Часть 1

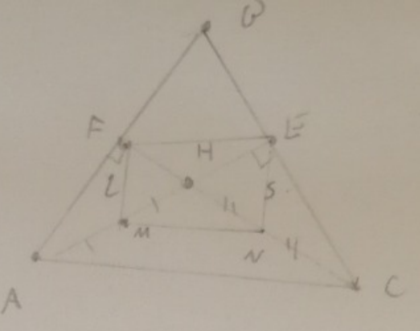
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006673**

ID профиля: **171410**

Вариант 13

№1



Решение:

1) $EN = NH = CN = 5$; $FM = MH = AM = 2$ (как медианы прямоуг. 3-ов.)

2) $MN \parallel AC$ (как ср. линия $\triangle AHC$).

3) $AFEC$ – впис. (т.к. $\angle AFC = \angle AEC = 90^\circ$ и оп. на AC).

4) тогда $\angle FEA = \angle FCA$ (как соотв. уг. впис. 4-х уг.)

5) $\angle ACF = \angle MNF$ (как соотв. при пар. прямых и сек.)

6) тогда $\angle FEM = \angle FNM$; тогда $MFEN$ – впис. (по призн. впис. 4-х уг.);

7) тогда, т.к. $FM \nparallel EN$ и $FM \neq EN$; то $MFEN$ – р/б трапеция (как впис. 4-х уг. с парал. неравными сторонами)

8) тогда $FH = MH = FM = 2$; ~~HF~~ $HE = HN = EN = 5$ (по св. диаг. р/б трап.)

9) тогда $\triangle FHM$ – р/ст; $\triangle HEN$ – р/ст, тогда $\angle AHC = 180 - 60 = 120^\circ$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle AHC = 60^\circ$.

10) т.к. $AE = AM \cdot 2 + ME = 4 + 5 = 9$; т.к. $\angle ABC = 60^\circ$; то $\angle BAE = 30^\circ$, тогда $BE = \frac{1}{2} \cdot AB$ (по св. прям. 3-к с углом в 30°)

т.к. $AE = 9$; то по т. Пифагора: $AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = 9^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{4}AB^2 = 9^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 9 \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$, тогда $S_{\triangle ABC} =$

$= \frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$.

11) $AH = 4$; $CH = 10$; $\angle AHC = 120^\circ$; по т. косинусов: $AC^2 = 4^2 + 10^2 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot 4 \cdot 10 \Rightarrow AC = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$

12) по т. синусов, $\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R_{оп.} \Rightarrow \frac{2\sqrt{39}}{\sin 60^\circ} = 2R_{оп.} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R_{оп.} \Rightarrow R_{оп.} = 2\sqrt{13}$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3}$; $R_{оп.} = 2\sqrt{13}$.

№2.

$a_1 + \ldots + a_n$; a_1 - мин. число; a_n - макс.

$2a_1 + \ldots + a_n = 477$;

$a_1 + \ldots + 14a_n = 477$;

тогда $31a_1 = 13a_n$; т.к. 31 и 13 - взаимнопрост.;

а a_1 и a_n - нат., то $a_1 \vdots 13$; $a_n \vdots 31$;

$a_n = \frac{31}{13}a_1$; т.к. $a_1 \vdots 13$, то или

$a_1 = 13$; или ~~$32a_1$~~ $a_1 \geq 26$; тогда $32a_1 \geq 832$;

$32a_1 > 477$; что противоречит условию; т.к. все числа натуральные; тогда $a_1 = 13$;

$a_n = \frac{31}{13}a_1 = 31$; $14a_n = 14 \cdot 31 = 434$;

$a_1 + 14a_n = 13 + 434 = 447$; тогда; т.к. по усл.;

$a_1 + \ldots + 14a_n = 477$; $a_2 + \ldots + a_{n-1} = 30$;

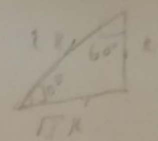
т.к. a_1 - мин. число; а a_n - макс., то $a_2, \ldots, a_{n-1} > 13$;

$a_2, \ldots, a_{n-1} < 31$; если в сумме $a_2 + \ldots + a_{n-1}$ - более 2-х чисел; все они больше 13; то сумма больше 30 - противоречие; если в сумме одно число; то оно равно 30.

если в сумме 2 числа; т.к. если большее из этих 2-х чисел больше или равно 13; то меньшее меньше или равно 13;

чего не может быть; т.к. оба числа больше 13;
значит большее из этих 2-х чисел меньше или равно 16
~~или оно равно~~ значит оно может быть равно
~~13~~ 14, 15, 16; ~~15~~ 15 и 14 оно не равно, т.к. ~~тогда~~
это наибольшее и если оно ≤ 15; то в сумме с
меньшим даст меньше 30; значит оно равно 16;
тогда меньшее из этих 2-х чисел равно 14.

