Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

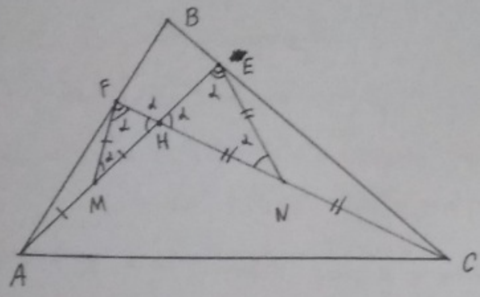
Шифр: **211006322**

ID профиля: **880973**

Вариант 13

Чистовик

3| 1|



1

$AM = MH$
$HN = NC$
$FM = 2$
$EN = 5$
$FM \parallel EN$

$\angle ABC$ – ?
S_{ABC} – ?
R – ? (R – радиус описанной около него окружности)

обозначим $\angle MFH = \alpha$

поскольку $\triangle AFH$ прямоугольный, а FM является медианой проведённой к гипотенузе AH, то
$AM = MH = FM = 2 \Rightarrow \angle MFH = \angle MHF$

поскольку $\triangle HEC$ прямоугольный, а EN является медианой проведённой к гипотенузе HC, то $EN = NC = HN = 5 \Rightarrow \angle NHE = \angle NEH$

$FM \parallel EN \Rightarrow \angle FMH = \angle HEN$
$\angle MFH = \angle HNE = \alpha$
$\angle MFH = \angle MHF = \alpha$
$\angle NHE = \angle NEH$
поскольку $\angle MHF = \angle NHE = \alpha$ (противоположные углы)
$\Rightarrow \angle FMH = \angle MHF = \angle FMH = \angle HNE = \angle HEN = \angle NHE$

поскольку $\angle MFH + \angle MHF + \angle FMH = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$

$\angle AFH + \angle AHF + \angle FAH = 180°$
$\angle AFH = 90°$
$\Rightarrow \angle FAH = 30°$
$\angle AEB = 90°$
$\angle AEB + \angle FAH + \angle ABC = 180°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = 60°$

$AE = AM + MH + HE$
$AM = MH = 2$
$\cos\alpha = \dfrac{HE}{HC} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$
$HC = HN + NC$
$HN = NC = 5$ $\Rightarrow HC = 10$
$\Rightarrow HE = 5$
$\Rightarrow AE = 9$

$\cos\angle BAE = \dfrac{AE}{AB} = \cos 30 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{18}{\sqrt{3}}$

поскольку $\angle ABC = 60°$
$\angle CFB = 90°$
$\angle FCB + \angle ABC + \angle CFB = 180°$ $\Rightarrow \angle FCB = 30°$
$\cos\angle FCB = \cos 30 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{FC}{BC}$

$FC = HN + NC + FH$
$\cos\alpha = \cos 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{FH}{AH}$
$AH = AM + MH$
$AM = MH = 2$ $\Rightarrow AH = 4$
$\Rightarrow FH = 2$
$HN = NC = 5$ $\Rightarrow FC = 12$
$\Rightarrow BC = \dfrac{24}{\sqrt{3}}$

$S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{24}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{18}{\sqrt{3}} = 36\sqrt{3}$

$\sin\alpha = \dfrac{AF}{AH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$AH = 4$ $\Rightarrow AF = 2\sqrt{3}$
$FC = 12$
по теореме Пифагора $\Rightarrow AC = \sqrt{12^2 + 12} = \sqrt{156}$

$R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC} = \dfrac{\sqrt{156}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 36\sqrt{3}$
$R = 2\sqrt{13}$

Черновик

$\begin{cases} \frac{a^2-6}{a} > 1 \\ -a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2-a-6}{a} > 0 \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-6 < 0 \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a+2) < 0 \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-2;3) \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1;3)$

$-\ \ -2\ \ +\ \ 0\ \ -\ \ 3\ \ +$

$\begin{cases} \frac{a^2-6}{a} < 1 \\ -a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2-a-6}{a} < 0 \\ a < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a-3)(a+2)}{a} < 0 \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -2) \cup (0;3) \\ a \in (-\infty; -1) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2)$

