Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006914**

ID профиля: **833689**

Вариант 13

Чистовик (1)

2 ЗАДАЧА: Числа натуральные, различные $\Rightarrow$ Можем записать их в порядке возрастание: a, b, c, d.... z.

$$\left.\begin{array}{l}32a+b+c+d...+z=477\\ a+b+c+d...+14z=477\end{array}\right\} - \Rightarrow 31a-13z=0 \Rightarrow a=\frac{13}{31}z;\ z=\frac{31}{13}a$$

a - наименьшее натуральное число. Первое ур-е примет вид.

$32a+\frac{31}{13}a+b+c+d...=477$. Если a - натуральное и $z\in N$, то $\frac{31}{13}a\in N$

, а $\frac{31}{13}a\in N$, только при $a=13, 26, 39...$ Ведь 13 простое число.

но при $a=26$, слагаемое 32a равно 32×26 $=832>477\Rightarrow$ единственное

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}32\\26\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}192\\64\ \end{array}\\ \hline 832\end{array}$$

подходящее $a=13$ $\Rightarrow$ единственное подходящее $z=\frac{31}{13}a=31$.

Ведь дальше возрастает 26, 39 $\Rightarrow$ 32a возрастает и 26, 39... не подходят.

Откуда $32a+\frac{31}{13}a+b+c+d...=32\cdot13+31+b+c+d...=447+b+c+d...=477$

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}32\\13\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}96\\32\ \end{array}\\ \hline 416\end{array}$$

$\Rightarrow b+c+d...=30$. a b, c, d... - натуральные различные числа, лежащие между 13 и 31 т.к. a и z - наименьш. и наибольш.

14, 15, 16, 17....30. Видно, что 15, 17, 18...29 ни с какими числами в сумме не дадут 30 т.к. наименьшее 14 образует 30 с 16. И еще вариант когда 1 число равное 30. Отсюда 2 варианта чисел, записанных на доске.

Ответ: 13, 14, 16, 31 или 13, 30, 31.

211006914 (U833689 M1276808)

Чистовик (2)

3 ЗАДАЧА: $a^2x^2-8a^2x+a^2y^2+y(12a-2a^3)+a^4+36=0$

$a^2(x^2-8x)+a^2y^2-2ay(a^2-6)+(a^2-6)^2+12a^2=0$

$a^2(x-4)^2+a^2y^2-2ay(a^2-6)+(a^2-6)^2=4a^2$

$a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2=4a^2 \;|:a^2$ $a\neq 0$ т.к. если $a=0$ то $36=0$

$(x-4)^2+\left(y-\frac{a^2-6}{a}\right)^2=4 \Rightarrow$ B с координатами $\left(4;\frac{a^2-6}{a}\right)$

2 ур-е: $5a^2-6ax+2x^2+y^2+2y(x-a)+(x-a)^2-(x-a)^2=0$

$(y+x-a)^2+2x^2-6ax+5a^2-x^2-a^2+2ax=(y+x-a)^2+x^2-4ax+4a^2$

$=(x-2a)^2+(y+x-a)^2=0$ – окр-ть с ц. в точке $A(2a;a-x)$ и радиусом 0

Нам нужно чтобы точки лежали по разные стороны от прямой $y=1$

$\Rightarrow$ либо $y_A>1, y_B<1$ либо $y_A<1, y_B>1$

ур-е для A – окружность с центром в $A(2a;a-x)$ и радиусом 0

$\Rightarrow$ A – точка с координатой $(2a;a-x)$

а) $y_A>1, y_B<1 \Rightarrow a-x>1, \frac{a^2-6}{a}<1$ при $a>0$, $a>a^2-6 \Rightarrow 0>a^2-a-6$

$a^2-a-6=0$

$D=25; a=\frac{1\pm 5}{2}; a=3$ или $a=-2$ $\quad -2 \quad 3$ при $a\in(-2;3)$ но $a>0 \Rightarrow a\in(0;3)$

