Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006872**

ID профиля: **362423**

Вариант 13

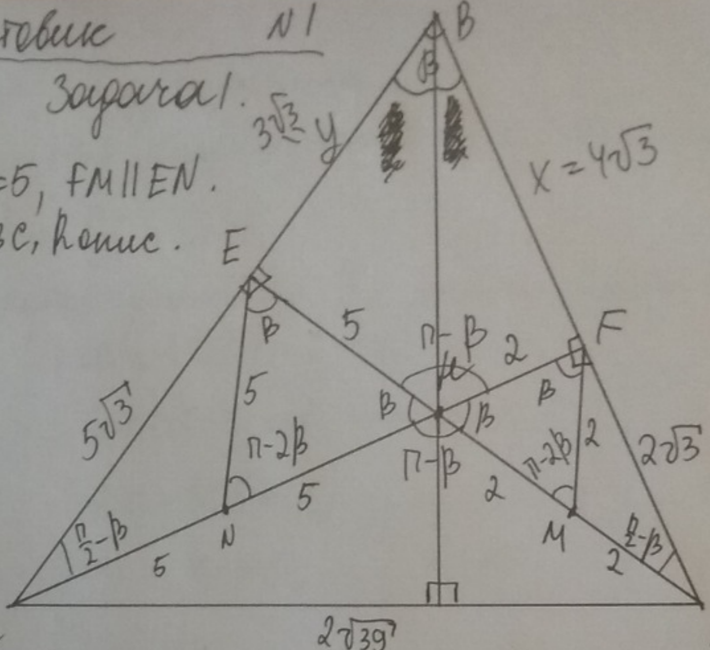
Вариант В Чистовик №1

Задача 1.

Дано: $|FM| = 2$, $|EN| = 5$, $FM \parallel EN$.

Найти: $\angle ABC$, $S_{\Delta ABC}$, $R_{опис}$.

Решение:



1) Пусть $\angle ABC = \beta$, $\Rightarrow \angle EHF = \pi - \beta$ по сумме углов $EBFH$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle NHE = \angle FHM = \beta$, как смежные с $\angle EHF$;

2) EN – медиана, опущенная на гипотенузу $|CH|$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow |CH| = 2|EN| = 10$; Аналогично $|HA| = 2|EM| = 4$.

3) ΔENH и ΔHMF – равнобедренные, $\Rightarrow \angle NEH = \angle NHE = \beta$,
$\angle MHF = \angle HFM = \beta$, $\Rightarrow \angle ENH = \pi - 2\beta$, но т.к. $EN \parallel FM$, $\angle ENF =$
$= \angle HFM$, как внутренние накрест лежащие, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \pi - 2\beta = \beta$, $\pi = 3\beta$, $\beta = \frac{\pi}{3}$.

4) По теореме косинусов для ΔCHA:

$|AC|^2 = |CH|^2 + |HA|^2 - 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot |CH| \cdot |AH|$;

$|AC|^2 = 100 + 16 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot 10 \cdot 4 = 116 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 10 \cdot 4 = 156$;

$|AC| = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$;

5) По теореме синусов для ΔABC: $\frac{|AC|}{\sin(\beta)} = 2R$;

$R = \frac{2\sqrt{39}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{13}$;

6) $\frac{|CE|}{|CH|} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $|EC| = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$; $|AF| = |AH| \sin(\beta) = 2\sqrt{3}$;
$|EH| = 5$, т.к. ΔENH равносторонний по углам, аналогично $|HF| = 2$

Вариант 13 Чистовик № 2.

Задача 1. Продолжение.

7) $\angle BCF = \frac{\pi}{2} - \beta$ из $\triangle CBF$, аналогично из $\triangle EBA$ $\angle EAB = \frac{\pi}{2} \beta$,

$\Rightarrow \angle BCF = \angle EAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

8) Катет, лежащий против угла в $\frac{\pi}{6}$, равен половине гипотенузы: $|BF| = \frac{1}{2}|CB|$, и $|EB| = \frac{1}{2}|BA|$;

Пусть $|BF| = x$, $|BE| = y$. Составим систему:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} + y), \\ y = \frac{1}{2}(x + 2\sqrt{3}). \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 5\sqrt{3} + y, \\ 2y = x + 2\sqrt{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 5\sqrt{3} = y, & (1) \\ x + 2\sqrt{3} = 2y. & (2) \end{cases}$$

Умножим (1) на 2 и приравняем к (2):

$4x - 10\sqrt{3} = x + 2\sqrt{3}$, $3x = 12\sqrt{3}$, $x = 4\sqrt{3}$; ← Подставим во (2): $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 2y$, $2y = 6\sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$.

9) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sin(ABC) \cdot |CB| \cdot |BA| = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot (8\sqrt{3})(6\sqrt{3}) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 48 \cdot 3 = 12 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$;

Ответ: $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3}$, $h_{опис.} = 2\sqrt{13}$;

211006872 (U362423 M1277162)

$5a^2+12ay-20ay+8y^2-4y^2+y^2=0,$

$5a^2+10ay+5y^2=0,$ Черновик.

$a^2+2ay+y^2=0,$

$a+y=0,$

$\boxed{y=-a.}$ $\boxed{x=-2y}=+2a$

$A(x,y)=\boxed{A(2a,-a)}.$

$\underbrace{a^2x^2}+\underbrace{a^2y^2}-\underbrace{8a^2x}-\underbrace{2a^3y}+\underbrace{12ay}+a^4+36=0$

$a^2y^2-y(2a^3-12a)+a^2x^2-8a^2x+a^4+36=0,$

$\underbrace{a^2y^2-2y(a^3-6a)+(a^3-6a)^2}-(a^3-6a)^2+\underbrace{a^2x^2-8a^2x+16a^2}-16a^2+$
$+a^4+36=0,$

$(ay-a^3+6a)^2+(ax-4a)^2-(a^3-6a)^2-16a^2+a^4+36=0,$

$a^2(y-a^2+6)^2+a^2(x-4)^2=(a^3-6a)^2+16a^2-a^4-36,$

$\Rightarrow$ Координаты B $y=(a^2-6)$, $x=4$,

$\boxed{B(4,a^2-6)}$

211006872 (U362423 M1277162)

Черновик

Задача 2.