$\begin{cases} \frac{a^2-6}{a} > 1 \\ -a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2-a-6}{a} > 0 \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a-3)(a+2)}{a} > 0 \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-2;0) \cup (3;\infty) \\ a \in (-1;\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (-1;0) \cup (3;\infty)$

$a \in (-\infty; -2) \cup (-1;0) \cup (3;\infty)$

211006322 (U880973 M1276232)

Чистовик

3) (продолжение)

мы имеем $A(2a; -a)$; $B(4; \frac{a^2-6}{a})$

по заданию нужно чтобы A и B находились по разные стороны от прямой $y=1$, значит что если $-a>1$, то $\frac{a^2-6}{a}<1$ и если $-a<1$, то $\frac{a^2-6}{a}>1$

значит мы имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-a>1\\ \frac{a^2-6}{a}<1\end{cases}\\ \begin{cases}-a<1\\ \frac{a^2-6}{a}>1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;-1)\\ \frac{a^2-a-6}{a}<0\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-1;\infty)\\ \frac{a^2-a-6}{a}>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;-1)\\ \frac{(a-3)(a+2)}{a}<0\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-1;\infty)\\ \frac{(a-3)(a+2)}{a}>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;-1)\\ a\in(-\infty;-2)\cup(0;3)\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-1;\infty)\\ a\in(-2;0)\cup(3;\infty)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\in(-\infty;-2)\\ a\in(-1;0)\cup(3;\infty)\end{array}\right. \Rightarrow a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(3;\infty)$$

$$\boxed{\text{Ответ: } a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(3;\infty)}$$

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n$

Черновик

$$\begin{cases} 5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0 \\ a^2y^2+a^2x^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0 \end{cases}$$

$a^2(x^2-8x+16)-16a^2+ a^2y^2-2\cdot a(a^2-6)y+a^4+36=0$

$a^2(x^2-8x+16)+(ay-(a^2-6))^2-(a^2-6)^2+a^4-16a^2+36=0$

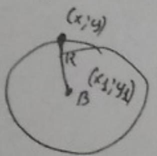
$a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2-a^4+12a^2-36+a^4-16a^2+36=0$

$a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2=4a^2$

$a\neq 0$

$(x-4)^2+\left(y-\frac{(a^2-6)}{a}\right)^2=4$

$\Updownarrow$



$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2$

$B\left(4;\frac{a^2-6}{a}\right)$

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$x^2-6ax+9a^2-4a^2-2ay+x^2+2xy+y^2=0$

$y^2+(2x-2a)y+2x^2-6ax+5a^2=0$

$D=(2x-2a)^2-4(2x^2-6ax+5a^2)=$

$=4x^2-8xa+4a^2-8x^2+24ax-20a^2=$

$=-4x^2+16ax-16a^2=$

$=-4(x^2-4ax+4a^2)=$

$=-4(x-2a)^2$

$D\geq 0 \Leftrightarrow -4(x-2a)^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(x-2a)^2\leq 0$

поскольку $4(x-2a)^2\geq 0$

$\Rightarrow 4(x-2a)=0 \Rightarrow x=2a$

$y^2+2ay+8a^2-12a^2+5a^2=0$

$(y+a)^2=0$

$y=-a$

$$\begin{cases} B\left(4;\frac{a^2-6}{a}\right) \\ y=-a \\ x=2a \end{cases}$$

$-a<-1$

$a>1$

$\frac{a^2-6}{a}>1$

если $-a>1$

$\Updownarrow$

$a<-1$

$\frac{a^2-6}{a}\leq 1$

$a<-1$

$a^2-6>-1$

$a^2-5>0$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;-1) \\ a\in(-\infty;-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a^2-6}{a}>1 \\ -a<-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 1 \\ \frac{a^2-a-6}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ (a-3)(a+2)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\in(1;\infty) \\ a\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a^2-6}{a}<1 \\ -a> \end{cases}$$

211006322 (U880973 M1276232)

Черновик

$a_1; a_2; \ldots; a_n$

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n$

$32a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 477$

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + 14a_n = 477$

$\Rightarrow 31a_1 - 13a_n = 0$

$13a_n = 31a_1$

$\Downarrow$

$a_n \vdots 31 \Rightarrow a_n = 31m \ (m \geq 1;\ m \in N)$

$a_1 \vdots 13 \Rightarrow a_1 = 13k \ (k \geq 1;\ k \in N)$

$\times \begin{array}{r} \cancel{31} \\ \cancel{13} \end{array}$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array}$ $\begin{array}{r} 14 \\ \times 31 \\ \hline 14 \\ 42 \\ \hline 434 \end{array}$

