Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

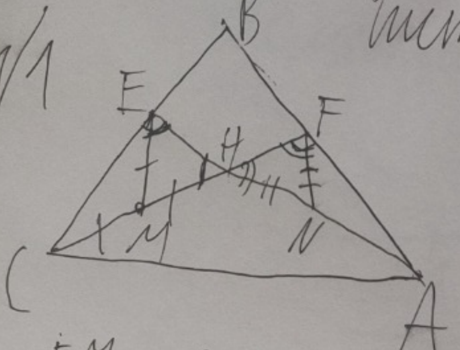
Шифр: **211006022**

ID профиля: **868675**

Вариант 13

Чистовик стр. 2

№1



EM – медиана в прямоуг △CEA

$EM = \frac{1}{2} CH = MH$

△EMH – р/б $\angle HEM = \angle EHM = \alpha$

FN – медиана в прямоуг △AFH

$FN = \frac{1}{2} AH = NH$

△FNH – р/б $\angle HFN = \angle FHN = \beta$

$\Rightarrow \angle EHM = \angle FHN = \alpha = \beta$ (вертик)

$EM \parallel FN$ (подоб)

$\Rightarrow \angle HEM = \angle HNF$ (накрест.леж)

$\alpha = 180^\circ - 2\beta \quad \alpha = 180^\circ - 2\alpha$

$\alpha = 60^\circ$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle EHF$ (из BFHE)

$\angle EHF = 180^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

$\boxed{\angle ABC = 60^\circ}$

Чистовик стр. 4

№3 преобразуем окружность

$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 =$

$(a^2x^2 - 8a^2x + 16a^2) - 16a^2 + (a^2y^2 - 2ay(a^2-6)y + (a^2-6)^2) -$

$- (a^2-6)^2 + a^4 + 36 = 0$

$(ax+4a)^2 + (ay - (a^2-6))^2 - 16a^2 - a^4 + 12a^2 - 36 + a^4 + 36 = 0$

$a^2(x+4)^2 + a^2(y - (a - \frac{6}{a}))^2 = 4$, $a \neq 0$ (при $a = 0$ ур-ние: $36 = 0$ $\varnothing$)

$B(-4; a - \frac{6}{a})$ $y_B = a - \frac{6}{a}$ $a - \frac{6}{a} = 1$

$a^2 - a - 6 = 0$ $a = 3$; $a = -2$

$y_B > 1$ при $a \in (-2; 0) \cup (3; +\infty)$

$y_B < 1$ при $a \in (-2; 3)$

преобразуем ур-ния для A

$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$y^2 - 2(a-x)y + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$

$D = a^2 - 2ax + x^2 - 2x^2 + 6ax - 5a^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 =$

$= -(x-2a)^2 \leq 0$ решения есть: $x - 2a = 0$ $x = 2a$

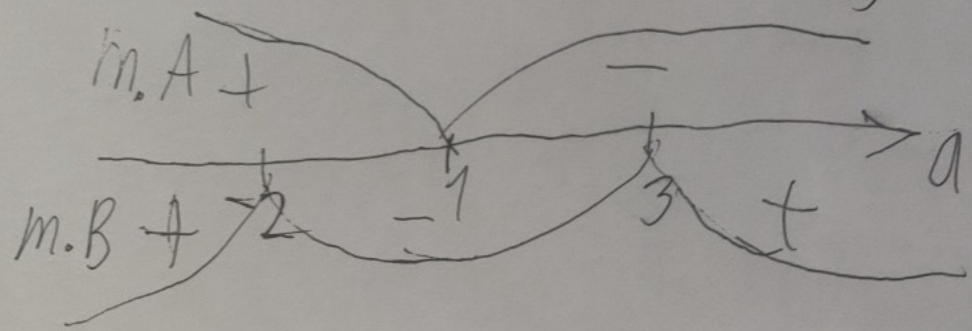
$y = a - x = a - 2a = -a$

$y_A = -a$ $y_A > 1$ при $a \in (-\infty; -1)$

$y_A < 1$ при $a \in (-1; +\infty)$

Чистовик стр.5

№3 Совместим точки A и B



A и B лежат по разные стороны, т

$a \in (-2; -1) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $a \in (-2; -1) \cup (3; +\infty)$

Чистовик стр 1

№2

Пусть x это мин число, y это макс число, а b это сумма остальных x,

тогда $32x+y+a=x+14y+a=477$

$32x+y+a=x+14y+a$

$31x=13y$

$x=\frac{13}{31}y$ т.к. x натуральное число $\Rightarrow$

$\Rightarrow y\,\vdots\,31$. Если взять $y\geq 62$, тогда $x\geq 26$

при таких числах $32x+y+a$ будет больше

477, что невозможно $\Rightarrow y=31$, тогда $x=13$

$32\cdot 13+31+a=447+a$ $\Rightarrow a=30$

$13+14\cdot 31+a=447+a$ 30 можно разлож. 2 способ. что-бы не поменять мин и макс числа

Пример числа 13, 30, 31 ; 13, 14, 16, 31.

