Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005843**

ID профиля: **323483**

Вариант 13

~~Черновики~~ Чистовик 6.

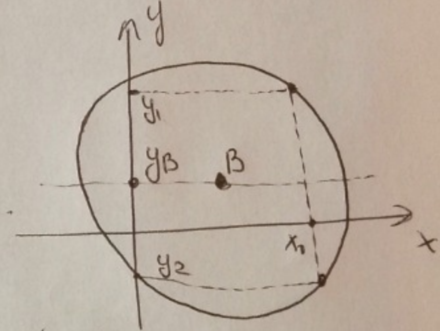
а) $y^2 + y(2x-2a) - 6ax + 5a^2 + 2x^2 = 0$

$D = (2x-2a)^2 - 4(5a^2 + 2x^2 - 6ax) =$

$= 4x^2 - 8ax + 4a^2 - 20a^2 - 8x^2 + 6ax =$

$= \underbrace{-4x^2}_{\text{отр}} - 2ax - \underbrace{16a^2}_{\text{отр}}$; Тогда (по усл $D \geq 0$) $ax < 0$

$\left[\begin{array}{l} D > 0 \\ D = 0. \end{array}\right.$



б) $y_B = \dfrac{y_1(x_0) + y_2(x_0)}{2}$

Тогда:

$a^2y^2 + a^2x^2 - 8ax - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$

$a^2y^2 + y(12a - 2a^3) + a^2x^2 - 8ax + a^4 + 36 = 0$

$D = (12a - 2a^3)^2 - 4(a^2x^2 - 8ax + a^4 + 36) =$

$= 144a^2 - 48a^4 - 4a^6 - 4a^2x^2 + 32ax - 4a^4 - 144 =$

$= 144(a^2 - 1) - 52a^4 - 4a^4(a^2 + 1) + 4ax(8 - ax)$

Т.к мы рассм. точки $(x_0; y_1)$ и $(x_0; y_2)$ — внутри окр $\Rightarrow D > 0$

$y = \dfrac{-12a + 2a^3 \pm \sqrt{D}}{2a^2}$; $y_1 + y_2 = \dfrac{2(-12a + 2a^3)}{2a} = 2a^2 - 12$

$y_B = \dfrac{2a^2 - 12}{2} = a^2 - 6$

Чистовик 5.

$A(x_A; y_A)$; $y \neq 1$

$x_A; y_A$ – корни уравнения:

$$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0. \quad (*)$$

Окр. с центром т. B (урав. окр.):

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0.$$

1) Если лежат по разн. стороны, то:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_A > y_0 \\ y_B < y_0 \end{cases} \\ \begin{cases} y_A < y_0 \\ y_B > y_0 \end{cases} \end{array}\right.$$

где $y_0 = 1$

y_A – коорд. на Оси Оу т. A.

y_B – коорд. на Оси Оу т. B.

2) Если в ур. (*) 1 корень (по y.) (см. след. стр.)

$$y = \frac{-2x+2a}{2} = a - x \qquad (-4x^2 - 2ax - 16a^2 = 0) \quad (**)$$

2 корня

$$y = \frac{-2x+2a \pm \sqrt{-4x^2 - 2ax - 16a^2}}{2}$$; где $(-4x^2 - 2ax - 16a^2) > 0$.

рассмотрим.

$$-4x^2 - 2ax - 16a^2 = 0$$

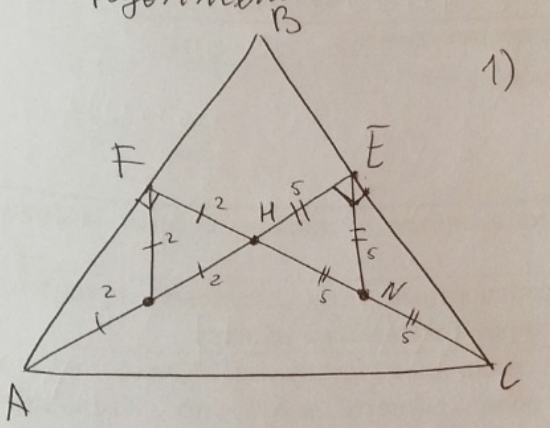
$$D = 4a^2 - 4 \cdot 16 \cdot 4a^2 \Rightarrow D < 0$$ $\Rightarrow$ не может быть

Тогда им. 2 корня.