$k=1 \quad m=1$

$13 < \ldots < 31$

$13(n-2) < a_2 + \ldots + a_{n-1}$

$a_2 + a_3 + \ldots + 31 = 477 - 416$

$13 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 477 - 431$

$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 477 - 447 = \boxed{30}$

$30 > 13(n-2)$

$\Downarrow$

$n-2 = 1$ либо $n-2 = 2$

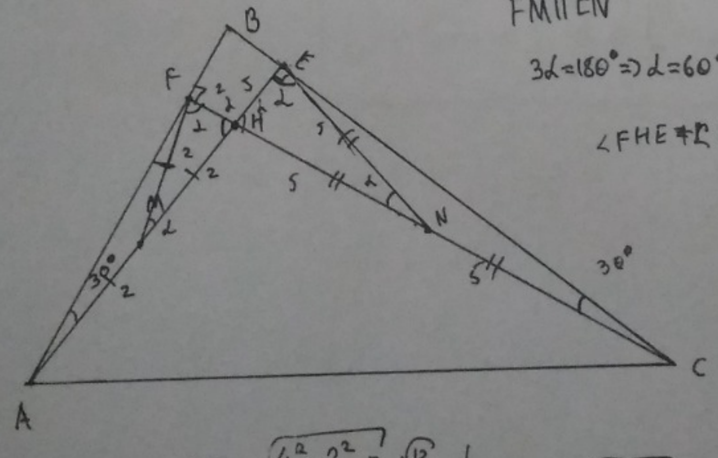
$n = 4$

$n = 3$

$13; 14; 16; 31$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array}$

$\begin{array}{r} 477 \\ -416 \\ \hline 61 \\ -31 \\ \hline 30 \end{array}$



$FM \parallel EN$

$3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$

$\angle FHE + \angle FBE = 180° \Rightarrow \angle FBE = \angle ABC = 180° - \angle FHE = 60°$

$AB = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}}$

$BC = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$

$S = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{18 \cdot 24}{4\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 18}{\sqrt{3}} = 36\sqrt{3}$

$AF = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$

$FC = 12$

$\Rightarrow AC = \sqrt{12^2 + 12} = \sqrt{12 \cdot 13}$

$R = \frac{\sqrt{12 \cdot 13}}{2\sin 60°} = \frac{\sqrt{12 \cdot 13}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$

$81 + 75 = 156$

211006322 (U880973 M1276232)

Чистовик (3)

3)

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$y^2+(2x-2a)y+2x^2-6ax+5a^2=0$

$D=(2x-2a)^2-4(2x^2-6ax+5a^2)=4x^2-8ax+4a^2-8x^2+24ax-20a^2=$

$=-4x^2+16ax-16a^2=-4(x-2a)^2$

поскольку мы знаем что у этого уровнения есть корни то $D\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4(x-2a)^2\geq 0$

поскольку квадрат любого целово числа ≥ 0, то $4(x-2a)^2\geq 0$

значит мы имеем $\begin{cases}-4(x-2a)^2\geq 0\\ 4(x-2a)^2\geq 0\end{cases}$ значит $4(x-2a)^2=0$

значит $x=2a$

$y^2+(2x-2a)y+2x^2-6ax+5a^2=0 \Leftrightarrow y^2+2ay+8a^2-12a^2+5a^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2+2ay+a^2=0 \Leftrightarrow (y+a)^2=0 \Rightarrow y=-a$

значит координаты $A(2a;-a)$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$

$a^2(x^2-8x+16)-16a^2+a^2y^2-2a(a^2-6)y+a^4+36=0$

$a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2-(a^2-6)^2-16a^2+a^4+36=0$

$a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2-a^4+12a^2-36-16a^2+a^4+36=0$

$a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2-4a^2=0$

$a^2(x-4)^2+(ay-(a^2-6))^2=4a^2$

если $a=0$ то тогда $0\cdot x^2+0\cdot y^2-8\cdot 0\cdot x-2\cdot 0\cdot y+12\cdot 0\cdot y+0+36=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varnothing$

значит мы можем уровнение приоброзовать так

$(x-4)^2+\left(y-\frac{a^2-6}{a}\right)^2=4$

значит координаты центра окружности тоесть $B\left(4;\frac{a^2-6}{a}\right)$

Чистовик (2)

2] Обозначим эти числа $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ так чтобы $a_1 < a_2 < ... < a_n$ поскольку у нас разные числа то это возможно.