Ответ: (13, 30, 31); (13, 14, 16, 31).



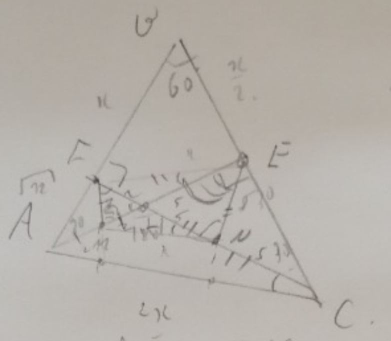
$\frac{AB}{\sin C} = 4\sqrt{13}$ $\frac{AE}{AB}$

$\frac{BC}{\sin A} = 4\sqrt{13}$ $\frac{AC}{AC}$ $49+25-35=39$

$x^2 = 7^2 + 5^2 - 35$

$x = \sqrt{39}$

$\frac{2\sqrt{39}}{\sin 60^\circ} = 2R$



$7; 5; 60^\circ$

$x^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 7 \cdot 5$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\frac{AE}{AC}$ $\frac{AB \cdot AC}{AE}$

$2\sqrt{39} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2R$

$\angle ABC - ?;$ $S_{\triangle ABC} - ?$ $AC = 2\sqrt{39}$

$r_{o} - ?$

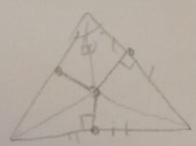
$4\sqrt{13} = 2R$, $R = 2\sqrt{13}$

$x^2 = 2^2 + 5^2 + 2 \cdot 5$

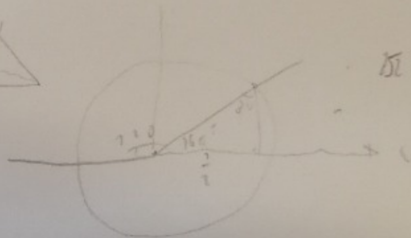
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $156 - 81 = \sqrt{75}$ $25 + 4 + 10 = 39$

$x^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot 2 \cdot 5$

$\sqrt{4 \cdot 39 - x^2}$



$156 - 144$



$\cos \sqrt{12}$

$\sqrt{R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{a}{2} =$

$36\sqrt{3} = S_{\triangle ABC}$

$x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$ $\sqrt{75}$, $\sqrt{12}$

$9 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}\,x}{2} = 9$;

$\frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{75} + \frac{x}{2}$

$x = \frac{18}{\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} = AB$

$2\sqrt{}$

$x = \sqrt{3} \cdot 6$

$3\sqrt{3}$

$8\sqrt{3} = BC$

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$ $BC = 5\sqrt{3}$ $310 + 124$

211006673 (U171410 M1274400)

$a, b, c \ldots$

$a_1, a_2, a_3 \ldots$

$a_1 \cdot 31 + a_2 + \ldots = 477$ $\quad x^2 - 6ax + 9a^2$ $\quad x^2 + xy - 5a^2$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \cdot 14 = 477$ $\quad y^2 - 2ay + a^2$ $\quad 4 + 13a = 477$ $\quad 5a^2 - 2xy - x^2$

$(x - 3a)^2$

$(y - a)^2$ $\quad 4 + 31 L = 477$

$5a^2 - 3a^2 - xa^2$

$477 - 31 a_1 = 477 - 13 a_n$

$a_1 = \frac{13}{31} a_n$

$13 a_n = 31 a_1$

$(x+y)^2 + (x - 3a)^2 - 2ay - 4a = 0$ $\quad 5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$-2a(y+2)$ $\quad a_n = \frac{31}{13} a_1$ $\quad 159 \cdot 3$

$53 \cdot 3 \cdot 3$

14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; ...

$a_1 : 13$ $\quad a_n : 31$

13 $\overset{30}{\ldots}$ 31 $\quad 13 \cdot 31 =$ $\quad \frac{31 \cdot (31+1)}{2} - \frac{12 \cdot (12+1)}{2}$

13 31

$= 390 + 26 = 416$ $\quad 267 \quad 61$ $\quad 31 \cdot 16 - 6 \cdot 13$

$496 - 78$

$31 \cdot 14 = 310 + 124 = 434$ $\quad 39 : 13$ $\quad 417$

447

52, 124

65, 155

78, 186

91, 217

211006673 (U171410 M1274400)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006673**