черновик Чистовик 6

Чистовик 4

№1 продолжение



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC.$

1) $BE = \frac{1}{2} AB$ ($\triangle ABE$, $\angle BAE = 30^\circ$, $\angle BEA = 90^\circ$).

$AE = \cancel{\sin}\ \cos 30^\circ \cdot AB =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} AB$

$\Downarrow$

$BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = \frac{2+2+5}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

Тогда $AB = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

2) $\triangle AEC$ – прямоугольный.

$AE = 9$; $AC = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}$

По т. Пифагора найдем EC:

$AC^2 - AE^2 = EC^2$

$EC^2 = 156 - 81 = 75$; $EC = 5\sqrt{3}$.

$\Downarrow$

$BC = BE + EC = 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

3) Тогда площадь

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

Ответ: $S_{ABC} = 36\sqrt{3}$.

$\angle ABC = 60^\circ$

$R = 2\sqrt{13}$.

№2. Чистовик 3.

x - наим. число; y - наиб. число; z - сумма остальных чисел на доске.

По усл:

$$\begin{cases} 32x+y+z=477 \\ 14y+x+z=477 \end{cases} \Rightarrow 32x+y+z=14y+x+z.$$

$$31x=13y.$$

Т.к. 13 и 31 - простые, x и y - натуральные $\Rightarrow x \vdots 13;\ y \vdots 3$

т.е.

$x=13a$

$y=31a$ (из равенства) a - натур.

Значит сист. урав:

$$\begin{cases} 32\cdot 13a+31a+z=477 \\ 14\cdot 31a+13a+z=477 \end{cases} \Rightarrow 447a+z=477.$$

Т.к. a и z - натур. $\Rightarrow a$ не больше 1

тогда $a=1;\ z=30 \Rightarrow x=13;\ a=31.$

$z=d_1+d_2+\ldots+d_n$; где $13<d_i<31$. (d - числа с доски)

Тогда возможны наборы чисел:

13 31 30

13 31 14 16

- другие наборы наруш. усл. $13<d_i<31$ или $d_k \neq d_n$ (попарно различные).

Ответ: $\{13; 31; 30\}$ или $\{13; 31; 14; 16\}$

211005843 (U323483 M1276846)

№1 ~~Черновик~~ Чистовик 2.

продолжение.

В ΔAFH — $\angle FAH = 30°$ ($\angle FHA = 60°$)

$\Downarrow$ $\angle AFH = 90°$

ΔABE, где $\angle AEB = 90°$, $\angle ABE = 60°$.

Т.е. $\angle ABC = 60°$.

Из теоремы синусов:

$$\frac{AC}{\sin ABC} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin 60°}$$

AC — найдем по т. косинусов:

ΔAHC: $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2 \cdot AH \cdot HC \cdot \cos \angle AHC$.

$$AC^2 = 16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot (-\cos 60°).$$

т.к. $\angle AHC$ — смеж с $\angle EHC = 60°$.

$$AC^2 = 116 + 80 \cdot \frac{1}{2} = 116 + 40 = 156.$$

$$AC = \sqrt{156} = 2\sqrt{39} = 2\sqrt{3 \cdot 13}$$

Тогда $R = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot \sin 60°} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{13} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$.

211005843 (U323483 M1276846)

Черновик

$$\underset{\text{наим}}{32x} + \underset{\text{наиб.}}{y} + \underset{\text{сумма ост.}}{z} = 477.$$

$$x + z + 14y = 477.$$

$\boxed{x \vdots 13,\ y \vdots 31}$

$x \cdot 31 = 13y.$

$x = 13\ ;\ y = 31$ (Наприм.)