Обозначим числа на доске $x, y .. p, z$, причем пусть они расположены по убыванию, $\Rightarrow$ x - наибольшее, z - наименьшее. Запишем систему из 2х уравнений:

$$\begin{cases} x+y+\ldots+32z=477, & (1) \\ 14x+y+\ldots+z=477, & (2) \end{cases}$$

Вычтем из (2) первое: $13x=31z$, но т.к. x и z - натуральные, то $x=31n$, $z=13n$, причем тогда $31n$ - наибольшее, $13n$ - наименьшее. (n - натуральное).

Сложим (1) и (2): $15x+2y+\ldots+33z=954$,

$$3(5x+11z)+2(y+..+p)=954,$$

Правая часть делится на 3, $\Rightarrow$ левая тоже, $\Rightarrow$ $y+\ldots+p$ делится на 3; Аналогично, правая часть делится на 2, $\Rightarrow$ левая тоже, $\Rightarrow$ $5x+11z$ делится на 2, $\Rightarrow$ $31n\cdot5+11\cdot13n \,\vdots\, 2$, $155n+143n \,\vdots\, 2$, $298n \,\vdots\, 2$.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \\ +31 \\ \hline 447 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times 14 \\ \hline 124 \\ 31 \\ \hline 434 \end{array}$$

~~[illegible]~~ Черновик

Задача 2

Пусть сумма ~~цифр~~ чисел на доске обозначена $x+y+\ldots+p+z$, причем ~~цифры~~ числа расположены в порядке убывания. Запишем систему из 2х уравнений:

$$\begin{cases} x+y+\ldots+p+32z=477, & (1) \\ 14x+y+\ldots+p+z=477. & (2) \end{cases}$$

Вычитаем уравнение:

$$13x=31z, \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. x и z натуральные, то $x=31n$, $z=13n$, где n - натуральное число.

$$\begin{cases} 31n+y+\ldots+p+32\cdot 13n=477, \\ 14\cdot 31n+y+\ldots+p+13n=477. \end{cases} \quad \begin{cases} 447n+y+\ldots+p=477, \\ 434n+13n+y+\ldots+p=477. \end{cases}$$

$$447n+y+\ldots+p=477.$$

Т.к. $n, y, \ldots p$ - натуральные, а сумма их 477, $n=1$, $\Rightarrow y+\ldots+p=30$. Но среди $y,\ldots p$ нет чисел, меньше 14, $\Rightarrow$ пусть $y=14$, тогда на остальные числа остается только 16, но нельзя разбить 16 на 15 и 1 или 14 и 2, т.к. $1<13$, $2<13$, $\Rightarrow$ остается только $p=16$;

Ответ: На доске были написаны 31, 16, 14 и 13.

Черновик.

$x+y+\ldots+z$

$$\begin{cases} x+y+\ldots+32z=477 \\ 14x+y+\ldots+z=477 \end{cases}$$

$13x-31z=0,$

$13x=31z,$

$\Rightarrow x=31n;\ z=13n.$

самое большое 31n самое маленькое 13n

$$\begin{array}{r} 11 \\ 477 \\ 477 \\ \hline 954 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 5 \\ \hline 155 \\ 143 \\ \hline 298 \end{array}$$

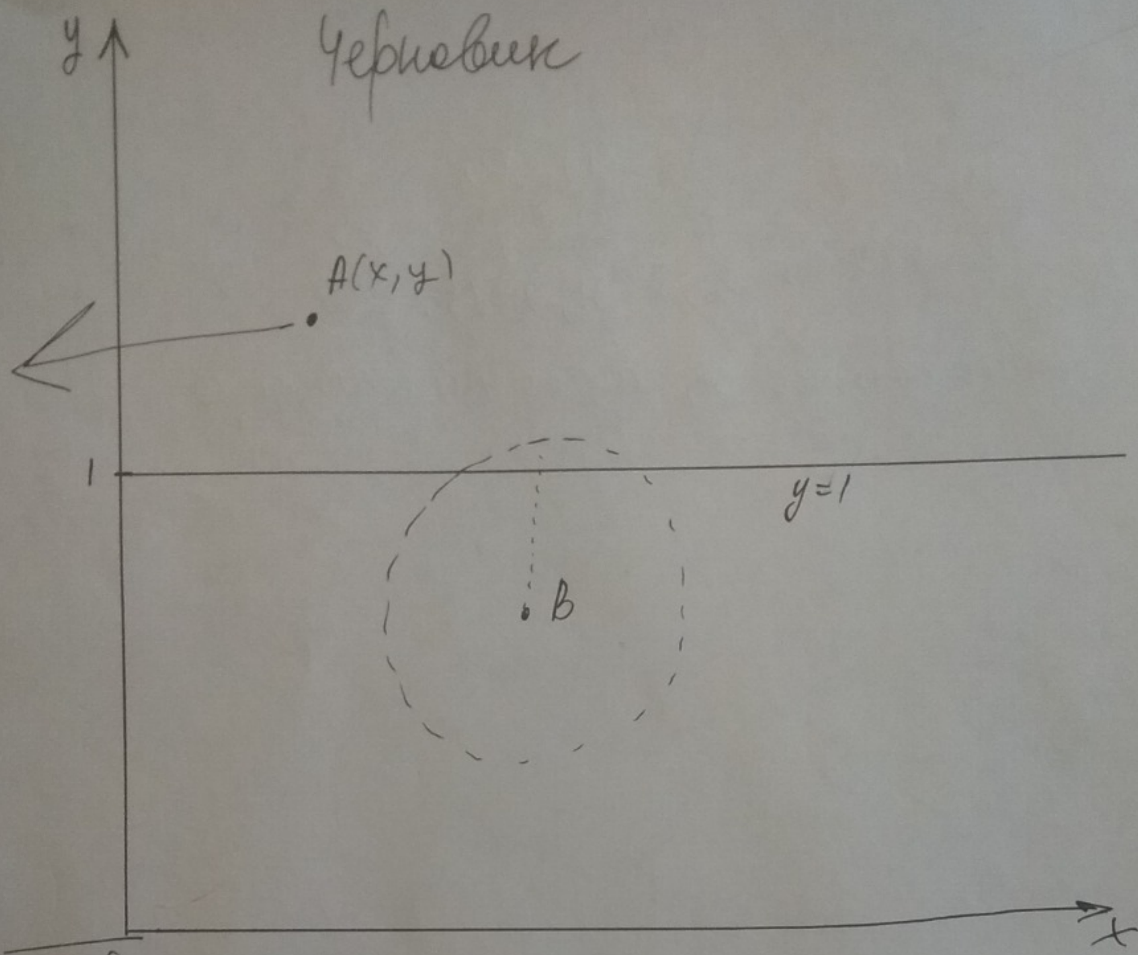
13

13

143

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \\ +\ 31 \\ \hline 447 \end{array}$$

