Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006446**

ID профиля: **820576**

Вариант 13

Чистовик (2)

2. Пусть a – наименьшее из этих чисел, b – наибольшее, S – сумма всех

$S+31a=S+13b=447$

$31a=13b$

~~b [illegible]~~. $b \vdots 31$, $a \vdots 13$. Тогда пусть $b=31n$, $a=13q$

$403q=403n$

$q=n$

Значит $a=13q$, $b=31q$.

Если $q>1$, то $S+31q \geq S+31\cdot13\cdot2 \geq 806$. Такого быть не может. Значит $q=1$, $a=13$, $b=31$.

$32a+b=447$. Значит ~~[illegible]~~ $S-a-b=30$.

Пусть помимо a и b есть хотя бы 3 числа. Тогда их сумма не меньше $3a=39$. Такого быть не может. Значит помимо a и b записано либо 2 числа, либо одно.

Если записано было 2 числа, то одно из них меньше 15 (и при том больше 13, то есть 14), т.к. если оба больше, то в сумме дают больше 30; если одно 15, а другое больше, то в сумме больше 30, а если оба 15, то они не различны и не подходит по условию.

Значит среди них есть 14. Значит второе 16.

Если число одно, то это 30.

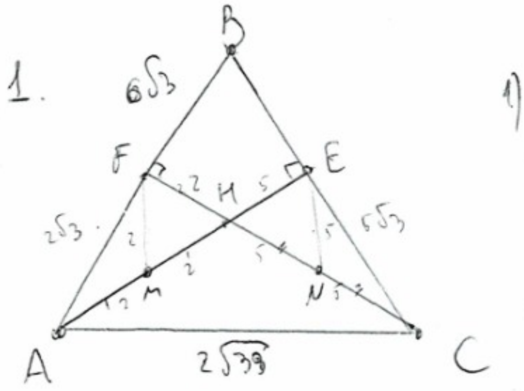
Ответ: 13; 14; 16; 31

13; 30; 31

211006446 (U820576 M1275775)

Чистовик

1.



1) $FM=2$; FM - медиана в прямоуг. Δ $\Rightarrow$
$\Rightarrow AM=MH=2$
Аналогично $HN=NC=5$.

2) Пусть $\angle FHM=\alpha$. Тогда $\angle EHN=\alpha$. Тогда $\angle HEN=\alpha$ ($HN=NE$). $FM \parallel EN \Rightarrow \angle HEN=\angle HMF$.

Значит, $\angle HMF=\alpha$. Также $\angle HFM=\alpha$ ($FM=MH$.)
В треугольнике FMH все углы равны. Значит он равносторонний.
Значит $FH=2$, а $\angle FHM=60°$. Аналогично $HE=5$, а $\angle EHN=60°$

3) По т. Пифагора $AF=2\sqrt{3}$, $EC=5\sqrt{3}$.
(ΔAFH) (ΔHEC)

По т. Пифагора для ΔAFC $AC=2\sqrt{39}$.

4) $\sin\angle BCA=\frac{AE}{AC}=\frac{9}{2\sqrt{39}}$

По т. Синусов для ΔABC:

$$\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle C}$$

$\angle B=180°-\angle BEA-\angle BAE=180°-\angle BEA-(180°-\angle AFH-\angle FHA)=180°-90°-180°+90°+60°=60°$

$$\frac{2\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{AB}{\frac{9}{2\sqrt{39}}}\Rightarrow AB=6\sqrt{3}$$

5) $S_{\Delta ABC}=AB\cdot FC=6\sqrt{3}\cdot 12=72\sqrt{3}$

6) Пусть O - центр описанной окр ΔABC. Тогда $OA=OC=R$, угол $AOC=120°$ (опирается на дугу AC, значит равен $2\angle B$).
Запишем т. косинусов для ΔAOC:

$AC^2=R^2+R^2-2\cdot\cos 120°\cdot R^2$

$156=2R^2+2\cdot\frac{1}{2}R^2$

$R^2=52$

$R=2\sqrt{13}$

211006446 (U820576 M1275775)

Ответ: $60°$; $72\sqrt{3}$; $2\sqrt{13}$

Чистовик

3

3. 1) Найдём координаты точки A:

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

Решим это ур-е относительно y:

$y^2+2(x-a)y+5a^2-6ax+2x^2=0$

$D_1=(x-a)^2-5a^2-6ax+2x^2=x^2-2ax+a^2-5a^2+6ax-2x^2=-x^2+4ax-4a^2=$

$=-(x-2a)^2\leq 0$

Значит ур-ю удовлетворяет только $x=2a$

$y=\frac{a-x\pm 0}{1}=a-x=a-2a=-a$

$A(2a;-a)$

2) Найдём координаты B: $a\neq 0$, т.к. иначе $36=0$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$

$(a^2x^2-8a^2x+16a^2)-16a^2+(a^2y^2-2a^3y+12ay+a^4+36-12a^2)+12a^2=0$

~~$(ax-4a)^2+(ay+6-a^2)^2-4a^2=0$ - ур-е окружности радиуса 2a с центром в точке~~

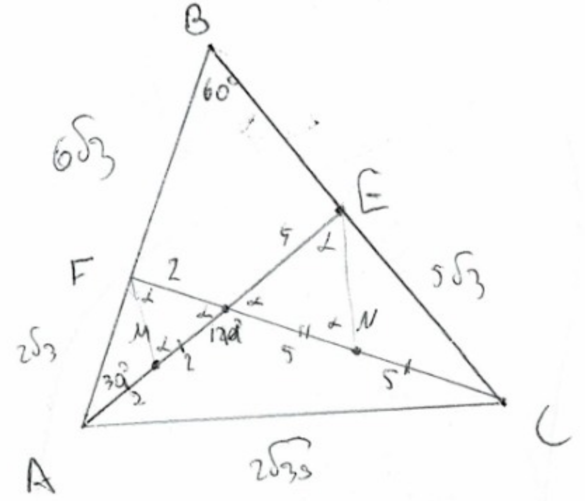
~~$a^2(x-4)+a^2(y$~~

$a^2(x-4)^2+a^2(y+\frac{6}{a}-a)^2=4a^2$

$(x-4)^2+(y+\frac{6}{a}-a)^2=4$ - ур-е окружности с центром в точке $(4;a-\frac{6}{a})$

$B(4;a-\frac{6}{a})$

211006446 (U820576 M1275775)



$x^2 + 4 = 16$

$x^2 = 12$

$x = 2\sqrt{3}$

$81 + 75$

$12 + 144 = 12 \cdot 13$

$2\sqrt{39}$

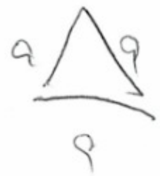
$\sin \angle C = \frac{9}{2\sqrt{39}}$

$\frac{2\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{9}{2\sqrt{39}}}$

$\frac{\cancel{4}\,2\sqrt{39}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2\sqrt{39}}\,AB}{9}$

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{9}$

$AB = 6\sqrt{3}$



$a^2 = a^2 + a^2 - \frac{2}{2} \cdot \cos 60° \cdot a^2 =$

$= 2a^2 - \cancel{2}\, a^2 = a^2$

$\boxed{S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3} \cdot 12 = 72\sqrt{3}}$

$AC^2 = R^2 + R^2 - \cancel{2} \cdot \cos 120° \cdot R^2$

~~ucos~~ $156 = 2R^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2$

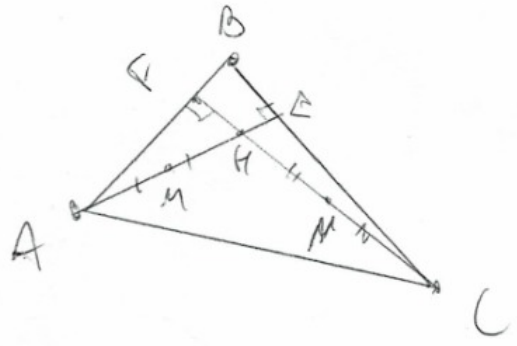
$156 = 3R^2$

$R^2 = 4 \cdot 13$

$R = 2\sqrt{13}$

cos 120

211006446 (U820576 M1275775)



