Часть 1

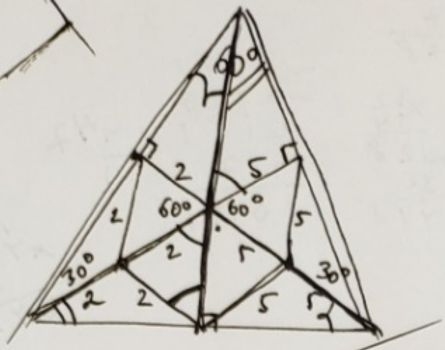
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

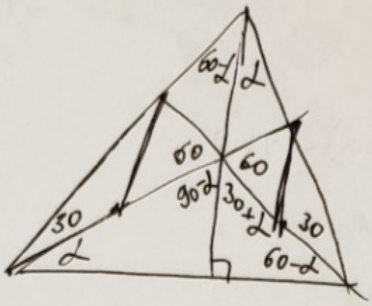
Шифр: **211006680**

ID профиля: **357060**

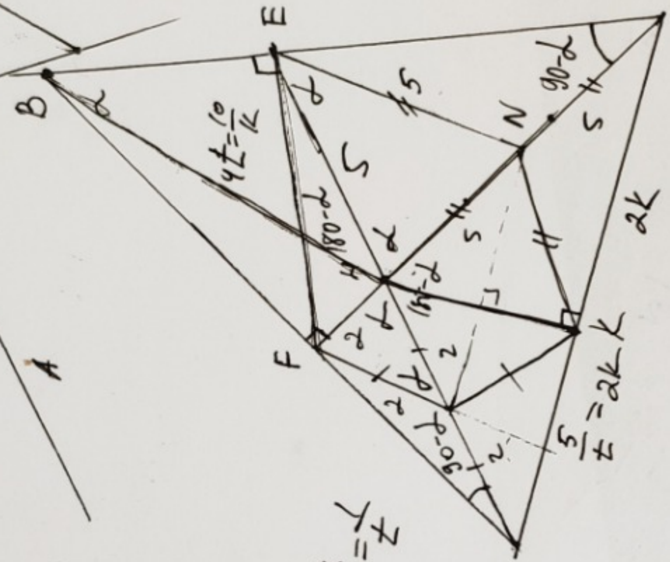
Вариант 13

Черновик ①





$90-60+\alpha$



$13\cdot3\cdot2\cdot2$

$2\sqrt{3\cdot13}$

$4t=\frac{10k}{k}$

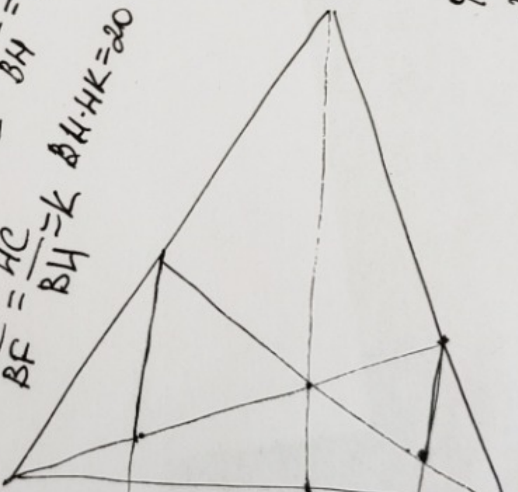
$4tk=10$

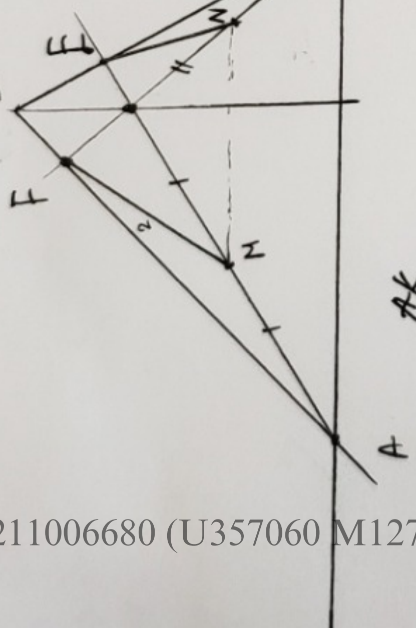
$2tk=5$

$t=\frac{5}{2k}$

$\frac{\sqrt{156}\cdot 2}{\sqrt3}=\frac{10}{x}$

$x=\sqrt3\cdot 10$





$\frac{AK}{BE}=\frac{AH}{BH}=\frac{HK}{HE}$ $\frac{AK}{BE}=\frac{7}{BH}=\frac{HK}{5}=\frac{7}{t}$

$\frac{HK}{FH}=\frac{CK}{BF}=\frac{HC}{BH}=k$ $BH\cdot HK=20$

$\frac{HK}{2}=\frac{CK}{BF}=\frac{10}{BH}$

a b (2) Черновик

$32a + b = 477$

$a + 14b = 477$

$b = 477 - 32a$

$a + 14(477 - 32a) = 477$

$a + 6578 - 448a = 477$

$6101 = 447a$

$31a - 13b = 0$

$32a + b + c = 477$

$a + b + 14c = 477$

$31a - 13c = 0$

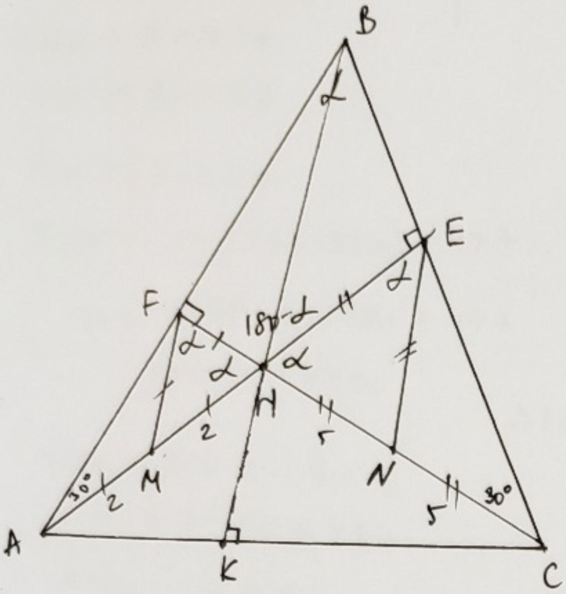
$a = 13 \quad c = 31$

30