Черновик



$$\begin{cases} 5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ a^2x_1^2 + a^2y_1^2 - 8a^2x - 2a^3y_1 + 12ay + a^4 + 36 = 0. \end{cases}$$

Для точки A:

$$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$\cancel{D=}\ 5a^2 - a(6x + 2y) + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$D = (6x+2y)^2 - 4 \cdot 5\,(2x^2 + 2xy + y^2) =$$

$$= 36x^2 + 24xy + 4y^2 - 20\,(2x^2 + 2xy + y^2) =$$

$$= 36x^2 + 24xy + 4y^2 - 40x^2 - 40xy - 20y^2 =$$

$$= -4x^2 - 16xy - 16y^2 = -4\,(x^2 + 4xy + 4y^2) = -4\,(x+2y)^2.$$

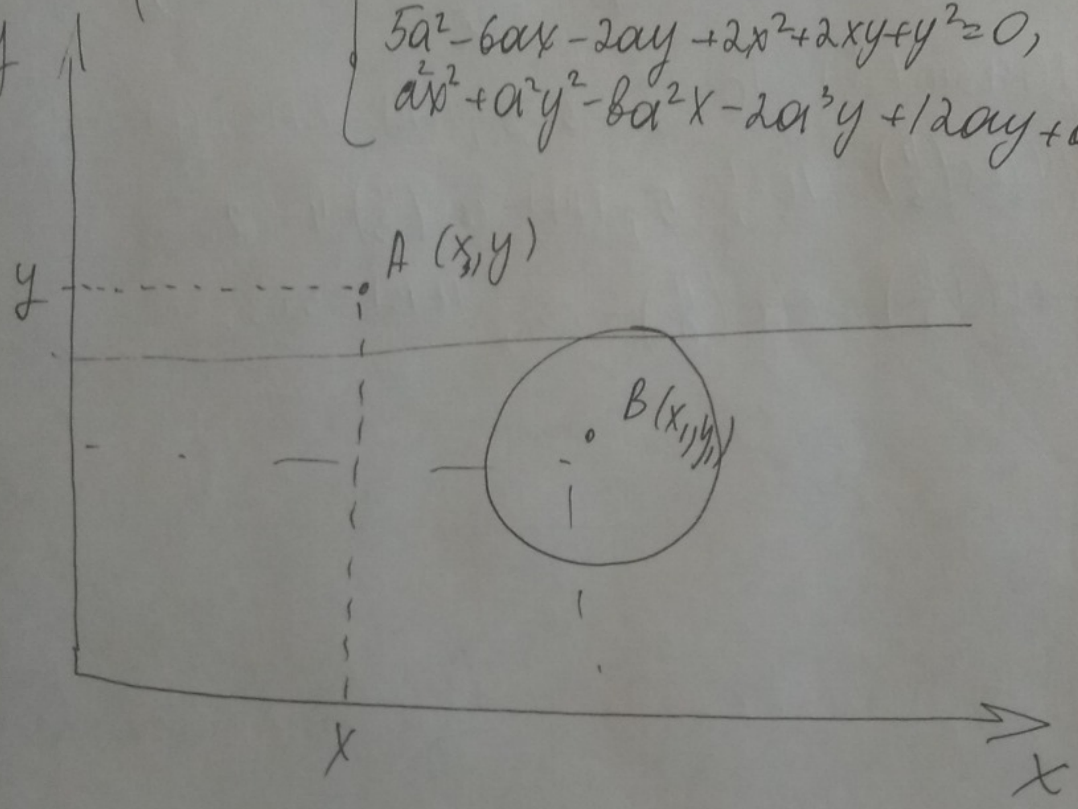
$$\Rightarrow x + 2y = 0, \Rightarrow \boxed{x = -2y.}$$

для $\triangle ABC$:

$|AC|^2 = (4\sin(\beta)+2x\,ctg(\frac{\beta}{2}))^2 + (5x\,ctg(\frac{\beta}{2})+10\sin(\beta))^2 - 2\cos(\beta)\cdot(4\sin(\beta)+$
$+2x\,ctg(\frac{\beta}{2}))(5x\,ctg(\frac{\beta}{2})+10\sin(\beta))$.

Черновик

$$\begin{cases} 5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0, \\ a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0. \end{cases}$$



211006872 (U362423 M1277162)

Продолжение к задаче 1. ~~Чистовик.~~ №2

5) Из п. 3 и п. 4: $|AC|^2 = 116 + 80\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 116 + 80 \cdot \frac{1}{2} =$

Черновик

$= 116 + 40 = 156, \Rightarrow |AC| = \sqrt{156} = \sqrt{4 \cdot 39} = 2\sqrt{39};$

6) По теореме синусов для Δ ABC:

$\frac{|AC|}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2R, \quad R = \frac{|AC|}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{39}}{\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = 2\sqrt{13};$

7) $|CE| = |CH|\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}; \; |FA| = |HA|\sin(\beta) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$

$|EH| = |CH|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5, \; |HF| = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 4 = 2.$

8) $\frac{|EB|}{|EH|} = ctg\left(\frac{\beta}{2}\right) = ctg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}, \quad |EB| = 5\sqrt{3}.$

Черновик

$\frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$156 \,|\, 4$

$-12 \,|\, 39$

36

211006872 (U362423 M1277162)