$31a = 13b$

13 31

~~$310 + 13 + 31 \cdot 4 = 323 + 124 = 447$~~

~~$13 \cdot 31 +$~~

$31a = 13b$

$a = 13$

$b = 31$

447

$13 \cdot 31$

$310 + 93 = 403$

30

13 ~ 31

хотел бы 3 но

2 числа

14 и 16

1 число 30

211006446 (U820576 M1275775)

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2y+y^2=0$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36$

$\cancel{3a^2-6ax+x^2+2a^2-2ay}$

$\cancel{3a^2-6ax+3x^2+2a^2-2ay+}$

$\cancel{3a^2-6ax+3x^2+2a^2-2ay+\frac{5}{2}y-x^2+2xy+}$

$(a^2x^2-8a^2x+4a^2)-4a^2$

$\cancel{(6a+}$

$(f_1a+f_2x)^2+(f_3a+f_4y)^2+(f_5x+f_6y)^2=0$

a^2y^2

$f_1^2+f_3^2=5$

$f_2^2+f_5^2=2$

$f_1f_2=-3$

$f_4^2+f_6^2=1$

$f_3f_4=-1$

$f_5f_6=1$

$$\left(9a^2-6ax+x^2\right)-\left(4a^2+2ay+\frac{1}{4}y^2\right)+x^2+2xy+y^2+\frac{1}{4}y^2=0$$

$$(3a-x)^2-\left(2a+\frac{1}{2}y\right)^2+(x+y)^2+\frac{1}{4}y^2=0$$

$$\left(3a-x-2a-\frac{1}{2}y\right)\left(3a-x+2a+\frac{1}{2}y\right)+(x+y)^2+\frac{1}{4}y^2$$

$$\left(a-x-\frac{1}{2}y\right)\left(5a-x+\frac{1}{2}y\right)+(x+y)^2+\frac{1}{4}y^2=0$$

$$(3a-x)^2+(x+y)^2+\left(\frac{1}{2}y-2a-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y+2a+\frac{1}{2}y\right)=0$$

$$(3a-x)^2+(x+y)^2-2a(2a+y)=0$$

$$(3a-x)^2-\left(2a+\frac{1}{2}y\right)^2$$

$k=\frac{x}{y}$

$$5a^2-6ax-2akx+2x^2+2kx^2+k^2x^2=0$$

$$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=$$

$$= a^2y^2-2a^3y+a^4\left(a^2x^2-8a^2x+16a^2\right)-16a^2+$$

$$a^2y^2+12ay+36$$

$$\left(\frac{1}{2a}a^2y^2+12ay+36\right)-36$$

$\left(2a, -a\right)$

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$y^2+(2x-2a)y+5a^2-6ax+2x^2=0$

$\Delta_2 = 4x^2-8xa+4a^2-20a^2-24ax-8x^2=-4x^2-36ax-16a^2=$

$\Delta_1 = x^2-2ax+a^2-5a^2+6ax-2x^2=-x^2+4ax-4a^2=-(x^2-4ax+4a^2)=-(x-2a)^2$

$\Delta_1 \geq 0 \Rightarrow x=2a$

$y = a-x = -a$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$

$a^2y^2+(12a-2a^3)y+a^2x^2-8a^2x+a^4+36=0$

$\Delta_1 = (6a-a^3)^2-a^2x^2+8a^2x-a^4-36 = 36a^2-12a^4+a^6-a^4x^2+8a^4x-36a^2=a^6-12a^4$

$-12a^4+a^6-a^4x^2+8a^4x = a^4(a^2+8x-12-x^2)$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$$

$$\left(a^2x^2 - 8a^2x + 16a^2\right) - 16a^2 + \left(\frac{1}{2}a^2y^2 - 2a^3y + 4a^4\right) - 3a^4 + \left(\frac{1}{2}a^2y^2 + 12ay + 4\right) - 36 = 0$$

$$(ax - 4a)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}ay - 2a^2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}ay + 12\right)^2 = 108 + 16a^2 + 3a^4$$

$$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$f_1a^2 - 6ax + f_2x^2 + f_3a^2 - 2ay + f_4y^2 + f_5x^2 + 2xy + f_6y^2 = 0$$

$$a^2y^2 - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36$$

$$(ay - a^2)^2 + 12(ay + 3)$$

$$\begin{cases} f_1f_2 = 9 & f_1 + f_3 = 5 \\ f_3f_4 = 1 & f_2 + f_5 = 2 \\ f_5f_6 = 1 & f_4 + f_6 = 1 \end{cases}$$

$$(ay + a^2 + 6)^2 = \;\; = a^2y^2 + a^3y + 12a^2 + a^4$$

$$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$\cancel{5a^2 - 6ax - 2a + 2x^2 + 2x + 1 = 0}$$