на $a-x>1 \Rightarrow a-2a>1 \Rightarrow -a>1 \Rightarrow a<1 \Rightarrow a\in(0;1)$

~~Для y_A можем выбрать любой x, так чтобы не попадать на ось точка A~~

при $a<0$ $a^2-a-6>0 \Rightarrow$ $-2 \quad +3$ при $a\in(-\infty;-2)$, $a<1$ выполняется

$y_A>1 \Rightarrow a-x>1 \Rightarrow a-2a>1 \Rightarrow -a>1 \Rightarrow a<1$. с этими огранич. для 1 случая

$a\in(-\infty;-2)\cup(0;1)$

б) $y_A<1; y_B>1; a-x<1; a-2a<1; -a<1; a>1$. $y_B>1; \frac{a^2-6}{a}>1, a>0$

$\Rightarrow a^2-6-a>0 \Rightarrow a\in(-\infty;-2)$, но $a>0 \Rightarrow a\in\varnothing$.

$y_B>1; \frac{a^2-6}{a}>1$, при $a<0 \Rightarrow a^2-6-a<0 \Rightarrow a\in(-2;3)$, на $a>1$ и $a<0$ противоречие

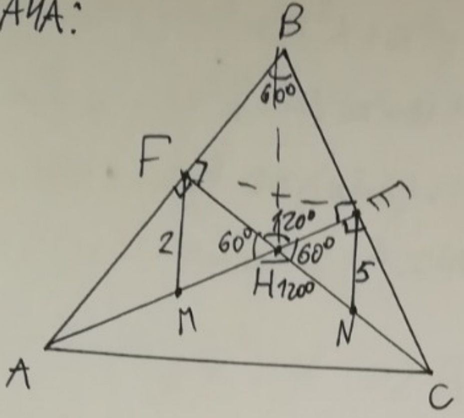
$\Rightarrow a\in\varnothing$

Ответ: при $a\in(-\infty;-2)\cup(0;1)$.

Чистовик

3

1 ЗАДАЧА:



Дано:

FM ∥ EN, FM = 2; EN = 5

AM = MH; HN = NC

∠ABC - ?; S_{ABC} - ?; $R_{оп}$ - ?

FM ∥ EN ⇒ накр. леж. углы равны ∠FMH = ∠NEH; ∠MFH = ∠ENH

∠FHM = ∠EHN (вертик.) ⇒ △FMH подобен △ENH по 3 углам. Коэф. подобия $k = 2.5$.

Обозначим AM = MH = x, HN = NC = y. $FH = \frac{HN}{k} = 0.4y$. $EH = kMH = 2.5x$

$\cos\angle FHM = \cos\angle EHN = \frac{0.4y}{2x} = \frac{2.5x}{2y} \Rightarrow 5x^2 = 0.8y^2 \Rightarrow x = 0.4y$

$\Rightarrow \cos\angle FHM = \frac{0.4y}{2x} = \frac{0.4y}{0.8y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle FHM = 60°$

$\Rightarrow \angle FHE = \frac{360° - 2\cdot 60°}{2} = 120° \Rightarrow \angle ABC = 360° - 90° - 90° - 120° = 60° = \angle ABC$

$AH = 2x = 0.8y$; $HC = 2y$

по т. косинусов для △FHM. $4 = 0.16y^2 + 0.16y^2 - 2\cdot 0.16y^2 \frac{1}{2} = 0.16y^2$

$\Rightarrow 2 = 0.4y \Rightarrow y = \frac{2}{0.4} = 2.5$

$S_{AHC} = \frac{1}{2}\cdot 0.8y \cdot 2y \cdot \sin 60° = 0.8y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.4\sqrt{3}y^2$

$S_{AFH} = \frac{1}{2}\cdot 0.4y \cdot 0.4y \cdot \sin 60° = 0.16y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.08\sqrt{3}y^2$