Задача 1. ~~Чистовик~~ №1

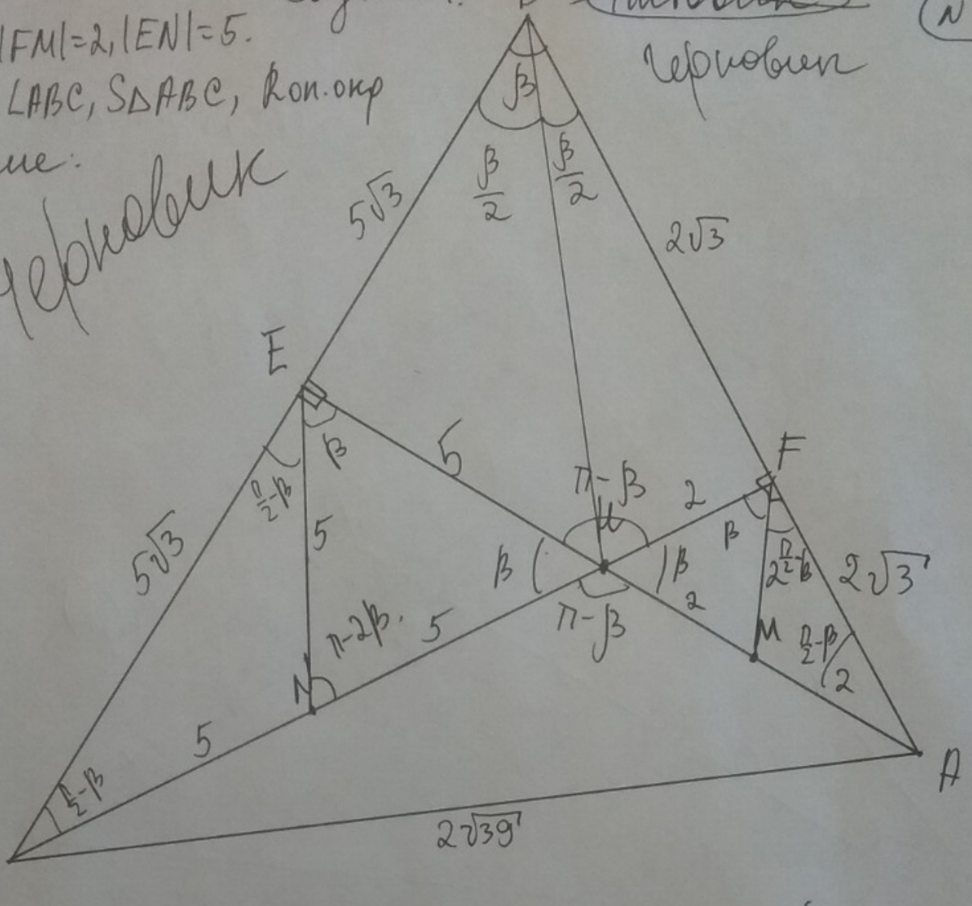
Черновик

Дано: $|FM|=2, |EN|=5$.

Найти: $\angle ABC$, $S_{\triangle ABC}$, $R_{оп.окр}$

Решение:

Черновик



1) Пусть $\angle ABC=\beta$; $\triangle CEH$ – прямоугольный, EN – медиана к гипотенузе, $\Rightarrow |CH|=2|EN|=10$; Аналогично $|HA|=2|FM|=4$.

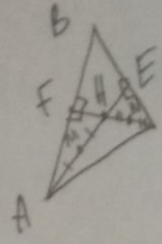
2) По сумме углов $HEBF$, $\angle EHF=\pi-\beta$, $\Rightarrow \angle CHA=\pi-\beta$ как вертикальный с $\angle EHF$, $\Rightarrow \angle CHE=\angle FHA=\beta$, как смежные с $\angle EHF=\pi-\beta$.

3) По теореме косинусов для $\triangle CHA$:

$|AC|^2=100+16+2\cos(\beta)\cdot 10\cdot 4=116+80\cos(\beta)$.

4) $\triangle ENH$ – равнобедренный, $\angle NEH=\angle NHE=\beta$, $\Rightarrow$ по сумме углов $\triangle ENH$ $\angle ENH=\pi-2\beta$; $\angle MHF=\angle HFM=\beta$, т.к. $\triangle HFM$ – равнобедренный, но т.к. $EN \parallel FM$ по усл., то $\angle ENF=\angle NFM$, как внутренние накрест лежащие, $\Rightarrow \pi-2\beta=\beta$, $\Rightarrow \pi=3\beta$, $\Rightarrow \beta=\frac{\pi}{3}$.

211006872 (U362423 M1277162)



$|FM|=2$

$|EN|=5$

$FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$, $S_{\triangle ABC}$, R опис $\triangle ABC$

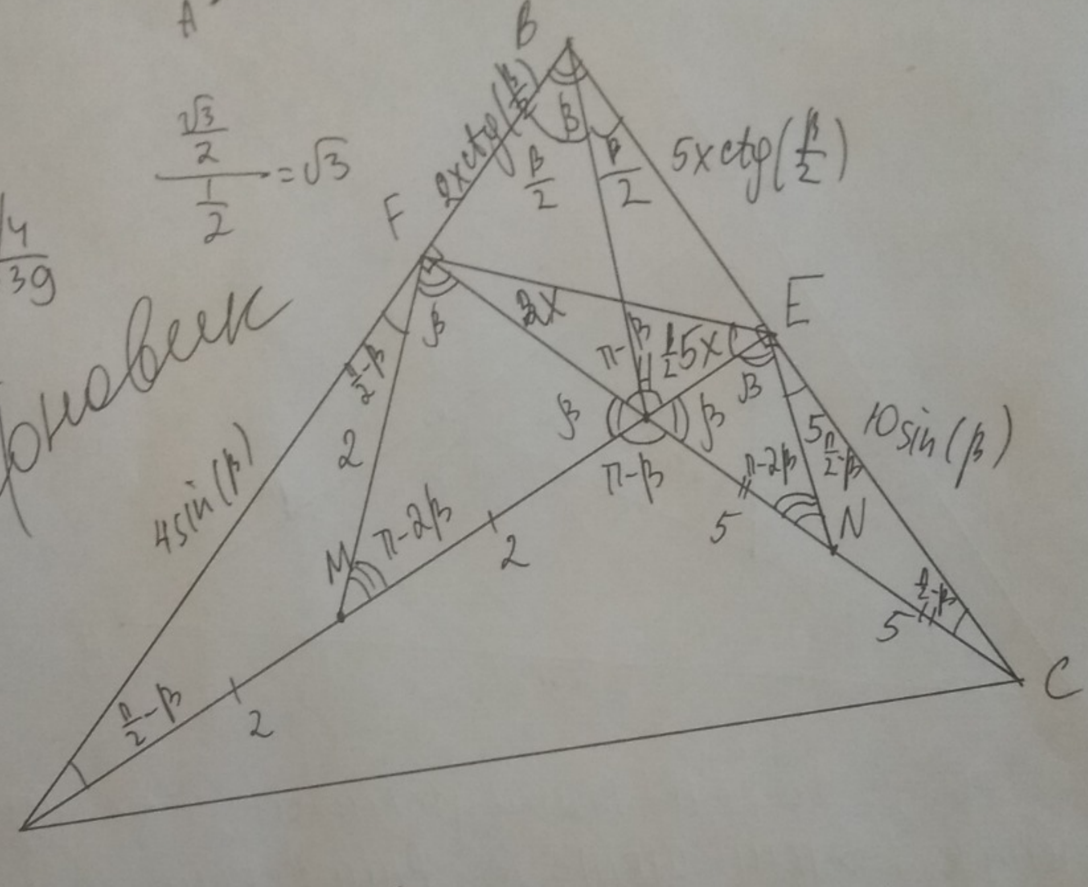
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$156 \,|\, 4$