Тогда

$32 \cdot 13 = \cancel{4}16 = 32x$

$+$

31

$= 4\cancel{5}7$

$$\begin{array}{r} \times\ 32 \\ 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array}$$

① суммарно $477 \Rightarrow z = 30$ — подходит

~~$z = 20$~~ т.к. $z = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

при этом

$13 < a_i < 31$

②

$13 + 20 + 14 \cdot 31 = 467.$ — не подх.

$14 \cdot 31 = 434$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 14 \\ \hline 124 \\ 31 \\ \hline 434 \end{array}$$

$x = 26\ ;\ y = 62.$

$26 \cdot 32 + 62 + z = 477.$

$26 \cdot 32$ — больше $477.$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ 32 \\ \hline 52 \\ 78 \end{array}$$

$32 = \cancel{2 \cdot 16} = 2^5$

$14 = 2 \cdot 7$

x – наим.
y – наиб.
z – сумма ост. чисел

Черновик

$$\begin{cases} 32x+y+z=477 \\ 14y+x+z=477. \end{cases}$$

$477=477$

$\Downarrow$

$32x+y+z=14y+x+z.$

$31x=13y.$

Т.к. 31 и 13 – простые $\Rightarrow$ $x \vdots 13$; $y \vdots 31$.

$\boxed{x=13a;\ y=31a.}$

Значит:

$$\begin{cases} 32\cdot 13\cdot a+31a+z=477 \\ 14\cdot 31a+13a+z=477 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 447a+z=477 \\ 447a+z=477 \end{cases}$$

~~$\Rightarrow$ такого не может быть.~~

$(32\cdot 13+31)a$ и $(31\cdot 14+13)a$

32×13: 96, 32, 416 $\Rightarrow =447$

31×14: 124, 31, 434 $\Rightarrow =447$

$z=a_1+a_2+\ldots+a_n$

$13<a_i<31$

$\Downarrow$

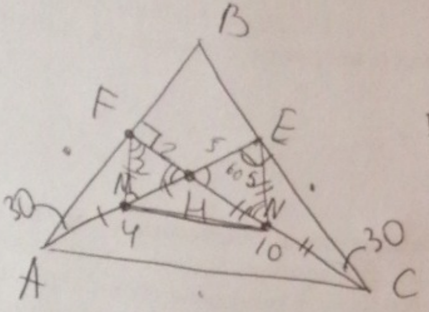
$a_i=30=z$ (иначе не вып. усл.)

Получаем урав. $447a+z=477.$

т.к. z и a – натур $\Rightarrow$ $a=1$, $z=30.$

№1

~~Черновик~~ ~~Черновая~~ Чистовик 1.



$FM \parallel EN$.

$EN = 5$; $FM = 2$

$\angle ABC$ − ?

S_{ABC} − ?

R − (оп. окр) − ?

1) ΔHEC − прямоуг., т.к. т. N − серед.

$\Downarrow$

EN − медиана к гипотенузе

$\Downarrow$

$HC = 2EN = 10$. $(HN = NC)$

Аналогично для ΔAFH.

$AH = 2FM = 4$. $(HM = MA = 2)$

2) Из параллельности FM и EN $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HEN = \angle HMF$; $\angle ENH = \angle HFM$.

3) Т.к. $EN = HN \Rightarrow \angle HEN = \angle EHN$.

Т.к. $FM = MH \Rightarrow \angle MFH = \angle MHF$

$\Downarrow$

ΔMFH и ΔHEN − равностор (все угл. равн

1) $\Rightarrow$ $AE = \cancel{15}\ 9$; $CF = 12$.

2) ~~$\angle AHC = 120°$ $\Rightarrow$ по сумме углов~~

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005843**

ID профиля: **323483**

Вариант 13

Чистовик 1.