И так по условию мы имеем

$$\begin{cases} 32a_1 + a_2 + ... + a_n = 477 \\ a_1 + a_2 + ... + 14a_n = 477 \end{cases} \Rightarrow 31a_1 - 13a_n = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 13a_n = 31a_1 \\ (13; 31) = 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} a_n \vdots 31 \Rightarrow a_n = 31k \ (k \geq 1; k \in N) \\ a_1 \vdots 13 \Rightarrow a_1 = 13m \ (m \geq 1; m \in N) \end{matrix}$$

$32 \cdot 13 \cdot m + a_2 + .. + a_n = 477$

$$\left.\begin{matrix} \text{если } m > 1 \Rightarrow 32a_1 \geq 32 \cdot 13 \cdot 2 > 477 \\ m \geq 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow m = 1$$

$14 \cdot a_n = 14 \cdot 31 \cdot k$

$$\left.\begin{matrix} \text{если } k > 1 \Rightarrow 14 \cdot 31 \cdot k \geq 31 \cdot 14 \cdot 2 > 477 \\ k \geq 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow k = 1$$

значит $a_1 = 13$

$a_n = 31$

$32 \cdot a_1 + a_2 + .. + a_n = 477$

$32 \cdot 13 + a_2 + .. + 31 = 477$

$a_2 + ... + a_{n-1} = 30$

поскольку $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1}$

$\Downarrow$

$13 < a_2 < ... < a_{n-1}$

$\Downarrow$

$13 \cdot (n-2) \leq a_2 + a_3 + .. + a_{n-1}$

$\Downarrow$

$30 > 13(n-2) \Rightarrow n = 3$ либо $n = 4$

I случай $n = 3 \Rightarrow$ мы имеем $13; a_2; 31$

$$\left.\begin{matrix} \text{и} \\ a_2 = 30 \end{matrix}\right| \Rightarrow 13; 30; 31$$ (на доске могут быть эти числа)

II случай $n = 4 \Rightarrow$ мы имеем $13; a_2; a_3; 31$

и

$a_2 + a_3 = 30$

поскольку

$13 < a_2 < a_3$

то если $a_2 > 14 \Leftrightarrow a_2 \geq 15$ то $a_3 \geq 16 \Rightarrow a_2 + a_3 \geq 31 \Rightarrow \varnothing$

значит $13 < a_2 \leq 14 \Rightarrow a_2 = 14$ и $a_3 = 16 \Rightarrow$ других вариантов нет

$\boxed{\text{Ответ: } 13; 30; 31 \text{ или } 13; 14; 16; 31}$

Часть 2

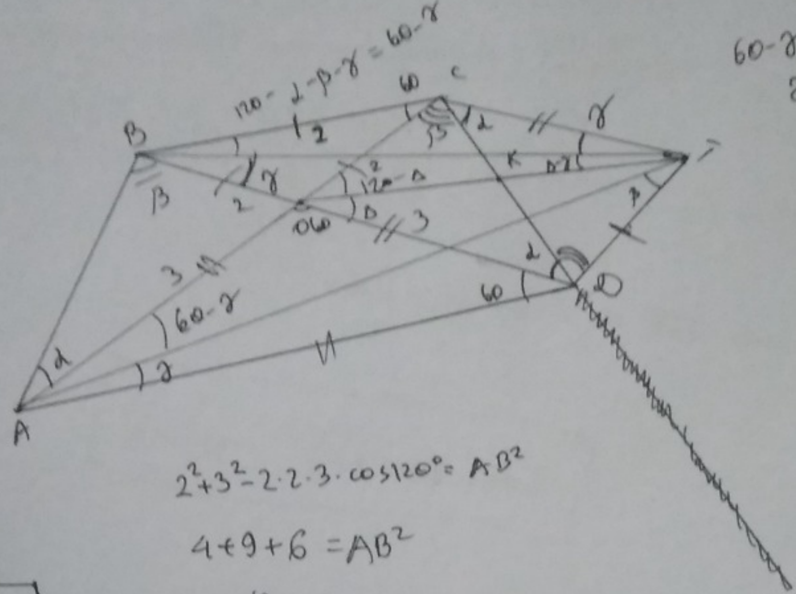
Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006322**