$5a^2 - 6ax +$

$\cancel{0{,}5y^2 - 2ay +}$

$12ay$

$$20 - 12x - 4y + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$\cancel{x^2 + 12x + 36 - 16}$

$$\frac{1}{f_3}\left(1 - f_4\right)(2 - f_2) =$$

$= 1$

$\cancel{2 - f_2 - f_4 + f_2f_4} = 1$

$\cancel{2 - \frac{5}{f_1} - \frac{1}{f_3}}$

211006446 (U820576 M1275773)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006446**

ID профиля: **820576**

Вариант 13

Чистовик

(1)

4. $\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3(x^2+y^2)^2-4x^2y^2 \end{cases}$

Пусть $x^2+y^2=t$, $x^2y^2=z$

$\begin{cases} 3t-2z=3 \\ 3t^2-4z=51 \end{cases}$

$3t^2-4z-6t+4z=51-6$

$3t^2-6t=45$

$t-2t-15=0$

$t_1=-3;\ t_2=5$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3t-2z=3 \\ t=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3t-2z=3 \\ t=5 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-3 \\ z=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} t=5 \\ z=6 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-6 \end{cases} - \varnothing \\ \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases}$

По т. Виета числа x^2 и y^2 являются корнями уравнения $w^2-5w+6=0$

$w_1=2;\ w_2=3$

Значит, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=2 \\ y^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=2 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{3})$, $(\sqrt{2};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2};-\sqrt{3})$,
$(\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{2})$

Частовик. (2)

5. Для того, чтобы посчитать, сколькими способами фокусник может осуществить свою задачу, достаточно сложить число способов осуществить её, достав ровно один дубль и число способов осуществить её, достав ровно два дубля.

1) Какие бы два дубля фокусник не вытащил, он осуществит свою задачу. Значит для этого случая достаточно посчитать кол-во способов достать два дубля.

Это $C_{12}^{2} = 6 \cdot 11 = \frac{12 \cdot 11}{2}$

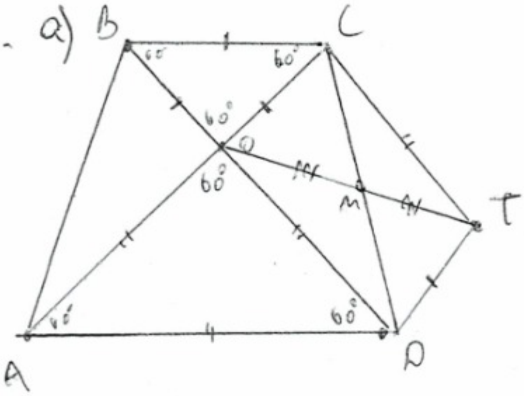
2) Для каждого выбранного дубля есть 110 карточек не-дублей ($\underset{\text{дубли}}{144 - 12} - \underset{\text{карты с этим числом, кроме дубля}}{22} = 110$), с которыми его можно вытащить. Значит, число способов осуществить задачу, вытащив один дубль, это $12 \cdot 110$.

3) Число способов осуществить задачу $\frac{12 \cdot 11}{2} + 12 \cdot 110$

Ответ: $\frac{12 \cdot 11}{2} + 12 \cdot 110$

Чистовик (3)

6. а)



1) Пусть M - середина CD.