$$\begin{array}{r} 477 \\ \times\ 14 \\ \hline 1808 \\ 477 \\ \hline 6578 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times\ 14 \\ \hline 128 \\ 32 \\ \hline 448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6578 \\ -\ 477 \\ \hline 6101 \\ 447 \\ \hline 1631 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 447 \\ \times\ 3 \\ \hline 1341 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ 32 \\ \hline 52 \\ 78 \\ \hline 2 \end{array}$$

Чистовик Задача 1



Дано: $\triangle ABC$ – ост-й, AE и CF – высоты
$AE \cap CF = H$, M – сер. AH, N – сер. CH.
$FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$, $S_{\triangle ABC}$, $R_{\text{оп. окр.}}$

Решение: 1. пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда
$\angle FHE = 180 - \alpha$ – по св-ву углов чет-ка
$\angle EHC = \angle FHA$ – смежные
$\angle EHC = 180° - \angle FHE = \alpha = \angle FHA$

2. Заметим, что FM – это ~~в~~ медиана, проведенная к гипотенузе в прямоуг-ом тр-ке AFH.
Аналогично для EN.
Тогда $FM = MA = MH = 2$
$EN = NH = NC = 5$

3. Тогда $\angle EHN = \angle HEN = \alpha$
$\angle MHF = \angle MFH = \alpha$
а т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle MFH = \angle HNE = \alpha$ – внутрен. накрест лежащие при FN
Тогда $\triangle HNE$ – равносторон.
аналогично для $\triangle MFH$
сл-но $\alpha = 60° = \angle ABC$