№5 12^2 карточек.

Син. крася.
12 — 12
карточка

На синей может стоять любое из 12
На красной части любые из 12.
Всего вариантов $12 \cdot 12 = 12^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Тогда у фокусника есть все варианты карточек. (различные)

Первая карточка будет дублем. Таких 12 вариантов.

2-ая карточка не должна содержать число с 1ой карточки. Т.е. син. $11 \leftarrow | \rightarrow 11$ красн

Остается 11 вар. на син. ст. и 11 на красной.
Таким образом 2-ую выбираем 11^2 способов

~~$12 \cdot 121 = 1452$ способов~~.

Но из них 11 дублей.

Случай 1: В наборе только 1н дубль:

$$12 \cdot (11^2 - 11) = 12 \cdot 110 = 1320 \text{ (вар)}$$

Случай 2: В наборе 2 дубля, тогда:

$$\frac{12 \cdot 11}{2} = 66 \text{ (вар)}$$ т.к. AB и BA - одно и то же

Тогда всего $1320 + 66 = 1386$ вариантов.

Ответ: 1386 вариантов

211005843 (U323483 M1276847)

Чистовик. 2.

№4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

Пусть

$x^2+y^2=a \quad (a \geq 0)$

$x^2 \cdot y^2 = b. \quad (b \geq 0)$

т.к. $w^2 \geq 0$, где $w \in R$

Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} 3\cdot a-2b=3 \\ a^2-2b+\frac{2}{3}b=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+\frac{2}{3}b \\ (1+\frac{2}{3}b)^2-\frac{4}{3}b=17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1+\frac{2}{3}b \\ 1+\frac{4}{3}b+\frac{4}{9}b^2-\frac{4}{3}b=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+\frac{2}{3}b \\ \frac{4}{9}b^2=16. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1+\frac{2}{3}b \\ b^2=9\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm 6 \quad (b \geq 0) \\ a=1+\frac{2}{3}\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6 \\ a=5 \end{cases}$$

Выразим a и b через x и y:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2\cdot y^2=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=5-y^2 \\ y^2(5-y^2)=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=5-y^2 \\ y^4-5y^2+6=0 \end{cases}$$

Найдем корни уравнения: $y^4-5y^2+6=0$.

$t=y^2 \Rightarrow t^2-5t+6=0$

$D=25-4\cdot 6=1.$; $t=\frac{5\pm 1}{2}=\left[\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$

Тогда:

$$\left[\begin{matrix} \begin{cases} y^2=3 \\ x^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2=2 \\ x^2=3 \end{cases} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow$$

Получаем решения:

$$\left[\begin{matrix} \begin{cases} y=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases} \end{matrix}\right.$$

Ответ:

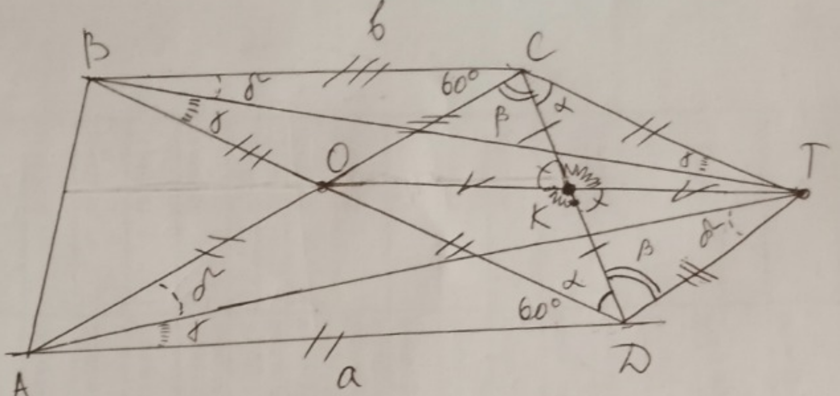
$y=\pm\sqrt{3}, x=\pm\sqrt{2}$

или

$y=\pm\sqrt{2}, x=\pm\sqrt{3}$.