$S_{HEC} = \frac{1}{2}\cdot y \cdot 2y \sin 60° = 0.5\sqrt{3}y^2$

$= 0.98\sqrt{3}y^2$

$S_{FHE} = \frac{1}{2}\cdot 0.4y \cdot y \cdot \sin 60° = 0.1y^2\sqrt{3}$

$FE = \sqrt{0.16y^2 + y^2 - 2\cdot 0.4y \cdot y} = \sqrt{1.16y^2 + 0.4y^2} = \sqrt{1.56y^2} = y\frac{\sqrt{156}}{10}$

Ответ: ∠ABC = 60°

211006914 (U833689 M1276808)

Черновик

запишем их в порядке возрастания, т.к. они все различные

~~a, b, c, d, e . . .~~ a+b+c+d... +z

$$\left.\begin{array}{l} 32a+b+c+d...+z=477 \\ a+b+c+d....+14z=477 \end{array}\right\} - \quad \begin{array}{l} 31a-13z=0 \\ a=\frac{13}{31}z \; ; z=\frac{31}{13}a \end{array}$$

$32a+\frac{31}{13}a+b+c+d....=477$ z - натур.

$\frac{31}{13}a$ - натур. - минимум при a=13

$$\begin{array}{r} \times\, 32 \\ 13 \\ \hline 96 \\ +\,32 \\ \hline 416 \end{array}$$

$32a+\frac{31}{13}a+b+c+d...=477$ при a=13

$416+31+b+c+d...=477$

$b+c+d...=30$ ведь ~~при~~ 13 - простое и $\frac{31}{13}a$ натуральное

при a=13, 26, 39, но при a=26 $32a=32\cdot 26$

$$\begin{array}{r} \times\, 32 \\ 26 \\ \hline 192 \\ +\,64 \\ \hline 832 \end{array}$$

$832>477$ => неверно.

=> однозначно наименьшее число = 13

=> однозначно наибольш. $z=\frac{31}{13}a=31$

$a+b+c+d.....+14z=477$

$b+c+d...=30$

$$\begin{array}{r} \times\, 31 \\ 14 \\ \hline 124 \\ +\,31 \\ \hline 434 \end{array}$$

$434+13=447$

b, c, d... - нат. числа, между 13 и 31, в сумме дающие 30

14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.... только случаи b=14, c=16 b+c=30

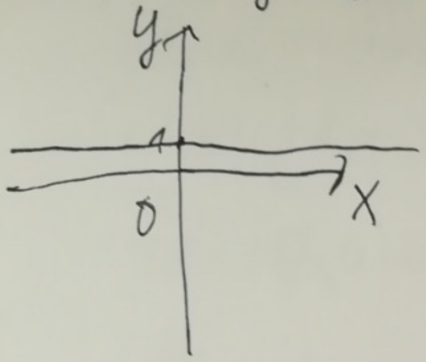
варик 13, 14, 16, 31; или случай b=30 : варик: 13, 30, 31

211006914 (U833689 M1276808)

ЧЕРНОВИК

$A(x;y)$ $5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$



$a^2x^2-8a^2x+a^2y^2+y(12a-2a^3)+a^4+36=0$

$-2a^2 6 \cancel{+2a^2 6}$

$a^2(x^2-8x)+a^2y^2+y2a(6-a^2)+(a^2-6)^2+12a^2=0$

$+2a^2 6$

$a^2(x^2-8x+16)+a^2y^2-2ay(a^2-6)+(a^2-6)^2-4a^2=0$

$a^2(x-4)^2+a^2y^2-2ay(a^2-6)+\cancel{(a^2-6-2a)(a^2-6+2a)}=0$

$(a^2-6)^2-4a^2$

$\cancel{+2a^2 6}$ $\cancel{4a^2}$

$=a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2=4a^2 \,|:a^2 \quad a\neq0$

$=(x-4)^2+\left(y-\frac{a^2-6}{a}\right)^2=4$ – ур-е окр. с ц. $B\left(4;\frac{a^2-6}{a}\right)$