4. Поэтому в пр. тр-ах AFH и HEC катет, леж. напротив угла 30° равен половине гипотенузы: $FH = 2$, $HE = 5$

5. По теореме косинусов для $\triangle AHC$: $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC \cos(180-60)°$

$$AC^2 = 16 + \cancel{25}\ 100 + 80 \cdot \frac{1}{2} = 156$$

По теореме синусов для $\triangle AHC$: $\frac{AC}{\sin 120°} = \frac{HC}{\sin\angle HAC} \to \sin\angle HAC = \frac{\sqrt{3} \cdot \cancel{10}\ 5}{2 \cdot \sqrt{156}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}$

$\frac{AC}{\sin 120°} = \frac{AH}{\sin\angle HCA} \to \sin\angle HCA = \frac{1}{\sqrt{13}}$

Тогда $\sin\angle BAC = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

По т. синусов для $\triangle ABC$
Тогда $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{AC}{\sin 60°} \to BC = \frac{\sqrt{156} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13}} = 2$

сл-но $S_{\triangle ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{9 \cdot 2}{2} = 9$

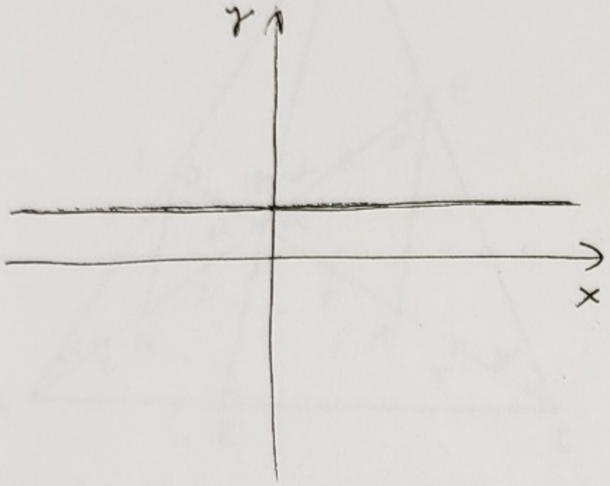
$\frac{AC}{\sin 60°} = 2R \to R = \frac{AC}{\sin 60° \cdot 2} = \frac{\sqrt{156} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$

Ответ: $60°$; 9; $2\sqrt{13}$

Черновик ③

$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

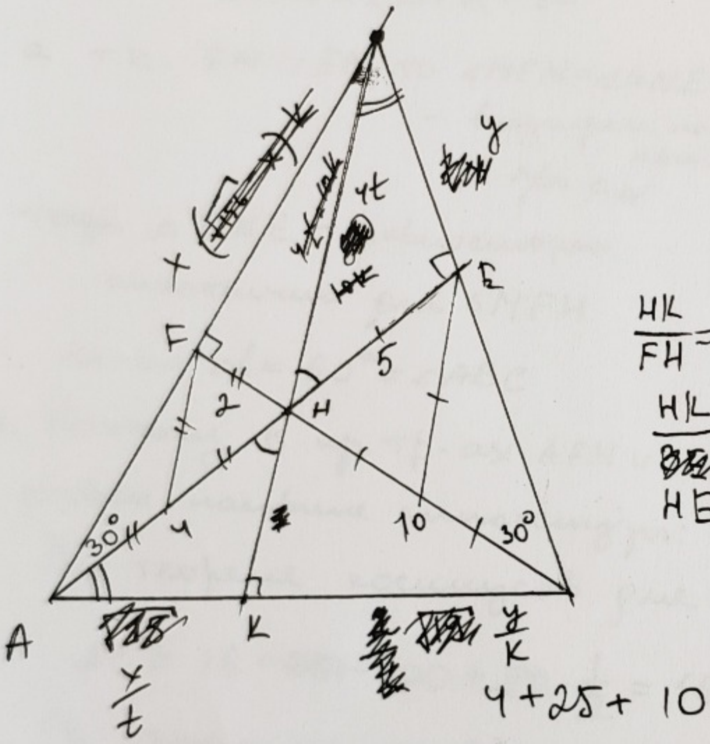
$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$