2) T симметрична O относительно $M \Rightarrow$

$\Rightarrow OCTD$ - парал-м ($OM = MT$, $CM = MD$)

Значит, $CT = OD = AO = AD$, $DT = CO = OB = BC$

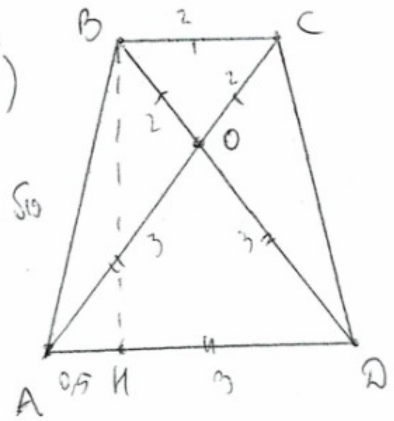
3) $\angle COD = \angle OAD + \angle ADO = 120° \Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = 60°$

4) $\angle BOA = \angle OAD + \angle ADO = 120°$

5) $\left.\begin{array}{l} BO = BC = DT \\ AO = AD = CT \\ \angle BOA = \angle ADT = \angle BCT = 120° \\ \left(\begin{array}{l}\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120° \\ \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120°\end{array}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA \Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

ч.т.д.

б)



. T

1) $AO = OD = AD = 3$, $BO = BC = CO = 2$

2) По т. косинусов

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2 \cdot \cos \angle AOB \cdot BO \cdot AO$

$AB^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot \cos 120° \cdot 2 \cdot 3$

$AB^2 = 4 + 9 + 6 = 19$

$AB = \sqrt{19}$. Аналогично $CD = \sqrt{19}$

3) $S_{\triangle ABT} = \sqrt{p_{ABT}(p_{ABT} - AB)(p_{ABT} - BT)(p_{ABT} - AT)} = \sqrt{1{,}5\sqrt{19} \cdot (0{,}5)^3 \cdot \sqrt{19}^3} = 19 \cdot \sqrt{3\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{19\sqrt{3}}{4} = 6{,}25\sqrt{3}$

4) Д.П: $BH \perp AD$.

По св-ву р/б трапеции ($AD \parallel BC$; $AD \neq BC$; $AB = CD$) $AH = \frac{AD - BC}{2} = 0{,}5$

5) По т. Пифагора. $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$BH^2 = AB^2 - AH^2$

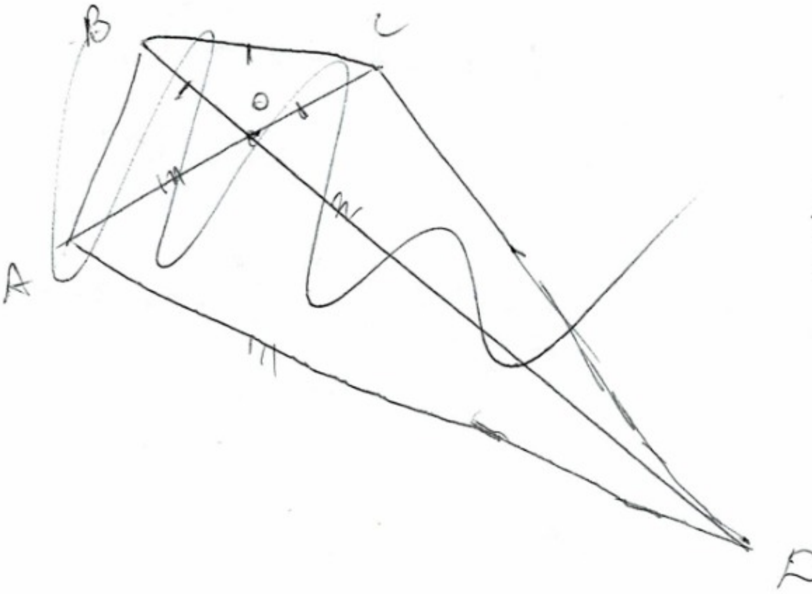
$BH^2 = 19 - \frac{1}{4} = 18{,}75$

$BH = 2{,}5\sqrt{3}$

6) $S_{ABCD} = BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 2{,}5\sqrt{3} \cdot 2{,}5 = 6{,}25\sqrt{3}$

7) $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{6{,}25\sqrt{3}}{6{,}25\sqrt{3}} = 1$

