DO = AO$, $BC = BO$, $\angle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 60^\circ + \beta + \alpha = 120^\circ = \angle BCT$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $TB = AB$ $\Rightarrow$ $AT = TB = AB$ $\Rightarrow$ $\triangle ABT$ – правильный

б) $BC = 2$, $AD = 3$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

(по теореме косинусов)

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos(120^\circ) = AO^2 + BO^2 + BO \cdot AO = 19$

$S_{ABT} = AT \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = AB^2 \cdot$ ~~[illegible]~~ $\cdot \sin 60^\circ$

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{DOC} + S_{AOD} \ominus$

$S_{AOB} = AO \cdot BO \cdot \sin 120^\circ = AO \cdot BO \cdot \sin 60^\circ$

$S_{BOC} = BO^2 \cdot \sin 60^\circ$

$S_{DOC} = DO \cdot CO \cdot \sin 120^\circ = DO \cdot CO \cdot \sin 60^\circ$

$S_{AOD} = AO^2 \cdot \sin 60^\circ$

$\ominus\ AO \cdot BO \cdot \sin 60^\circ + BO^2 \cdot \sin 60^\circ + DO \cdot CO \cdot \sin 60^\circ + AO^2 \cdot \sin 60^\circ =$

$= \sin 60^\circ (AO \cdot BO + BO^2 + DO \cdot CO + AO^2) = 25 \cdot \sin 60^\circ$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{AB^2 \cdot \cancel{\sin 60^\circ}}{\cancel{\sin 60^\circ}(BO^2 + AO^2 + AO \cdot BO + DO \cdot CO)} = \frac{AB^2}{BO^2 + AO^2 + AO \cdot BO + DO \cdot CO} = \frac{19}{25} =$$

$= \frac{76}{100} = 0{,}76$

Ответ: 0,76 или $\frac{19}{25}$

3

211007051 (U889780 M1274607)