$-12 \quad 39$

36

Черновик



1) Медиана равна $\frac{1}{2}$ гипотенузы $\Rightarrow |AH|=4$, $|HC|=10$.

2) По т. косинусов для $\triangle AHC$: $\boxed{|AC|^2 = 16+100+2\cos(\beta)\cdot 4\cdot 10}$

3) $\triangle FMH \sim \triangle HEN$, $\triangle MFH$ и HNE — равнобедренные

$$\frac{|FH|}{|HE|} = \frac{|MH|}{|HN|} = \frac{2}{5}.$$

4) $\frac{|BF|}{2x} = ctg\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $|BF| = 2x\,ctg\left(\frac{\beta}{2}\right)$; $\frac{|AF|}{4} = \sin(\beta)$, $|AF| = 4\sin(\beta)$

5) По т. косинусов для MFH: $4x^2 = 4+4+2\cos(2\beta)4$,

$x^2 = 1+1+2\cos(2\beta)$, $\boxed{x^2 = 2+2\cos(2\beta).}$

Вариант 13 Чистовик №5. Задача 2.

Пусть сумма чисел на доске обозначена $x+y+..+p+z$, причем числа расположены в порядке убывания. Запишем систему из 2х уравнений:

$$\begin{cases} x+y+\ldots+p+32z=477, & (1)\\ 14x+y+\ldots+p+z=477. & (2)\end{cases}$$

Вычитаем уравнения: $13x=31z$, $\Rightarrow x=31n$, $z=13n$, где n – натуральное. Подставляем в (1):

$$31n+y+\ldots+p+32\cdot 13n=477,$$

$$447n+y+\ldots+p=477.$$

Т.к. $n, y, \ldots p$ - натуральные, перед n стоит коэффициент 447, а справа стоит 477, n не может быть ничем, кроме 1, иначе равенство не выполнится.

$$y+\ldots+p=30.$$

Минимальное из чисел в оставшейся сумме 14, тогда на все остальные числа получается 16, но нельзя записать 16 как 14 и 2 или 15 и 1, т.к. $1<13$, $2<13$, а мы уже определили, что наименьшее число $z=13$, $\Rightarrow$ остаётся только $p=16$, $y=14$.

Ответ: На доске были написаны числа 31, 16, 14 и 13.

211006872 (U362423 M1277162)

Вариант 13 Чистовик № 4.

Задача 3. Продолжение.

$A(2a, -a)$; $B(4, a^2-6)$.

Прямая $y=1$ - горизонтальная константа. Чтобы точки A и B лежали по разные стороны от $y=1$, нужно, чтобы $(-a)$ и (a^2-6) были по разные стороны от единицы.

1) Пусть $\begin{cases} -a > 1 \\ a^2-6 < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a < 1 \\ a^2 < 7 \end{cases}$ $\begin{cases} a < 1 \\ -\sqrt{7} < a < \sqrt{7} \end{cases}$

Ответ для 1 случая: $-\sqrt{7} < a < 1$;

2) Пусть $\begin{cases} -a < 1 \\ a^2-6 > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1 \\ a^2 > 7 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1 \\ \left[\begin{array}{l} a < -\sqrt{7} \\ a > \sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ для 2 случая: $a > \sqrt{7}$;

Из $(**)$ заметим, что $a \neq 0$, т.к. $36 \neq 0$.

Ответ: $-\sqrt{7} < a < 1$, $a > \sqrt{7}$, $a \neq 0$.

211006872 (U362423 M1277162)

Вариант 13 Чистовик №3.

Задача 3.

Работаем с уравнением, которому удовлетворяют координаты точки А:

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$, (*)

$5a^2-a(6x+2y)+2x^2+2xy+y^2=0$,

$D=(6x+2y)^2-20(2x^2+2xy+y^2)=$

$=36x^2+24xy+4y^2-40x^2-40xy-20y^2=-4x^2-16xy-16y^2=$

$=-4(x+2y)^2$, чтобы уравнение имело корни, его $D\geq 0$, => $-4(x+2y)^2\geq 0$, $(x+2y)^2\leq 0$, => т.к. квадрат всегда неотрицателен, $x+2y=0$, => $x=-2y$.

Подставим в (*): $5a^2+12ay-2ay+8y^2-4y^2+y^2=0$,

$5a^2+10ay+5y^2=0$, $5(a+y)^2=0$, $-a=y$.

Итого координаты точки А: $A(x,y)=A(-2y,y)=$

$=A(2a,-a)$.