$5a^2-6ax+2x^2+y^2+y2(x-a)+(x-a)^2-(x-a)^2$

$2x^2-6ax+5a^2+(y+x-a)^2-x^2-a^2+2ax=x^2-4ax+4a^2+(y+x-a)^2$

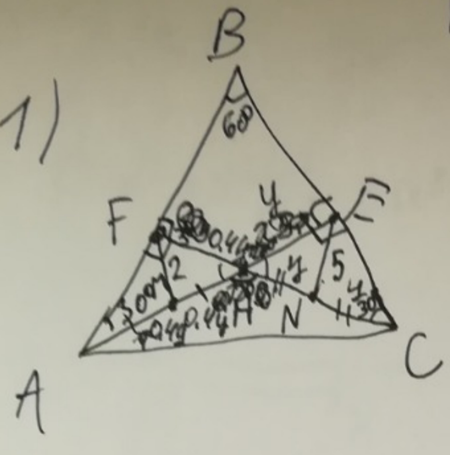
$=(x-2a)^2+(y+x-a)^2=0$

$x>2a$ $\quad x-a>a$

$a^2-6-a>0$

Черновик

1)



накрест леж. углы равны

$\triangle FMH \sim \triangle ENH$ по 3 углам

$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \quad y = \frac{5}{2}x$

$\frac{a}{b} = \frac{2}{5} \quad a = \frac{2}{5}b$

$\frac{2{,}5x}{2y} = \frac{0{,}4y}{2x} \quad 5x^2 = 0{,}8y^2 \quad x^2 = \frac{8\cdot 2}{10\cdot 5\cdot 2}y^2 = 0{,}16y^2$

$\frac{25\cdot 4}{10\ 10} = 1$

$x = 0{,}4y$

$\cos\angle = \frac{0{,}4y}{0{,}8y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle = 60^\circ$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006914**

ID профиля: **833689**

Вариант 13

Чистовик 1

4 задача:

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=x^4+y^4+2x^2y^2-\frac{4}{3}x^2y^2=(x^2+y^2)^2-\frac{4}{3}x^2y^2$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3 \\ (x^2+y^2)^2-\frac{4}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$ Сделаю замену $x^2+y^2=v$; $x^2y^2=u$

$\Rightarrow \begin{cases} 3v-2u=3 \\ v^2-\frac{4}{3}u=17 \end{cases} \Rightarrow 3v=2u+3 \Rightarrow v=\frac{2}{3}u+1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}u+1\right)^2-\frac{4}{3}u=17$

$\Rightarrow \frac{4}{9}u^2+1+\frac{4}{3}u-\frac{4}{3}u=17 \Rightarrow \frac{4}{9}u^2=16 \Rightarrow u^2=36$. $u=x^2y^2$; $\begin{cases} x^2\geq 0 \\ y^2\geq 0 \end{cases} x^2y^2\geq 0 \Rightarrow u\geq 0$

$\Rightarrow u^2=36 \Rightarrow u=6 \Rightarrow v=\frac{2}{3}u+1=\frac{2}{3}\cdot 6+1=5=v$. Откуда получаем

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases}$ $x^2=a$; $y^2=b$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Rightarrow a=5-b \Rightarrow (5-b)b=6$

$\Rightarrow b^2-5b+6=0$; $D=25-24=1 \Rightarrow b=\frac{5\pm 1}{2} \Rightarrow b=3$ или $b=2$

$\Rightarrow y^2=3$ или $y^2=2 \Rightarrow a=5-b \Rightarrow a=2$ или $a=3$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=2 \\ y^2=3 \end{cases} \end{array}\right.$ откуда 8 вариантов ответа, где соответственно x и y записаны как $(x;y)$

Ответ: $(-\sqrt{3};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{2})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{2})$; $(\sqrt{3};\sqrt{2})$
$(-\sqrt{2};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{3})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{3})$; $(\sqrt{2};\sqrt{3})$

Чистовик (2)

Всего у нас $12^2=144$ карты, из которых 12 дублей.
Хотим выложить карты в сетку 12×12.