$2x^2 + xy - 6ax$

$y^2 + xy - 2ay$

Черновик ②



$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}$

$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{52}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{13}}$

$2t = 5k$

$t = \frac{5k}{2}$

$\sin(30) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{3} \cdot 5}{4\sqrt{13}}$ $\frac{1}{2\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{36}}{2\sqrt{13}}$

$\frac{HK}{FH} = k$

$\frac{HK}{2} = k$

$\frac{HK}{HE} = t$

$\frac{HK}{5} = t = \frac{5k}{2}$

$H = 2k = \frac{25k}{2}$

$HK = 2k$

$2HK = 25k$

$\frac{6+1}{2\sqrt{13}}$ $\frac{7}{2\sqrt{13}}$

$4 + 25 + 10$

$x + y = \sqrt{156}$

$\frac{AC}{\sin 120} = \frac{AH}{\sin \angle H}$

$\frac{HE}{2t} = \frac{FH}{2k}$

BE

$\sin \angle HCA = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{15}}$

$\frac{HE}{5k} = \frac{FH}{2k}$

$\begin{cases} 16t^2 = t^2x^2 + 25 \\ (\sqrt{156} - x)^2 \frac{4t^2}{25} + 4 = \frac{100 \cdot 2t}{5} \end{cases}$ $\frac{1}{\sqrt{13}}$

$\frac{x}{k} + \frac{4}{t} = \sqrt{156}$

$\frac{\sqrt{100k^2 - 4}}{k} + \frac{\sqrt{16t^2 - 25}}{t} = \sqrt{156}$

$(156 + x^2 - 2\sqrt{156})\frac{4t^2}{25} + 4 = 40t$

$\frac{2\sqrt{25k^2 - 1}}{k} +$

$\frac{52}{25}$ 27 $1 - \frac{1}{13}$ $\frac{12}{13}$ $1 - \frac{25}{4 \cdot 13}$

52

211006680 (U357060 M1273743)

Чистовик Задача №2

Допустим, что на доске записаны числа: $a < \ldots < b$

Независимо от того, какие числа находятся между a и b можем написать ур-е:
$$\begin{cases} 32a + \ldots + b = 477 & (1) \\ a + \ldots + 14b = 477 & (2) \end{cases}$$

Вычтем (1) из (2): $31a - 13b = 0$

$31a = 13b$ (3)

Если $a = 13$, $b = 31$; то сумма чисел между a и b равна 30.
Тогда это либо 30, либо 14 и 16 (других вар-ов нет, т.к числа различны)
Если же a и b из ур-я (3) будут принимать другие значения, то условие не будет выполняться. Например, $a = 26$ $26 \cdot 32 > 477$

Ответ: 13, 30, 31; 13, 14, 16, 31

211006680 (U357060 M1273743)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006680**

ID профиля: **357060**

Вариант 13

Задача №4

Математика 9 класс

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \quad |:3\\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1\\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^4+x^2+y^4+y^2=18 \ (V)\\ x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1\end{cases}$$

(V) $x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+y^2=3x^2+3y^2-3+18$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)=3(x^2+y^2+1)+12$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)-3(x^2+y^2+1)=12$

$(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-3)=12$

Пусть $x^2+y^2=a$, тогда

$(a+1)(a-3)=12$

$a^2-2a-15=0$

$D=4+60=64$

$$\left[\begin{array}{l}a=\frac{2+8}{2}\\ a=\frac{2-8}{2}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}a=5\\ a=-3\end{array}\right.$$

Сл-но $\left[\begin{array}{l}x^2+y^2=5\\ x^2+y^2=-3\end{array}\right.$

Если:

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2=5-y^2\\ 3(5-y^2)+3y^2-2(5-y^2)y^2=3 \ (W)\end{cases}$$

(W) $15-\cancel{3y^2}+\cancel{3y^2}-10y^2+2y^4=3$

$2y^4-10y^2+12=0$

$y^4-5y^2+6=0$

$D=25-24=1$

$$\left[\begin{array}{l}y^2=\frac{5+1}{2}\\ y^2=\frac{5-1}{2}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}y^2=3\\ y^2=2\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}y=\sqrt{3}\\ y=-\sqrt{3}\\ y=\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{2}\end{array}\right. \ (1)$$

Ответ:

Из (1):

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-\sqrt{3}\\ y=\sqrt{3}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}$$

Если $\begin{cases}x^2+y^2=-3\\ 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\end{cases}$

$x^2=-3-y^2$

$-3(3+y^2)+3y^2+2(3+y^2)y^2=3$

$-9-\cancel{3y^2}+\cancel{3y^2}+6y^2+2y^4=3$

$2y^4+6y^2-12=0$

$y^4+3y^2-6=0$

$D=9+24=23$

$$\left[\begin{array}{l}y^2=\frac{-3+\sqrt{23}}{2}\\ y^2=\frac{-3-\sqrt{23}}{2}\end{array}\right.$$

и т.д.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

Черновик (1)

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$x^4+x^2+y^4+y^2=18$

$x^4+y^4+2x^2y^2+x^2+y^2-3x^2-3y^2+3=18$

$\cancel{(x^2+y^2)^2+-2x^2-2y^2=15}$

$\cancel{(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)=15}$

$\cancel{(x^2+y^2)((x^2+y^2-2)=15}$

$x^4+x^2+y^4+y^2=18$

x^4+x^2
$+y^4+y^2$

$18x^2+18y^2-12x^2y^2=0$

$18 \times 4 = 72$

$D=1-4(y^4+y^2-18)=1-4y^4-4y^2+72$

$x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2+y^2+x^2-18=0$

$4y^4+4y^2-73=0$

$4y^4+4y^2+1-74$

$2y^2+1 \quad 4y^4+4y^2+1$

$(2y^2+1)^2-74$

$\cancel{x^4+y^4+2x^2y^2-\frac{2}{3}x^2y^2}$

$2x^4+2y^4+(x^2+y^2)^2=51$

$3(x^2+y^2)-2x^2y^2+2x^4+2y^4+(x^2+y^2)^2=54$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2+3)-2x^2y^2+2x^4+2y^4-54=0$

$x^2+y^2+1=$
$x^2+y^2-3=$

$x^2+y^2=3$
$x^2+y^2=6$

$(a+1)(a-3)=12$

$a^2-3a+a-3=12$

$a^2-2a-15=0$

$D=4+60=8^2$

211006680 (U357060 M1273744)

Черновик (1)

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \quad | \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 3 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\cancel{x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2-3x^2-3y^2-2x^2y^2=15}$$

$$\cancel{x^2(x^2-3)+y^2(y^2-3)}$$

$$\cancel{3x^2+3y^2-x^2y^2-x^2y^2}$$

$$\cancel{x^2(3-y^2)+3(x^2+y^2)-xy(x}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases}$$

$$3x^4+3y^4+3x^2+3y^2=54 \qquad \cancel{3x^4+3y^4}$$

$$x^4+y^4+x^2+y^2=16$$

$$y^4+y^2+x^4+x^2-16=0$$

$$\cancel{3a-3b+2ab=}$$

$$\cancel{a^2+b^2+2ab+2a^2+2b^2=51}$$

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1$$

$$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17$$

$$x^4+x^2+y^4+y^2=18$$

$$x^4+\cancel{y}\,2x^2y^2+y^4+x^2+\cancel{2xy}+y^2 \qquad \cancel{(x^2+y^2)(x^2)}$$