ID профиля: **880973**

Вариант 13

Черновик



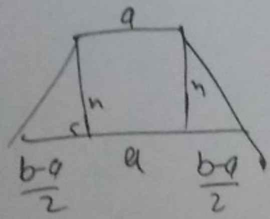
$60-\gamma=\beta$

$\gamma+\beta=60$

$2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos120^\circ=AB^2$

$4+9+6=AB^2$

$19=AB^2$



$\frac{1}{2}\cdot\frac{2+3}{2}\cdot\frac{5}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{25}{4\sqrt3}=\frac{25\sqrt3}{12}$

$h\cdot a+\frac{1}{2}h\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)$

AB $\frac{\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}\cdot\frac{\sqrt3}{2}}{2}=\frac{19\sqrt3}{4}$

$\frac{11\cdot11-11}{2}\cdot12+\frac{11\cdot12}{2}=$

$\frac{h}{2}\cdot(b-a)+h\cdot a=\frac{hb}{2}-\frac{ha}{2}+ha=$

$=h\frac{(a+b)}{2}$

$\frac{\frac{19\sqrt3}{4}}{\frac{25\sqrt3}{12}}=\frac{57}{25}$

$=\frac{11\cdot11\cdot12}{2}-\frac{11\cdot12}{2}+\frac{11\cdot12}{2}$

$=6\cdot121=726$

12

12

$\frac{11\cdot11-11}{2}+\cancel{12}$

12 12

$11\cdot11$

$11\cdot11$

$1\cdot1$

$\frac{11\cdot11-11}{2}+10$

11 11

$\cancel{12\cdot10}$

$11\cdot11-1$

$\frac{11\cdot11-11}{2}+9$

$1\cdot1$ $11\cdot11-1$ $\frac{11\cdot11-11}{2}+1$

$10\cdot10$

$11\cdot11-2$

$9\cdot9$ $11\cdot11-3$

$\frac{11\cdot11-11}{2}+0$

$8\cdot8$ $11\cdot11-4$ ...

211006322 (U880973 M1276233)

Черновик

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^4+3x^2+3y^4+3y^2=54\\ x^4+x^2+y^4+y^2=18\end{cases}$$

$$x^4+x^2+y^4+y^2=18$$

$$\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y^2+\frac{1}{2}\right)^2=$$