Работаем с уравнением окружности с центром в точке В:

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$, (**)

$a^2y^2-2y(a^3-6a)+a^2x^2-8a^2x=-a^4-36$,

$a^2y^2-2y(a^3-6a)+(a^3-6a)^2-(a^3-6a)^2+a^2x^2-8a^2x+16a^2-16a^2=-a^4-36$,

$(ay-(a^3-6a))^2+(ax-4a)^2=(a^3-6a)^2+16a^2-a^4-36$,

$a^2(y-a^2+6)^2+a^2(x-4)^2=(a^3-6a)^2+16a^2-a^4-36$,

Т.к. (**) - уравнение окружности, то из выделенных полных квадратов в левой части можно узнать координаты центра: $y=a^2-6$, $x=4$, => $B(4,a^2-6)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006872**

ID профиля: **362423**

Вариант 13

Задача 6.
Вариант 13.

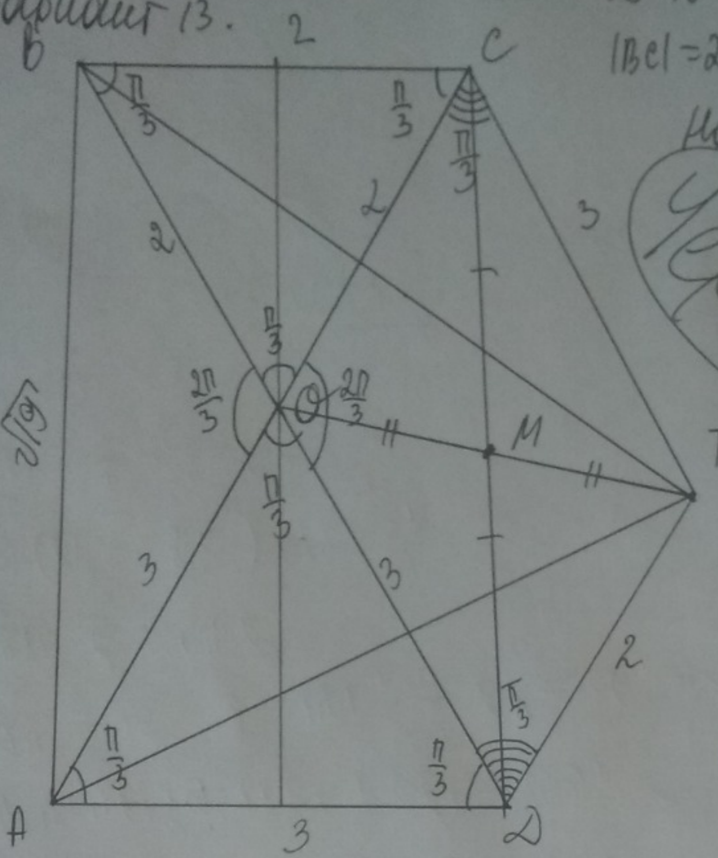
$\triangle BOC$, $\triangle AOD$ — правильные.

Д-ть: ABT — правильный

$|BC|=2$, $|AD|=3$.

Найти: $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$.

Черновик



а)

1) $BC \parallel AD$, т.к. $\angle CBO = \angle BDA = \frac{\pi}{3}$, а они — внутренние накрест лежащие при BC и AD.

2) $\angle BOA = \angle COD = \frac{2\pi}{3}$, как смежные с $\angle BOC$.

3) $OCTD$ — параллелограмм, т.к. CD и OT — диагонали, пересекаются в M и делятся M пополам, $\Rightarrow CO \parallel TD$, $CT \parallel OD$.

4) $BCTD$ и $CTDA$ — две равнобокие трапеции, т.к. $|BC|=|CO|=|TD|$, $|CT|=|OD|=|AD|$.

5) $\angle ODT = \angle OCT$, т.к. $OCTD$ — параллелограмм, $\Rightarrow$ $|BT|=|TA|$ по теореме косинусов для $\triangle BCT$ и $\triangle ATD$, т.к. $\angle BCT = \angle ADT$, $|DT|=|BC|$, $|CT|=|AD|$.

6) $|BA|^2 = |BD|^2 + |AD|^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)|AD|\cdot|BD|$ по теореме косинусов для $\triangle ABD$.

$|BA|^2 = 25 + 9 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5 = 25 + 9 - 15 = 19$, $|BA| = \sqrt{19}$.

~~Чистовик №1.~~ Черновик

~~Задача 4.~~

ЧЕРНОВИК

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b \end{cases} \Rightarrow$ $x^2+y^2=a^2-2b,$

$x^4+2x^2y^2+y^4=(a^2-2b)^2,$ замены

$x^4+y^4=(a^2-2b)^2-2b^2.$ Подставим в систему.

$$\begin{cases} 3(a^2-2b)-2b^2=3, \Rightarrow a^2-2b=\frac{2b^2+3}{3} \leftarrow \text{подставим во (2).} \\ (a^2-2b)^2-2b^2+\frac{2}{3}b^2=17. \ (2) \end{cases}$$

36·143 способы

144 к 12·12·2

288 сторон

12 чисел $\to$ 24 группы

$$\left(\frac{2b^2+3}{3}\right)^2-2b^2+\frac{2}{3}b^2=17,$$

$$\frac{4b^4+12b^2+9}{9}-2b^2+\frac{2}{3}b^2=17,$$

$$4b^4+\cancel{12b^2}+9\cancel{-18b^2}\cancel{+6b^2}=153,$$

$$4b^4=153-9=144, \Rightarrow b^4=36, \Rightarrow b=\pm\sqrt[4]{6}.$$

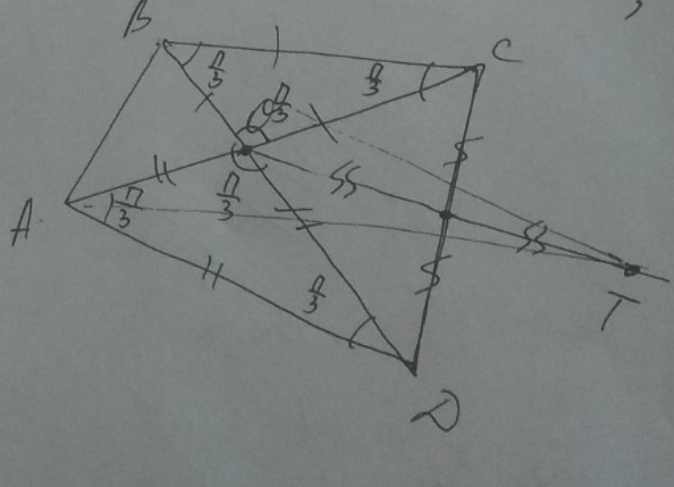
I) Пусть $b=+\sqrt[4]{6}$.