11	21	31	41	:
12	22	32	42	:
13	23	33	43	:
14	24	34	44	:
15	25	35	45	:
…	…	…	…	

Возьмем например 1|1, тогда карта 1|1 образует нужный фокуснику случай 11^2 раз, т.к. вся вертикаль и горизонталь с цифрами 1 не подходит по условию.
1|1 - запись карты со сторонами 1 и 1.

Так, каждый дубль, убирая 1 свою вертикаль и 1 свою горизонталь будет образовывать 11^2 нужных фокуснику пар. Но тогда мы несколько раз учтём дубли попарно. Если мы будем поочереди брать дубли: 1/1, 2/2, 3/3 ... n/n; ... 12/12 то каждая из них посчитает n-1 дубль дважды, где n-число на дубле. Тогда сумма дважды учтённых дублей будет $1+2+3,...+11$.
$=11\cdot\frac{10}{2}+11=66$ раз

Итого мы учтем $12\cdot11^2-66=11(12\cdot11-6)$ $12\cdot11=132$
$132-6=126$

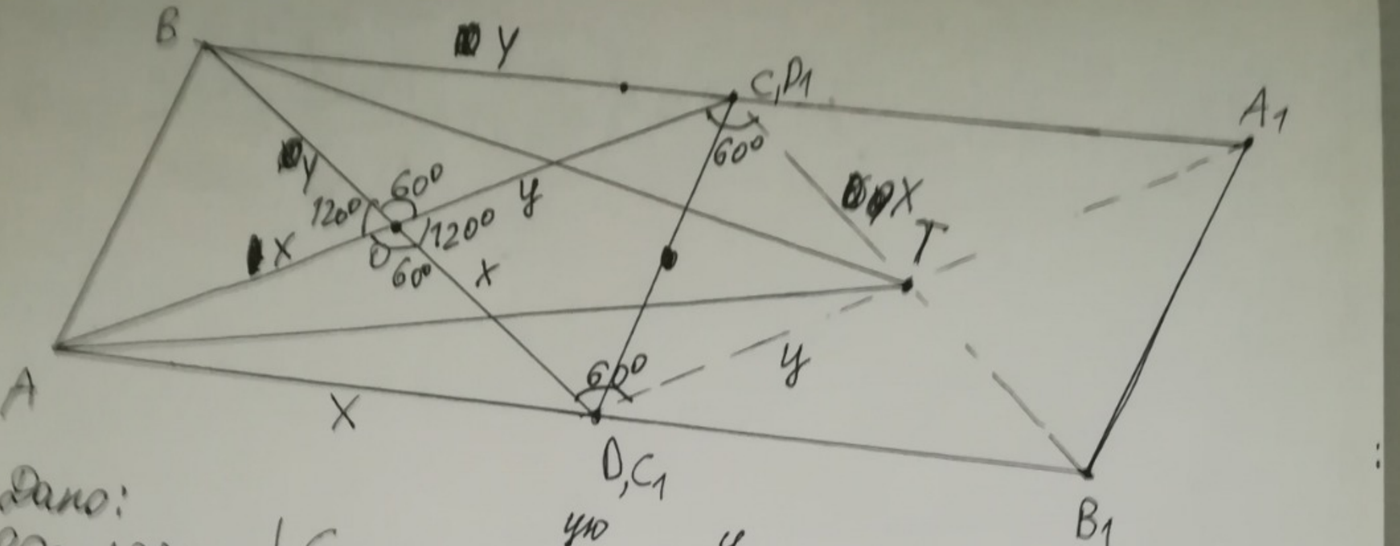
$11\cdot126=$ $\begin{array}{r} \times\,126\\ 11\\ \hline +\,126\\ 126\\ \hline 1386\end{array}$ $=1386$ способов.