Чистовик 3

№6



1) Т.к. $\angle BCA = \angle CAD \Rightarrow BC \parallel AD$ (накрест леж. углы) $\Rightarrow$ ABCD – трап. или параллелогр. (если $BC=AD$)

2) В $\triangle OCD$: OK – медиана

Т.к. $OK = TK \Rightarrow$ OCTD – параллелограмм. (из рав $\triangle CKT$ и $\triangle OKD$; $\triangle COK$ и $\triangle TOK$)

$\Downarrow$

$CT = OD = a$; $CO = TD = b$; $CT \parallel OD$; $CO \parallel TD$

3) Тогда

$\angle TCD = \angle ODC = \alpha$

$\angle OCD = \angle CDT = \beta$.

4) В $\triangle DTA$: по т. кос: $AT^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha + \beta)$

$\angle ODA = 60°$, т.к. $\triangle AOD$ – правильный.

В $\triangle BCT$: по т. кос: $BT^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \alpha + \beta)$

$\angle BCO = 60°$, т.к $\triangle BOC$ – правильный.

$\Downarrow$

$BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – равнобедр.

Чистовик. 4

№6 продолжение

5) $\triangle BCT = \triangle ADT$ по СУС:

$AD = CT$; $CB = DT$; $\angle BCT = \angle ADT$.

$\Downarrow$

$\angle CBT = \delta = \angle ATD$

$\angle CTB = \gamma = \angle TAD$.

6) В $\triangle ATD$ сумма углов: $\gamma + \delta + 60° + \alpha + \beta = 180$

Тогда в $\triangle CTD$ сумма углов:

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \angle BTA = 180°$

$\Downarrow$

$\angle BTA = 60°$

$\Rightarrow$ это р.б. треуг. с углом 60° при вершине $\Rightarrow$ $\triangle BTA$ – правильный

чтд.

б) 7) Найдём AB по т. косинусов $\triangle BDA$:

$AB^2 = (OD + BO)^2 + AD^2 - 2(OD+BO) AD \cdot \cos 60°$

$AB^2 = 25 + 9 - 2(5) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 34 - 15 = 19$

$AB = \sqrt{19}$

8) Тогда площадь $\triangle ABT$; $S_{ABT} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 60° =$

$= \frac{19}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$

Чистовик 5.

Площадь ~~тр~~ Трапеции (см п.1 и(а)) $BC \neq AD$.

9) $S_{тр} = CA \cdot BD \cdot \sin \angle COD = 5 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = 25 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\angle COD = 120^\circ$, т.к. смеж с $\angle BOC = 60^\circ$

т.к. $\triangle BOC$ – прав.

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$

10) $CA = BD = a + b$ (см. рис.)

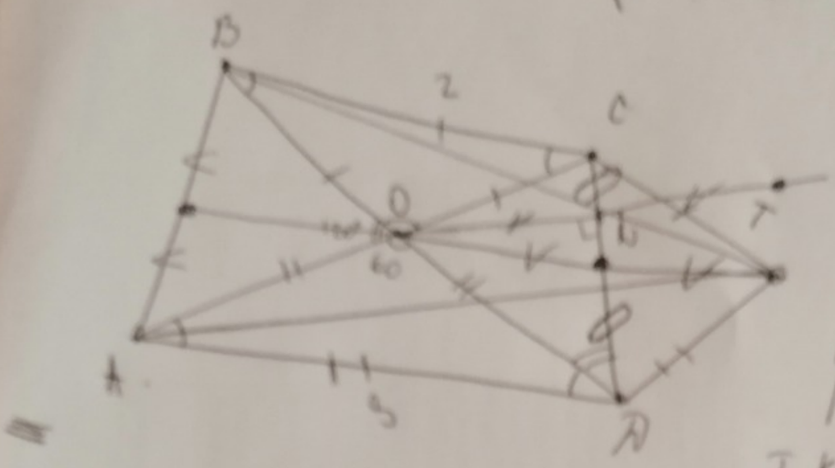
Тогда:

$$\frac{S_{ABT}}{S_{Tp}} = \frac{19\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{25\sqrt{3}} = \frac{19}{50}.$$

Ответ: а) чтд

б) $\frac{S_{ABT}}{S_{Tp}} = \frac{19}{50}$

Черновик



$OL = LT$ (симметр.)