ID профиля: **171410**

Вариант 13

№4.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \mid \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \\ \cancel{3x^2+3y^2-2x^2y^2=3} \\ 3x^4+3x^2+3y^4+3y^2=54. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cancel{3x^4+3y^4+2x^2y^2=51},$$

$$\cancel{\text{тогда}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \\ 3x^4+3x^2+3y^4+3y^2=54. \end{cases}$$

$$\text{тогда} \begin{cases} 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \\ x^4+y^4+x^2+y^2=18 \mid \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x^4+y^4)+(x^2+y^2)^2=51 \\ 2x^4+2y^4+2x^2+2y^2=36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)^2-2x^2-2y^2=15. \\ \cancel{x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17} \\ 3x^2+y^2-2x^2y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1=16 \\ \cancel{x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17.} \\ 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-1)^2=16 \\ 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ x^2+y^2=-3 \end{array}\right. \\ 3(x^2+y^2)-2(xy)^2=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2(xy)^2=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ 2(xy)^2=-12. \end{cases} \text{ — нет реш.} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=2 \\ y^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\sqrt{2};\sqrt{3}\}$; $\{-\sqrt{2};\sqrt{3}\}$; $\{\sqrt{2};-\sqrt{3}\}$ $\{-\sqrt{2};-\sqrt{3}\}$ $\{-\sqrt{3};\sqrt{2}\}$, $\{\sqrt{3};\sqrt{2}\}$, $\{-\sqrt{3};-\sqrt{2}\}$, $\{\sqrt{3};-\sqrt{2}\}$

№ 5.

1) рассм. произв. дубль $(a;a)$, где a - число 1-на красн. стороне; 2-на синей; для него, ~~карточек~~, найдем число карточек, на которых есть число a; всего карточек с a на красн. стороне - 12 штук; с a на синей - тоже 12 штук; всего таких карточек - 23 (т.к. $(a;a)$ мы посчитали дважды), ~~3) кра~~ все остальные карточки мы можем вытащить вместе с $(a;a)$; значит есть $144-23=121$ вариант вытащить карточку с произв. дублем.;

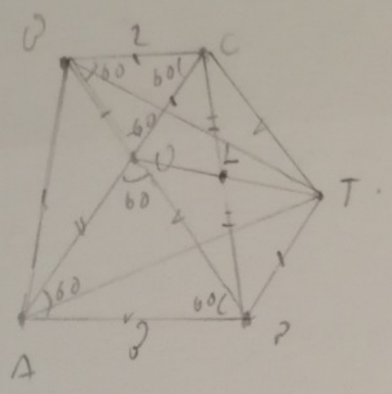
всего дублей - ~~12·11=14~~ 12 (с каждым из чисел);

тогда всего способов - $12 \cdot 121 = 1452$ (способа)

Ответ: 1452.

211006673 (U171410 M1274401)

№6



Решение:

а)
1) $BC \parallel AD$ (по равным 60° накр.-леж. углам).

2) $OL = LT$ (по симметрии), тогда $OCTD$ — парал. (т.к. его диаг. точкой пересеч. дел. пополам).

3) тогда $OC = BC = OB = TD$; $OD = AD = AO = CT$.

4) $\angle OCT = \angle COB = 60^\circ$; $\angle ODT = \angle AOD = 60^\circ$ (как накр.-леж. при пар. прям. и сек.)

5) тогда $\angle ADT = \angle BCT = 120^\circ$; тогда $\triangle ADT = \triangle TCB$ (по 2-м стор. и углу между ними); тогда $AT = BT$.

6) $BCTD$ — р/б трап., $ACTD$ — р/б трап. (по опр. р/б трап.)

7) тогда $\angle CBT = \angle CDT$ (по св. р/б трап. ~~как соотв. углы р/б трап.~~)

$\angle CDT = \angle CAT$ (по св. р/б трап.)

8) тогда $\angle CBT = \angle CAT$; тогда $BATC$ — впис. (по призн. впис. 4-х уг. по равн. углам, оп. на сторону CT).

9) тогда $\angle BAT + \angle BCT = 180^\circ$ (по св. ~~р/б трап.~~ впис. 4-х уг.); тогда $\angle BAT = 180 - 120 = 60^\circ$; тогда $\triangle ABT$ — правильный (как р/б 3-к с углом в 60°). ■

211006673 (U171410 M1274401)

5)

1) $\triangle BCT = \triangle TDA = \triangle DTC$ (по 2-м стор. и уг. между ними)

2) тогда $S_{ABCD} = S_{ABCTD} - S_\triangle CTD = S_\triangle BTA + S_\triangle BCT + S_\triangle TDA -$

$- S_\triangle CTD = S_\triangle BTA + 2S_\triangle CTD - S_\triangle CTD = S_\triangle BTA + S_\triangle CTD$;

$$\frac{S_\triangle ABT}{S_\triangle ABT + S_\triangle CTD} = \frac{S_\triangle ABT}{S_{ABCD}};$$

3) т.к. $BC = 2$; $AD = 3$; то $TD = 2$; $CT = 3$;

$$S_\triangle CTD = \frac{TD \cdot CT \cdot \sin\angle CTD}{2} = \frac{2\cdot 3\cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