Ответ: 1386 способов.

211006914 (U833689 M1276809)

Чистовик (3)

6 ЗАДАЧА:



Дано:
$\triangle BOC, \triangle AOD$ - прав.

Док-ть:
$\triangle ABT$ - прав.

Если каждую точку четырехугольника симметрично „отзеркалить" относительно середины CD то мы получил второй четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ такой, что $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$ и т.д. Мы получили такой же ~~прав~~ четырехугольник, но симметрично отзеркаленный по 2 осям. Соответственно т.к. $\square ABCD = \square A_1B_1C_1D_1$ $\Rightarrow \triangle AOD = \triangle A_1TD_1$; $\triangle BOC = \triangle B_1TC_1$. $\Rightarrow \triangle A_1TD_1, \triangle B_1TC_1$ - правильные правильные $\Rightarrow$ равносторонние и все углы по 60°. Отметим $AO = OD = AD = x$; $BO = OC = BC = y$. $\angle BOC = \angle AOD = 60° \Rightarrow \angle BOA = \frac{360 - 2 \cdot 60°}{2} = 120°$

~~Также в соответственно~~ OCTD-параллелограм.

т.к. $OD = TD_1$; $OC = TC_1$ ~~($\square ABCD = \square A_1B_1C_1D_1$)~~ ($\triangle BOC = \triangle B_1OC_1$)($\triangle AOD = \triangle A_1TD_1$)

также $\angle COD = \angle CTD = 120°$ (~~...~~ $180 - \angle BOC = \angle COD = 120°$)

$\Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = \frac{360 - 2 \cdot 120°}{2} = 60° \Rightarrow \angle BCT = \angle ADT = \angle BCO + \angle OCT = \angle ADO + \angle ODT$ $= 60° + 60° = 120°$. $\triangle AOD = \triangle A_1TD_1 \Rightarrow$ ~~...~~ $TD_1 = OD = X$

$\triangle BOC = \triangle B_1TC_1 \Rightarrow OC = TD = y$; $\triangle ABO = \triangle ADT = \triangle BCT$ (по 2 сторонам x; y и ~~...~~ углу 120° между ними) $\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow$ ~~...~~ $\triangle ABT$ равносторонний $\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный.

б) $Y = 2$; $X = 3$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}x^2 \sin 60° + \frac{1}{2}y^2 \sin 60° +$ ~~...~~ $xy \sin 120°$

~~...~~ $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{4} = \frac{(9 + 4 + 12)\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

~~...~~ AB по т. косинусов $= \sqrt{4 + 9 + 2 \cdot 3} = \sqrt{19} \Rightarrow S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{19}$

~~Ответ: ...~~

ЧИСТОВИК 4

продолжение 6 задачи:

ОТВЕТ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 19}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 25} = \frac{19}{25} = 0.76$

Черновик

$3x^2+3y^2-2x^2y^2=3$ $\quad x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17$

$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17$ $\quad x^4+y^4+2x^2y^2-\frac{4}{3}x^2y^2=17$

$(x^2+y^2)^2-\frac{4}{3}x^2y^2=17$

$x^2+y^2=v$

$x^2y^2=u$ $\quad \left.\begin{array}{l}3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3\\(x^2+y^2)^2-\frac{4}{3}x^2y^2=17\end{array}\right\}\begin{array}{l}3v-2u=3\\v^2-\frac{4}{3}u=17\end{array}$

$\cancel{v^2+3v-\frac{10}{3}u-20=0}$

$\cancel{D=9+4\left(\frac{10}{3}u+20\right)=9+\frac{40}{3}u+80=89+\frac{40}{3}u}$

$\cancel{v=\frac{-3\pm\sqrt{89+\frac{40}{3}u}}{2}}$

$3v-2u=3;\ v=\frac{2u+3}{3}$ $\quad \left(\frac{2u+3}{3}\right)^2-\frac{4}{3}u=17=\frac{4}{9}u^2+1+\frac{4}{3}u-\frac{4}{3}u=17$