$OL \perp CD$

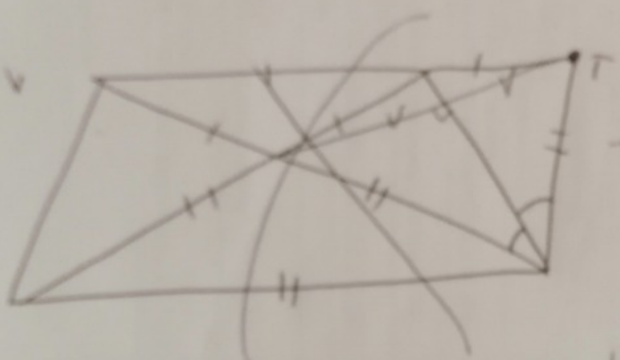
D – ТЬ! $\triangle ABT$ – прав.

$ABCD$ – трап.

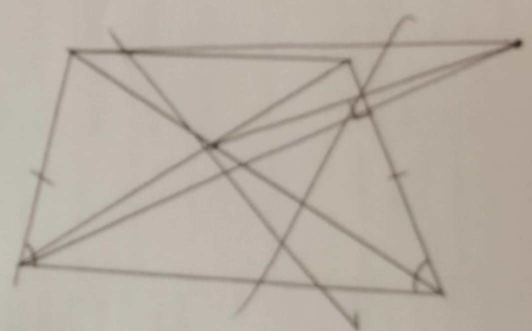
$BC \parallel AD$

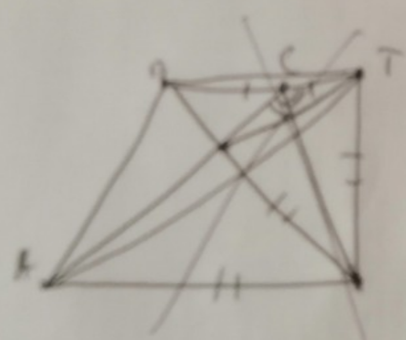
т.к. $\angle CBD = \angle BDA$

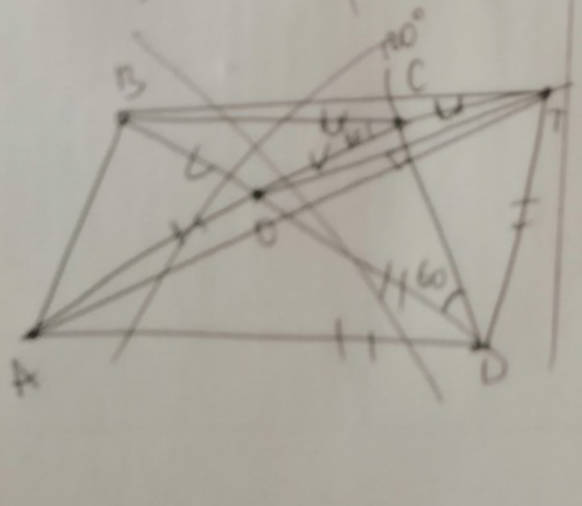
(накрест лежащие)



1 | 1   2 / 2







~~[illegible]~~ $(11^2 - 11) \cdot 12$

дубль

Только 1 дубль

$+ \; \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

$$\begin{array}{r} \times\ 110 \\ 12 \\ \hline 220 \\ 110\ \ \\ \hline 1320 \end{array}$$