Ответ: 13, 30, 31 ; 13, 14, 16, 31

Чистовик стр 3

№1

$\left.\begin{array}{l} EM=CM=MH=5 \\ FN=AN=HN=2 \end{array}\right\} \triangle MHE$ и $\triangle NHF$ правильные

$CF=10+2=12$

$AE=4+5=9$

Расм $\triangle BCF$: $CF=12$ $\angle CBF=60°$

$BC=\frac{CF}{\sin 60}=\frac{12\cdot 2}{\sqrt{3}}=\frac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$

Расм $\triangle BAE$ $AE=9$ $\angle ABE=60°$

$AB=\frac{AE}{\sin 60}=\frac{9\cdot 2}{\sqrt{3}}=\frac{18}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CF=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{3}\cdot 12=\boxed{36\sqrt{3}}$

Расм $\triangle ABC$

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 60°=$

$=36\cdot 3+64\cdot 3-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=$

$=100\cdot 3-48\cdot 3=52\cdot 3$

$AC=\sqrt{52\cdot 3}=\sqrt{4\cdot 13\cdot 3}=2\sqrt{39}$

$\frac{AC}{\sin\angle B}=2R$ $R=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{2\sqrt{39}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}}=\boxed{2\sqrt{13}}$

Ответ: $\angle ABC=60°$; $S=36\sqrt{3}$; $R=2\sqrt{13}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006022**

ID профиля: **868675**

Вариант 13

№6 б) $\triangle ADT$ Чистовик стр 5

$AD = 3$

$DT = DC = BC = 2$

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2AD \cdot DT \cdot \cos\angle ADT$

$AT^2 = 9 + 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120 = 13 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 19$

$AT = \sqrt{19}$

$S_{\triangle ABT} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle BOC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 25 \cdot \sqrt{3}} = \frac{19}{25}$

Ответ: б) $\frac{19}{25}$

№4 Чистовик стр.1

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

Пусть $a=x^2\geq 0$ $b=y^2\geq 0$

$$\begin{cases} 3a+3b-2ab=3 \\ a^2+b^2+\frac{2}{3}ab=17 \end{cases} \mid \times 3 +$$

$$\begin{cases} 3a+3b-2ab=3 \\ 3a+3b+3a^2+3b^2=54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)-2ab=3 \\ 3(a+b)+3(a+b)^2-2ab=18 \end{cases} \mid \times(-1)+$$

$$\begin{cases} 3(a+b)-2ab=3 \\ -2(a+b)+(a+b)^2=15 \end{cases}$$

$a+b=c\geq 0$

$c^2-2c-15=0$

$$\left[\begin{array}{l} c=5 \\ c=-3 \text{ – не удл усл } c\geq 0 \end{array}\right.$$

$a+b=5$

$15-2ab=3$ $ab=6$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$$

$b=5-a$

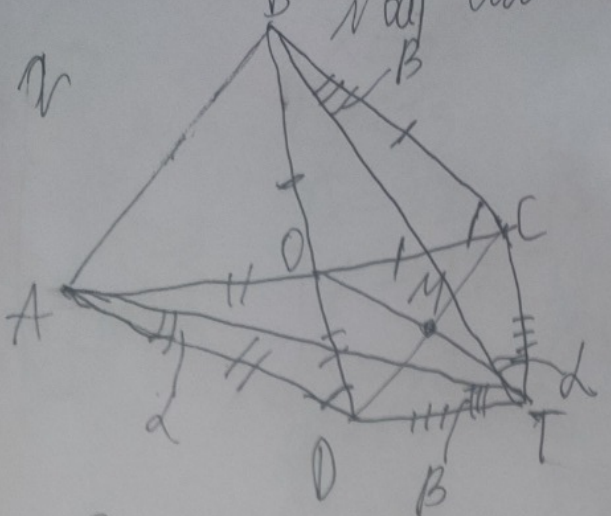
$5a-a^2=6$

$a^2-5a+6=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=2 \to b=3 \\ a=3 \to ba=3 \end{array}\right.$$

№6а) Чистовик стр3

2)



Рассм OCTD $OM = MT$, $CM = MD$ (по усл)

OCTD — парал-м (по пр-ку)

$DT = OC$, $CT = OD$ (по св-ву пар-ма)

$\Rightarrow \angle BCT = \angle ADT$, $AD = OD = CT$, $BC = OC = DT$ $\Rightarrow \triangle BCT = \triangle TDA$ (по 1 ому пр-ку)

$\Rightarrow BT = AT$

$\angle TAD = \angle BTC = \alpha$

$\angle ATD = \angle CBT = \beta$

из $\triangle BCT$: $\alpha + \beta = 180 - \angle BCT$

$\angle BCT = \angle OCB + \angle OCT = \angle OCB + (180^\circ - \angle DOC) =$

$= 60^\circ + (180^\circ - 120^\circ) = 120^\circ$

$\alpha + \beta = 60^\circ$

$\angle ATB = \angle DTC - \alpha - \beta = \angle COD - (\alpha + \beta) =$

$= 120^\circ - 60 = 60^\circ$

211006022 (U868675 M1274801)

№6 а) учитовик стр 4

в $\triangle ABT$: $AT = BT$, $\angle ATB = 60$

$\Rightarrow \angle TAB = \angle TBA = 60$

$\triangle ABT$ — прав (по пр-ку)

211006022 (U868675 M1274801)

№4 Чистовик
стр. 2

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=2\\y^2=3\end{cases}\\[2ex]\begin{cases}x^2=3\\y^2=2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=\sqrt{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$$

Ответ: $(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3})$; $(\pm\sqrt{2};\mp\sqrt{3})$; $(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{2})$; $(\pm\sqrt{3};\mp\sqrt{2})$

№5 всего дублей: 12 Чистовик стр.16

Не дублей: $144-12=132$

1) два дубля: $\frac{12\cdot11}{2}=66$

2) один дубль, другой нет

один дубль – 12 способов

вторая не дубль, и на ней

не может быть чисел, к-рые

написано на дубле, т.е.

на синей стороне 11 способов,

а на красной 10 способов

т.е. таких $11\cdot10=110$ карточек

тогда в этом случае

$12\cdot110=1320$ способов