4) т.к. $\triangle ABT$ – прав., то $S_\triangle ABT = \frac{BT^2\cdot\sqrt{3}}{4}$;

BT = по т. косинусов в $\triangle BCT$; $BT^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot\cos\angle BCT\cdot 2\cdot 3 =$

$\Rightarrow BT^2 = 2^2 + 3^2 + 2\cdot 3 \Rightarrow BT = \sqrt{19}$, тогда $S_\triangle ABT = \frac{19\cdot\sqrt{3}}{4}$;

$$\frac{S_\triangle ABT}{S_\triangle ABT + S_\triangle CTD} = \frac{\frac{19\cdot\sqrt{3}}{4}}{\frac{19\cdot\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{19\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}} = \frac{19}{25}.$$

Ответ: $\frac{19}{25}$.

211006673 (U171410 M1274401)

144
12? наименьш.

a/в, a = b - дробь.

2 наим: хоть 1 дробь

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{5}$

$\frac{a}{a}$ $\frac{b}{c}$, $a \neq b$, $a \neq c$

$\frac{1}{}$ $\frac{1}{1}$ 12 ... 11

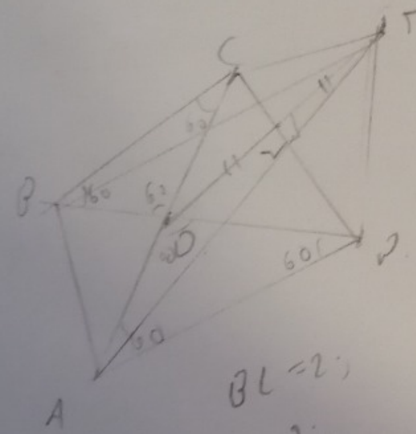
12 дробей. $\frac{a}{a}$.

a 12 раз

a - 12 раз

13 раз ... a_1

22 разм.



x; 22 непод.

144 - 13 = 121

x - 121 вар.

0.

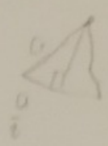
11 · 121

1210 + 242 = 1452

BL = 2;

AD = 3;

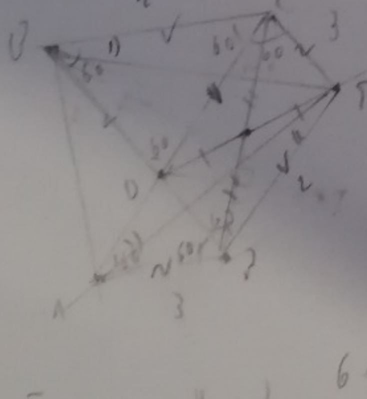
$S_{\Delta BT} : S_{ABCD}$ - ?



$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ a.

$= \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$



$\frac{120-2}{2}$

60 - α

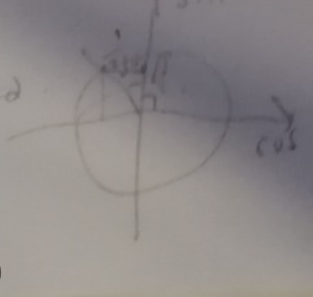
60 = α

BΔT + S + S - S

BΔT + S = S_{BACD}

$\frac{2 \cdot 3 \cdot \sin 120°}{2}$

$\frac{S_{\Delta T}}{S_{BACD}} = \frac{BAT}{BAT + S}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



$a^2 = 4 + 9 + 2\cos 120° \cdot 2 \cdot 3$

$a^2 = 4 + 9 + 6$, $a = \sqrt{19}$

$\frac{\sqrt{3} \cdot 19}{4}$

211006673 (U171410 M1274401)

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}y^2x^2=17 \end{cases}$$

$3x^2(x^2+1)+3y^2(y^2+1)=54$

$x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)=18$

$x^2+y^2=\ldots$

$x^4+x^2+y^4+y^2=18$

$3x^4+3y^4+2x^2y^2=51.$

$2(x^4+y^4)+(x^2+y^2)^2=51$ $\quad x^2y^2=0$

$x=0$

$-2x^2-2y^2=15$

$(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)=15$

$(x^2+y^2-1)^2=16.$

$x^2+y^2-1=\pm 4.$

$x^2+y^2=5$

$x^2+y^2=-3$

$x^2=$

$x^2(3-y^2)+y^2(3-x^2)=3$

$x^2(4+x^2-y^2)+y^2(4+y^2-x^2)=21$

$3x^2+3y^2=3$ $\quad 4x^2+x^4+4y^2+y^4=21$

$x^2+y^2=21$

$y^2(y^2+4)$

$x^2(x^2+4)=21$

$4x^2+x^4+4y^2+y^4-2x^2y^2=21$

$3x$

$-2x^2y^2=-12$

$x^2y^2=6$

$x^2+y^2=5$

$x^2=2 \quad y^2=3$

$y^2=2 \quad x^2=3$