$\left(\frac{2}{3}u+1\right)^2$ $\quad \frac{4}{9}u^2=16^4$ $\quad u^2=36$

$x^2y^2=u$ $\quad x^2\geq 0,\ y^2\geq 0\Rightarrow x^2y^2\geq 0\Rightarrow u\geq 0;\ u^2=36\Rightarrow u=6$

$3v-2\cdot 6=3\Rightarrow 3v=15\Rightarrow v=5=x^2+y^2$

$x^2+y^2=5$ $\quad x^2=a;\ y^2=b$ $\quad a+b=5$ $\quad a=5-b\Rightarrow(5-b)b=6=5b-b^2=6$

$x^2y^2=6$ $\quad ab=6$

$b^2-5b+6=0$

$\cancel{b=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}}$ $D=25-24=1$

$b=\frac{5\pm 1}{2}$

и

ЧЕРНОВИК

$12^2 = 144$

~~1·12+2·11·...·3·10·~~

124 сумма чисел от 1 до 12

2 11
3 10
4 9
5 8
6 7

$6 \cdot 13 = \cancel{78 \cdot 2 = 156}$

12

Всего 144 карты из к-х 12 дублей

1 1

11	21	31	41	51
12	22	32	42	52
13	23	33	43	53
14	24	34	44	54
15	25	35	45	55

каждый раз от 1 до 9

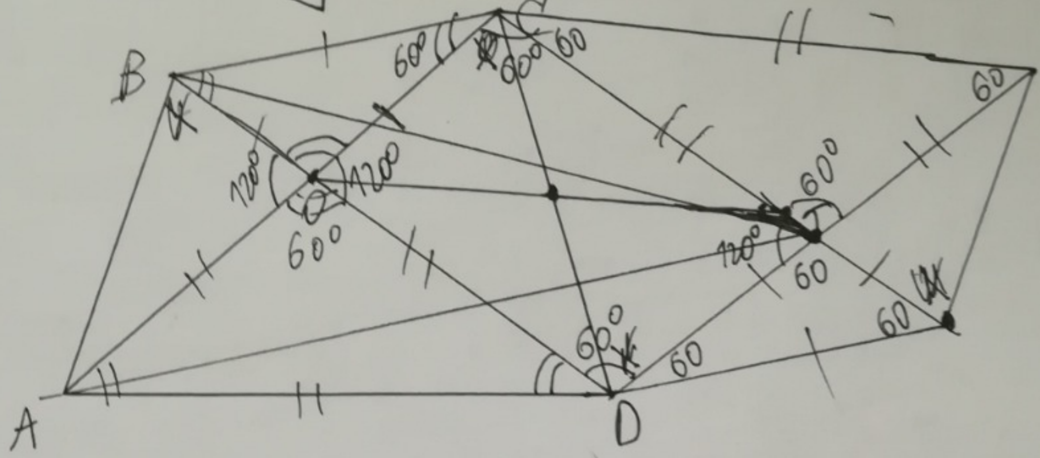
минус вертик. и горизонталь

~~144 − 1 − 2 ... − 11 = 144 − 66 = 78~~

$12 \cdot (12^2 - 11^2)$ = т.к. вычитаем 1 горизонталь и вертикаль и остается сетка 11^2 всегда

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 12 \\ \hline 242 \\ +121 \\ \hline 1452 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1452 \\ -\ 66 \\ \hline 1386 \end{array}$$

Черновик



прав-равносторонний

$\triangle BCT = \triangle BOA = \triangle ADT$ (по 2 сторонам и углу между ними)

$\sqrt{19}$

$\frac{1}{2}\sqrt{19}^2 \sin 60^\circ = 19$

$$\begin{array}{r} \times\, 19 \\ 4 \\ \hline 76 \end{array}$$