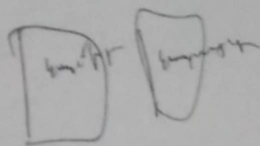
12^2

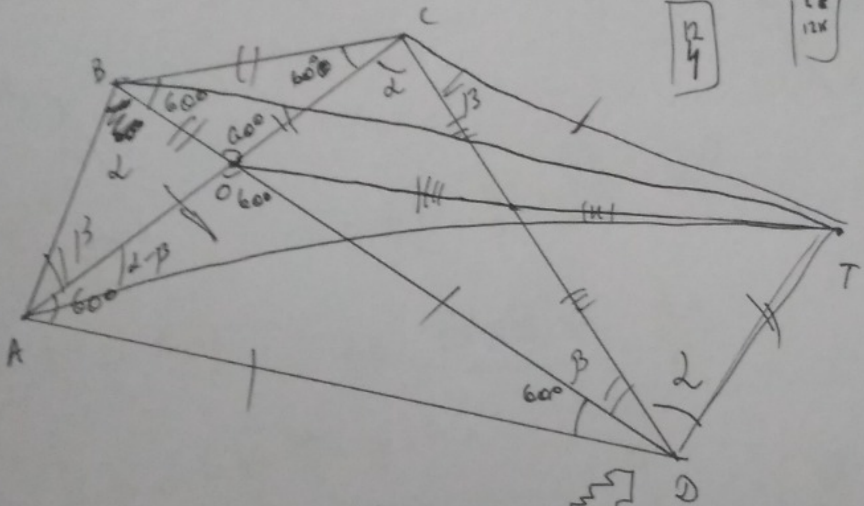
$$x^4+x^2-12+y^4+y^2-6=0$$

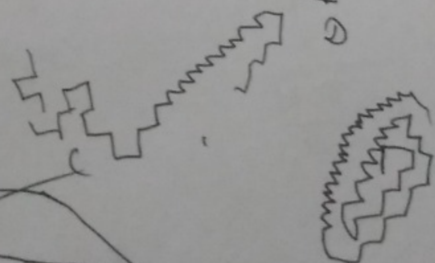
$$(x^2-3)(x^2+4)+(y^2-2)(y^2+3)=0$$

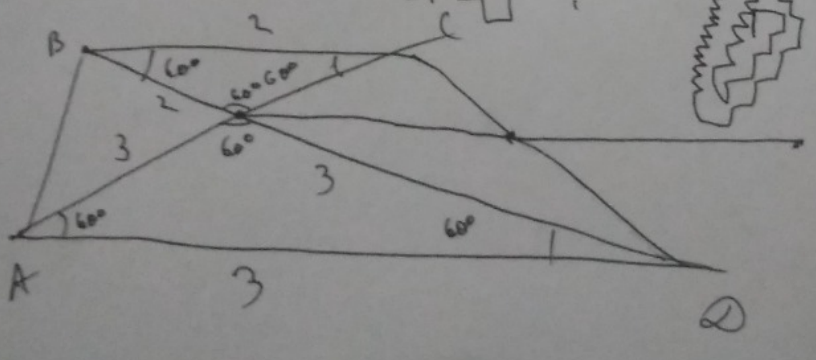
$x^2=3$

$y^2=3$









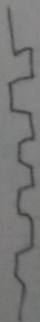
$$(x^2+y^2)^2+4(x^2y^2)-21=0$$

$$(x^2+y^2+7)(x^2+y^2-3)=0$$

$x^2+y^2=3$

$x^2y^2=3$

$x^2=\frac{3}{y^2}$



$$\frac{3}{y^2}+y^2=3$$

$$y^4-3y^2+3=0$$

y

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=12\end{cases}$$

$$x^4+x^2+y^4+y^2=18$$

$$x^4+x^2+y^4+y^2=18$$

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+x^2+y^2=18$$

$6x^4+6y^4$

Чистовик

1

4|

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^4+3y^4+3x^2+3y^2=54\\ 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^4+y^4+x^2+y^2=18\\ 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^4+y^4+x^2+y^2-(3x^2+3y^2-2x^2y^2)=18-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+y^2-3(x^2+y^2)=15\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ (x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-15=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ (x^2+y^2-5)(x^2+y^2+3)=0\end{cases}$$

поскольку $\begin{matrix}x^2\geq 0\\ y^2\geq 0\end{matrix} \Rightarrow x^2+y^2+3\geq 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^2+y^2-5=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\cdot 5-2x^2y^2=3\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2y^2=6\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\frac{6}{y^2}\\ \frac{6}{y^2}+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{y^4-5y^2+6}{y^2}=0\\ x^2=\frac{6}{y^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y^2-3)(y^2-2)=0\\ x^2=\frac{6}{y^2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y^2=3\\ x^2=2\end{cases}\\ \begin{cases}y^2=2\\ x^2=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cancel{\begin{cases}y=\pm 3\\ x=\pm 2\end{cases}}\\ \cancel{\begin{cases}y=\pm 2\\ x=\pm 3\end{cases}}\end{array}\right. \quad \cancel{\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=\end{array}\right.} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=3\\ x=2\end{cases}\\ \begin{cases}y=3\\ x=-2\end{cases}\\ \begin{cases}y=-3\\ x=2\end{cases}\\ \begin{cases}y=-3\\ x=-2\end{cases}\\ \begin{cases}y=2\\ x=3\end{cases}\\ \begin{cases}y=2\\ x=-3\end{cases}\\ \begin{cases}y=-2\\ x=3\end{cases}\\ \begin{cases}y=-2\\ x=-3\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\cancel{\left[\begin{array}{l}y=\pm 3\\ x=\pm 2\end{array}\right.}$