$3(a^2-2\sqrt[4]{6})-12=3,\quad 3a^2-6\sqrt[4]{6}=15,\quad a^2=2\sqrt[4]{6}+5,$

$a=\pm\sqrt{2\sqrt[4]{6}+5}.$

1. Пусть $xy=\sqrt[4]{6}$

$x+y=\sqrt{2\sqrt[4]{6}+5}$



$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, & (1) \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17. & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases}$$

Сложим: $3x^4+3y^4+3x^2+3y^2=54$

$x^4+y^4+x^2+y^2=18,$

$x^4+y^4=18-x^2-y^2$ – подставим во (2)

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ 18-x^2-y^2+\frac{2}{3}x^2y^2=17, \ (3) \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1, \quad x^2+y^2=\frac{2}{3}x^2y^2+1 \ (*)$$

Подставим (*) в (3):

ЧЕРНОВИК

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ – подставим.

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3, \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ -\ 6 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 9=$$

$$=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+13\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=25\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Черновик.

ЧЕРНОВИК

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$$

Делим уравнение:

$17(3x^2+3y^2-2x^2y^2)=3(x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2),$

$51x^2+51y^2-34x^2y^2=3x^4+3y^4+2x^2y^2,$

$3x^4-51x^2+3y^4-51y^2+36x^2y^2=0,$

$x^4-17x^2+y^4-17y^2+12x^2y^2=0$

Пусть $x+y=a$

$xy=в.$

$x^2+2xy+y^2=a^2$

$x^2+y^2=a^2-2в.$

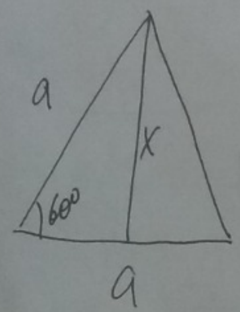
$x^4+2x^2y^2+y^4=(a^2-2в)^2,$

$x^4+y^4=(a^2-2в)-2в^2.$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 9 \\ \hline 153 \\ 17 \\ \hline 170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ -\ 6 \\ \hline 144 \\ -12 \\ \hline 24 \end{array} \quad \Big| \begin{array}{l} 4 \\ \hline 36 \end{array}$$

всего 144, => 12^4 сторон



$\frac{x}{a}=\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \ x=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$

Задача 6. Продолжение. Вариант 13.

7) По теореме косинусов для $\triangle DOC$:

$|DC|^2 = |DO|^2 + |OC|^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot|OD|\cdot|OC|$,

$|DC|^2 = 9 + 4 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = 13 + 6 = 19$, $\Rightarrow |DC| = \sqrt{19}$;

~~8) Аналогично для $\triangle$~~

8) $\angle CTD = \angle COD = \frac{2\pi}{3}$, т.к. $DOCT$ - параллелограмм, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODT = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \angle OCT$.

36·143 - 2 штрих из 144

Сколько дублей всего?

9) По теореме косинусов для $\triangle ADT$:

$|AT|^2 = |AD|^2 + |TD|^2 - 2\cos(\angle ADT)\cdot|AD|\cdot|DT| =$

$= 9 + 4 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3\cdot 2 = 9 + 4 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6 = 19, \Rightarrow$

$\Rightarrow |AT| = \sqrt{19}, \Rightarrow |BT| = \sqrt{19}$ из п. 5, $\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный, ч.т.д.

б)

10) $S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 19 = \frac{19}{4}\sqrt{3}$;

11) $S_{ABCD} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 9 =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{4}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3} =$

$= \frac{16\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{4} = \frac{25}{4}\sqrt{3}$.

12·11 = 132 ?

12) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{19}{4}\sqrt{3}}{\frac{25}{4}\sqrt{3}} = \frac{19}{25}$.

12 дубли.

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19}{25}$.

черновик

~~[illegible]~~ Вариант 13 Задача 4. Черновик

$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$

ЧЕРНОВИК

$x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ (*)

Подставим (*) в систему.

$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3, \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$

$C_{144}^2=\frac{144!}{142!\,2!}=\frac{144\cdot 143}{2}=72\cdot 143$

Сразу $\frac{72}{2}=36 \Rightarrow 36\cdot 143$.

Пусть $x^2+y^2=p$, $x^2y^2=q$, $p\geq 0$, $q\geq 0$.

$\begin{cases} 3p-2q=3, \\ p^2-2q+\frac{2}{3}q=17, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p-2q=3, \\ 3p^2-6q+2q=51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p-2q=3, & (1) \\ 3p^2-4q=51. & (2) \end{cases}$

Умножим (1) на 2 и выразим оттуда $4q$, после чего подставим во (2):

(**) $2\cdot(3p-3)=4q$, $\Rightarrow 3p^2-2(3p-3)=51$,

$3p^2-6p+6=51$, $3p^2-6p+3=48$, $3(p^2-2p+1)=48$,

$(p-1)^2=16$, $\Rightarrow p-1=\pm 4$, $\Rightarrow p_1=5$.

$p_2=-3$ — Не может быть, $p\geq 0$

Подставим полученное p в (**):

$2(15-3)=4q$, $24=4q$, $q=6$.

Запишем систему с p и q: $\begin{cases} p=5, \\ q=6. \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=5, & (3) \\ x^2y^2=6. & (4) \end{cases}$

~~Умножим (4) на 2 и сложим~~

211006872 (U362423 M1277163)

Чистовик №3 Задача 5 Вариант В.

Так как карточки различны, на одну сторону каждой из них у нас есть 12 вариантов чисел, а на другую →11, => 12·11=132 всего 132 карточки с различными числами на синей и красной стороне, => 144−132=12 дублей.

Но т.к. пары АВ и ВА не считаются различными, считаем, что различных карточек не 132, а 76. Среди 12 дублей вместе с одной из 76 карточек нельзя вытащить лишь два, но оставшиеся 10 можно, => всего вариантов будет 76·10 = 760 вариантов.