$$(x^2+y^2)^2+x^2+y^2$$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)=3x^2+3y^2-3+18$$

$$\cancel{3(x^2+y^2+2)}$$

$$3x^2+3y^2+3+12$$

$$=3(x^2+y^2+1)+12$$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)-3(x^2+y^2+1)-12=0$$

$$(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-3)-12=0$$

$$\begin{cases} 3a+3b-2ab=3 \\ a^2+b^2+\frac{2}{3}ab=17 \quad | \times 3 \end{cases}$$

$$3a+3b-2ab=3$$

$$3a^2+3b^2+2ab=51$$

$$3a^2+3a+3b^2+3b=54$$

$$a^2+a+b^2+b=18$$

$$\cancel{D=1-4(b^2+b-16)=}$$

$$\cancel{=1-4b^2-4b+64}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 16 \\ 4 \\ \hline 64 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 18 \\ 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\cancel{a^2+a-8+b^2+b-8=0}$$

$$\cancel{a(a+1)+b(b-1)=16}$$

$$\cancel{a^2+2ab-2ab+b^2}$$

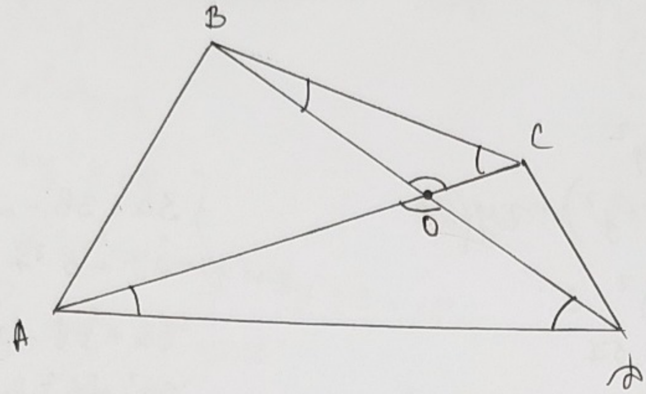
$$\cancel{(a+b)^2+a-ab-ab+b}$$

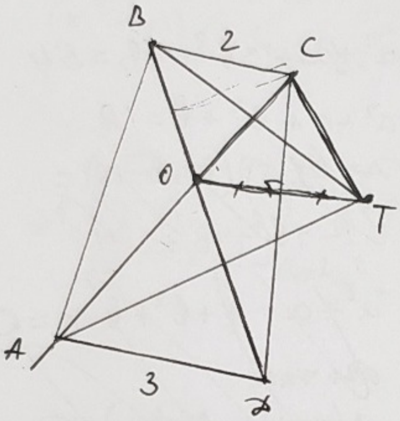
$$\cancel{a(1-b)+b(1-a)}$$

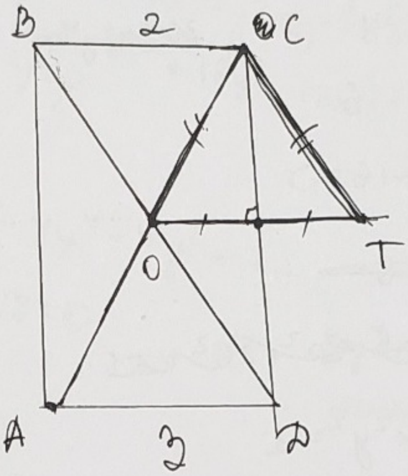
$12 \cdot 11 \cdot 11 = 121 \cdot 12$

Черновик (3)

$$\begin{array}{r} \times\, 121 \\ 12 \\ \hline 242 \\ 121 \\ \hline 1452 \end{array}$$