$$\boxed{\text{Ответ: } \begin{matrix}x=2\\ y=3\end{matrix};\ \begin{matrix}x=-2\\ y=3\end{matrix};\ \begin{matrix}x=2\\ y=-3\end{matrix};\ \begin{matrix}x=-2\\ y=-3\end{matrix};\ \begin{matrix}x=3\\ y=2\end{matrix};\ \begin{matrix}x=-3\\ y=2\end{matrix};\ \begin{matrix}x=3\\ y=-2\end{matrix};\ \begin{matrix}x=-3\\ y=-2\end{matrix}}$$

Чистовик ③

6| (продолжение) б) $BC=2=BO$

$AD=3=AO$

по теореме косинусов $AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cdot\cos\angle AOB$, $AO=3$, $BO=2$, $\angle AOB=120°$ $\Rightarrow AB^2=4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19 \Rightarrow AB=\sqrt{19}=AT=BT$

$S_{ABT}=\frac{BT\cdot AT}{2}\cdot\sin ATB$

поскольку $\triangle ATB$ правильный $\Rightarrow \angle ATB=60°$ $\Rightarrow S_{ABT}=\frac{\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{19\sqrt{3}}{4}$

~~BH=~~ $\sin HDB=\frac{HB}{BD}=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $BD=BO+OD=5$ $\Rightarrow HB=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD}=HB\cdot\frac{AD+BC}{2}$ (поскольку $\angle ADO=\angle OBC=60°$, то $ABCD$ является трапецией и поэтому мы можем так вычислить площадь)

$S_{ABCD}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2+3}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{19\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}}=\frac{19}{25}$

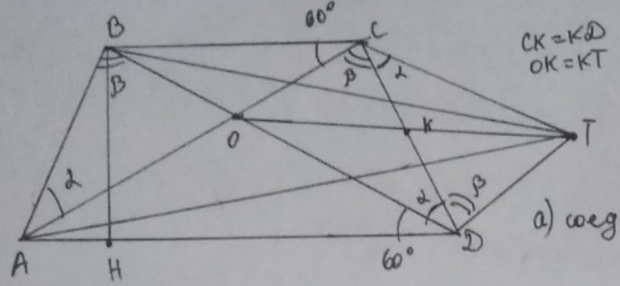
$\boxed{\text{Ответ: } \frac{19}{25}=\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}}$

211006322 (U880973 M1276233)

Чистовик

(2)

6|



CK=KD
OK=KT

а) соединим C с T и D с T

поскольку $CK=KD$, $OK=KT$, $\angle OKC=\angle DKT$ $\Rightarrow \triangle OKC=\triangle DKT \Rightarrow OC=DT$, $\angle KDT=\angle OCK$

поскольку $CK=KD$, $OK=KT$, $\angle OKD=\angle CKT$ $\Rightarrow \triangle OKD=\triangle CKT \Rightarrow OD=CT$, $\angle ODK=\angle KCT$

поскольку и треугольник AOD и треугольник BOC правильные значит $OD=AD=CT$ и $OC=BC=DT$

получается что $AD=CT$
$DT=BC$

поскольку $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ правильные значит $\angle ADO=\angle OCB=60°$
мы получили $\angle ODK=\angle KCT$, $\angle KDT=\angle OCK$ $\Rightarrow \angle ADT=\angle BCT$, $BC=DT$, $AD=CT$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ADT=$
$=\triangle BCT \Rightarrow$
$\Rightarrow AT=BT$
$\angle DAT=\angle BTC$
$\angle DTC=\angle BTC$

обозначим
$\angle BDC=\alpha=\angle DCT$
$\angle CDT=\beta=\angle DCB$

поскольку $\angle ACB=\angle ADB \Rightarrow$ через точки $A; B; C; D$ проходит окружность $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABD=\angle ACD=\beta$
$\angle BAC=\angle BDC=\alpha$

~~$\angle AOD=60°=\angle OAB+\angle OBA$ ($\angle AOD$ является внешним углом для $\triangle ABO$)~~

$\angle AOD=60°=\angle OAB+\angle OBA=\alpha+\beta \Rightarrow \angle ADT=60+\alpha+\beta=120°$