Ответ: 1



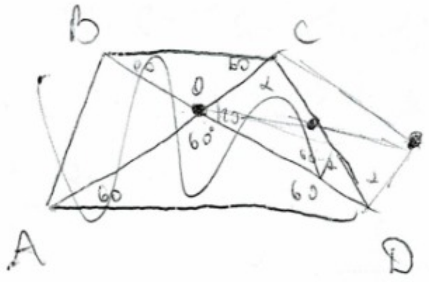
$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases}$$

$x^2+y^2+x^4+y^4=18$

$$\begin{cases} 3t+3z-2tz=3 \\ 3t^2+3z^2+2tz=81 \end{cases}$$

$3x^4+3y^4+2x^2y^2=51$



Пусть

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=51 \end{cases}$$

$3x^4+6x^2y^2+3y^4-4x^2y^2$

$3(x^4+2x^2y^2+y^4)-4x^2y^2$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+6x^2y^2=51 \end{cases}$$

$3t^2-4z=51$

Пусть $t=x^2+y^2$; $z=2x^2y^2$

$$\begin{cases} 3t-2z=3 \\ 3t^2-4z=51 \end{cases}$$

$3t^2-6t=45$

$3t^2-6t-45=0$

$t^2-2t-15=0$

$t_1+t_2=2$, $t_1t_2=-15$ $\Rightarrow t_1=-3$; $t_2=5$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3t-2z=3 \\ t_1=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3t-2z=3 \\ t=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-3 \\ z=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} t=5 \\ z=6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-6 \end{cases} \text{— нет} \\ \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases} \end{array}\right.$$

это корни...

$x^2, y^2 = 2, 3$

211006446 (U820576 M1275776)

$$\frac{12\cdot 140 + 12\cdot 11}{2}$$

$144 - 12 - 11 = 11$

$= 121$

1

$\frac{23\cdot 12}{2} = 23\cdot 6 = 120 + 18 = 138$

132

$12\cdot 11$

$12 + 22 = 34$

$11\cdot 11$

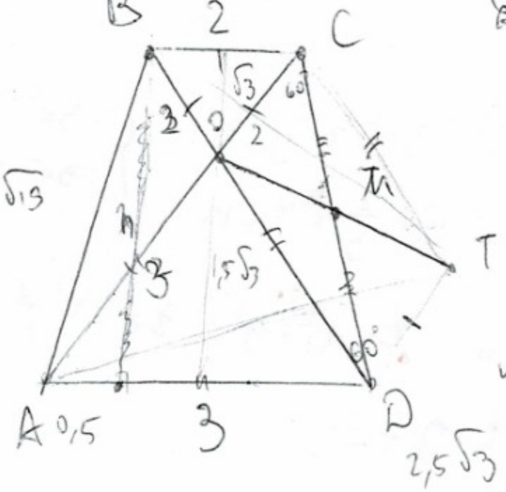
14

$AB^2 = BC^2 + AD^2 - 2\cdot\cos 120°\cdot AD\cdot BC$

$AB^2 = 4 + 9 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 =$

$= 4 + 9 + 6 = 19$

$AB = \sqrt{19}$



2 1

4

$2,5\sqrt{3}$

$3\cdot 2 + 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 3 = 6 + 9 - 12 = 3$

$4 + 9 + \frac{2}{3}\cdot 2\cdot 3 = 13 + 4 = 17$

$19 = \frac{1}{4} + h^2$

$h^2 = 18,75$

$h = 2,5\sqrt{3}$

$S = 2,5\cdot 2,5\sqrt{3} =$

$= 6,25\sqrt{3}$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cdot\cos 120°\cdot BO\cdot AO =$

$= 4 + 9 + 6 = 19$

$AB = \sqrt{19}$

$S_{ABT} = \sqrt{1,5\sqrt{19}\cdot 0,5^3\sqrt{19}^3} =$

$= 19\cdot\sqrt{1,5\cdot 0,5^3} =$

$= 19\cdot\sqrt{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4} =$

$= 19\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3} = \frac{19\sqrt{3}}{4} =$

$= 6,25\sqrt{3}$

211006446 (U820576 M1275776)

$23\cdot 6 \cdot 12 = 144\cdot 2$