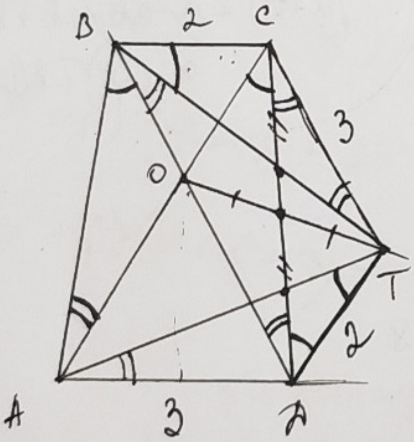


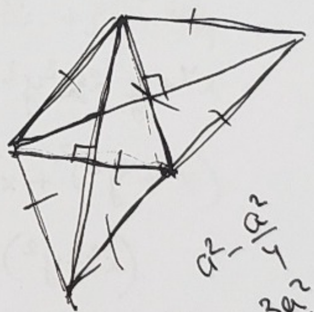




$ABCD = \frac{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}$

$180 - 60$

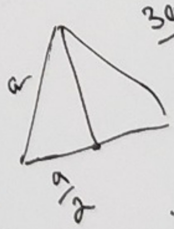




$a^2 - \frac{a^2}{4}$

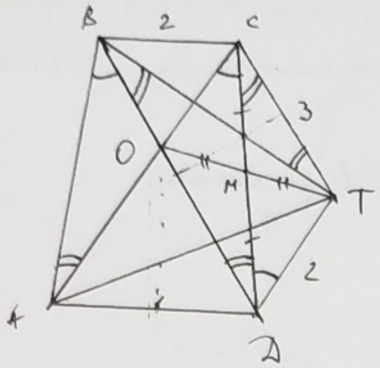
$\frac{3a^2}{4}$

$\frac{\sqrt{3}a}{2}$



Задача №6 Математика 9 класс

а).



Дано: ABCD - четырёх-к
$AC \cap BD = O$ - диаг.
M - сер. CD
O сим. T относит. M
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - прав-ые.
Д-ть: $\triangle ABT$ - р/с.

Решение: 1. В четырёх-ке OCTD - диагонали точкой пер. делят друг друга пополам, тогда OCTD - парал-м.
сл-но $OD \parallel CT$, $OC = DT = 2$, тогда BCTD - р/б трапеция

2. Тогда пусть $\angle BAC = \alpha$
$\angle ABD = \beta$

$\alpha + \beta = 60^\circ$, т.к. $\angle BAD = 60^\circ + \alpha$
$\angle ABC = 60^\circ + \beta$ - смежные

~~$\angle B$~~ ABCD - р/б трапеция $BC \parallel AD$ - вн.н.леж. углы по 60° и $AC = BD = 2+3=5$

тогда $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, а т.к. BCTD - р/б трап., то $\angle BDC = \angle TBD = \alpha$.

тогда $\angle ABT = \alpha + \beta = 60^\circ$

3. Из OCTD - пар-ма: $OD = CT = 3 = AD$, тогда $\triangle ADT = \triangle BCT$ - I признак
сл-но $BT = AT$
т.к. $\angle CDT = \angle ACD$ - из пар-ма OCTD

Тогда $\triangle ABT$ - правильный ч.т.д.

б). ~~В р/б трапеции с углом 60° при основании углы, опирающиеся на это основание равны 90°. Тогда $\alpha = 30^\circ$~~

По теореме косинусов для $\triangle AOB$: $\angle BOA = 120^\circ$

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 9 + 4 + 6 = 19$

Тогда в $\triangle ABT$ - р/с сторона равна $\sqrt{19}$.

$S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{25 \cdot \sqrt{3}}{4}$ Поэтому $S_{\triangle ABT} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{4}$

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 25\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{19}}{25}$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{19}}{25}$

211006680 (U357060 M1273744)

Математика
9 класс

Задача №5

Рассмотрим две вытянутые карточки. ~~Дубль~~ На карточке с дублем можно разместить числа только 12 вариантами. На второй карточке, которая может не быть дублем, можно расположить $11 \cdot 11$ вариантов чисел.

Т.к. карточек всего 12^2, то $12 \cdot 11 \cdot 11 = 1452$ варианта.

Ответ: 1452