$\angle AOB=180°-\angle AOD=120°$
$AO=AD$
$BO=DT$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB=\triangle ADT \Rightarrow AB=AT$
$AT=BT$
$\Rightarrow AT=BT=AB \Rightarrow \triangle ABT$ правильный

Чистовик (4)

5) ~~Также~~ Рассмотрим несколько случаев (обозначим $\frac{A}{B}$ ~~AB~~ A и B числа на обеих сторонах)

I случай одна из карточек $\frac{12}{12}$,

есть ~~всего~~ 11·11 карточки у которых не совпадаю числа с нашей карточкой (⊔ ⊔ ⊔ и здесь тоже от 1 до 11

здесь может быт от 1 до 11

и так и получается 11·11)

поскольку $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ это один способ то мы имеем $\frac{11\cdot 11-11}{2}$ способов взять не дублную карточку и 11 способом дублную суммарно $\frac{11\cdot 11-11}{2}+11$ способов ($\frac{11\cdot 11-11}{2}$ потому что среди 11·11 − 11 карточках все пары ($\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ это пара) а значит $\frac{11\cdot 11-11}{2}$ будет количество способов)

II случай $\frac{11}{11}$

опят же есть 11·11 карточки числа которые не совпадают (для каждого дубля это число одинаковое и одинаковое $\frac{11\cdot 11-11}{2}$ количетво способов выбора не дубольной карты)

а количество способов выбора дубольной карты уменьшается на единицу каждый раз в I случайе мы уже считал способ

и II случайе мы ~~не~~ чтобы не повторятся говорим что количество способов уменьшилось на единицу ($\frac{11}{11}$ и $\frac{12}{12}$ мы бы повторились поскольку карточки выделенные одно и тоже)

значит получается вот так

I случай $\frac{12}{12} \to \frac{11\cdot 11-11}{2}+11$ способов

II случай $\frac{11}{11} \to \frac{11\cdot 11-11}{2}+10$ способов (на единицу меньше)

III случай $\frac{10}{10} \to \frac{11\cdot 11-11}{2}+9$ способов

и так до

XII случай $\frac{1}{1} \to \frac{11\cdot 11-11}{2}$ способов

Чистовик

5

5) (продолжение)

Суммарно способов получается $\frac{11\cdot11-11}{2}+11+\frac{11\cdot11-11}{2}+10+\ldots+\frac{11\cdot11}{2}-\frac{11}{2}+1+$

$+\frac{11\cdot11-11}{2}=12\cdot\frac{11\cdot11-11}{2}+1+2+3+\ldots+11=\frac{12\cdot11\cdot11}{2}-\frac{12\cdot11}{2}+\frac{11\cdot12}{2}=\frac{12\cdot11\cdot11}{2}=$

$=6\cdot11\cdot11=6\cdot121=726$ способов

$\boxed{\text{Ответ: 726 способов}}$

211006322 (U880973 M1276233)

Чернов

Черновик

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ 3x^4+3y^4+2x^2y^2=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2+3x^4+3y^4=54 \\ 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=18 \\ 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)^2-2x^2y^2+x^2+y^2=18 \\ 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3 \end{cases} \Rightarrow (x^2+y^2)^2+x^2+y^2-3(x^2+y^2)+2x^2y^2-$$

$$-2x^2y^2=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)=15$$

$$\Updownarrow$$

$$(x^2+y^2-5)(x^2+y^2+3)=0 \Rightarrow x^2+y^2=5$$

$$\Updownarrow$$

$$3\cdot 5-2x^2y^2=3$$

$$-2x^2y^2=-12$$

$$x^2y^2=6$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2=\frac{6}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{y^2}+y^2=5 \\ x^2=\frac{6}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4-5y^2+6=0 \\ x^2=\frac{6}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y^2-2)(y^2-3)=0 \\ x^2=\frac{6}{y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y^2=2 \\ x^2=3 \end{matrix} \text{ либо } \begin{matrix} y^2=3 \\ x^2=3 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y=\pm 2 \\ x=\pm 3 \end{matrix} \text{ либо } \begin{matrix} y=\pm 3 \\ x=\pm 2 \end{matrix}$$

211006322 (U880973 M1276233)