~~Ответ~~ У фокусника есть 760 способов вытащить две карточки так, чтобы среди них был один дубль и еще одна простая карточка, но еще он может вытащить 6 пар только из дублей, => всего способов 766.

Ответ: У фокусника 766 способов вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль и никакие числа не встречались ~~друга~~ на обеих карточках.

Чистовик №2 Вариант 13 Задача 4.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$$

$x^4+y^4 = x^4+2x^2y^2+y^2-2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \ (*)$

Подставим $(*)$ в систему:

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3, \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2+\frac{2}{3}x^2y^2=17. \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=p$, $x^2y^2=q$, $\Rightarrow p\geq 0$, $q\geq 0$.

$$\begin{cases} 3p-2q=3, \\ p^2-2q+\frac{2}{3}q=17, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(p-1)=2q \\ 3p^2-6q+2q=51 \end{cases} \begin{cases} 6(p-1)=4q, \ (1) \\ 3p^2-4q=51. \ (2) \end{cases}$$

Подставим $4q$ из (1) во (2): $3p^2-6(p-1)=51$,

$3p^2-6p+6-51=0$, $3p^2-6p+3=48$, $(p-1)^2=16$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_1-1=4 \\ p_2-1=-4 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} p_1=5, \text{ - Подставим в (1).} \\ p_2=-3 \text{ - Не подходит, т.к. } p\geq 0. \end{array}\right.$

$4q=6(5-1)$, $2q=3\cdot(4)$, $q=6$.

Вернемся к исходным переменным:

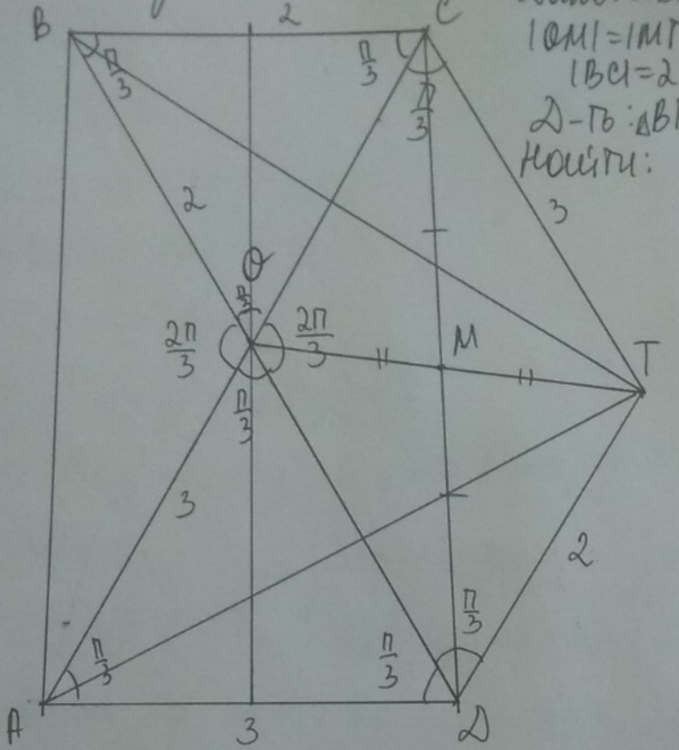
$$\begin{cases} p=5, \\ q=6 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=5, \ (3) \\ x^2y^2=6, \end{cases} y^2=\frac{6}{x^2} \text{ - подставим в (3):}$$

$x^2+\frac{6}{x^2}=5$, $x^4+6=5x^2$, $x^4-5x^2+6=0$,

$D=25-24=1$, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1^2=\frac{5+1}{2} \\ x_2^2=\frac{5-1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1^2=3, \Rightarrow y_1^2=2. \\ x_2^2=2, \Rightarrow y_2^2=3. \end{array}\right.$

Ответ: $x_1=\sqrt{3}$, $y_1=\sqrt{2}$; $x_2=\sqrt{2}$; $y_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$; $y_3=-\sqrt{2}$; $x_4=-\sqrt{2}$; $y_4=-\sqrt{3}$; $x_5=-\sqrt{3}$; $y_5=\sqrt{2}$; $x_6=\sqrt{3}$; $y_6=-\sqrt{2}$; $x_7=-\sqrt{2}$; $y_7=\sqrt{3}$; $x_8=\sqrt{2}$; $y_8=-\sqrt{3}$;

Чистовик №1 Задача 6 Вариант 13



Дано: ΔBOC и ΔAOD - правильные; $|OM|=|MT|$; $|CM|=|MD|$; $|BC|=2$; $|AD|=3$;

Д-ть: ΔBTA - правильный;

Найти: $\frac{S_{\Delta BTA}}{S_{ABCD}}$.

Решение:

а)

1) $\angle BOA=\frac{2\pi}{3}$, $\angle COD=\frac{2\pi}{3}$, т.к. они смежные с $\angle BOC=\angle AOD=\frac{\pi}{3}$.

2) $OCTD$ - параллелограмм, т.к. OT и CD - диагонали, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

$\Rightarrow |BC|=|BO|=|OC|=|TD|$, $|AD|=|OD|=|OA|=|CT|$, $\angle CTD=\frac{2\pi}{3}$,

$\angle OCT=\angle ODT=\frac{\pi}{3}$.

3) $\Delta BOA=\Delta BCT=\Delta ATD$ по двум сторонам и углу между ними из п.2, $\Rightarrow |BA|=|BT|=|AT|$, как соответствующие элементы в равных Δ, ч.т.д.

б)

1) По теореме косинусов для ΔADT:

$|AT|^2=|AD|^2+|TD|^2-2\cos(ADT)\cdot|AD|\cdot|DT|=9+4+2\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot2=19$,

$\Rightarrow |AT|=|BA|=|BT|=\sqrt{19}$.

2) $S_{\Delta ABT}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot19=\frac{19}{4}\sqrt{3}$;

3) $S_{ABCD}=S_{\Delta ABO}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}+S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot6+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot6+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot9=$

$=\frac{25}{4}\sqrt{3}$, $\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{19}{4}\sqrt{3}}{\frac{25}{4}\sqrt{3}}=\frac{19}{25}$.

Ответ: $\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{19}{25}$.