Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

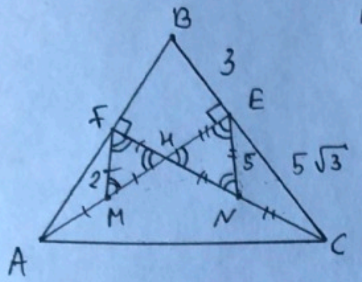
Шифр: **211005581**

ID профиля: **214763**

Вариант 13

Чистовик

№1



$\triangle AFH$, $\triangle HEC$, $\triangle ABC$, $\triangle FBC$ – прямоугольные т.к. CF и AE – высоты

Проведём FM и EN, $AM=MH$ и $HN=NC$ по условию

$\angle AFC=\angle AEC=\angle AEB=\angle CFB=90^\circ$ т.к. FC и AE – высоты $\Rightarrow$ FM и ~~EN~~ – медиана в треугольнике AFH, по свойству, что медиана проведённая из прямого угла к гипотенузе равна половине гипотенузы $\Rightarrow$ $FM=\frac{1}{2}AH=AM=MH$, аналогично доказываем, что $EN=\frac{1}{2}HC=HN=NC$, т.к. $FM=MH$ и $HN=NE$, то $\triangle FMH$ и $\triangle HEN$ – равнобедренные $\Rightarrow$ что $\angle HFM=\angle FHM$ и $\angle HEN=\angle EHN$.

$\angle FHM=\angle EHN$ как вертикальные $\Rightarrow$

$\angle HFM=\angle FHM=\angle EHN=\angle HEN$, $\angle FMH=\angle HEN$ и $\angle ENH=\angle MFH$ как накрест лежащие при $FM \parallel EN$ и секущих FN и ME $\Rightarrow$ $\angle MFH=\angle HMF=\angle FHM=\angle HEN=$ $=\angle ENH=\angle NHE$ $\Rightarrow$ $\triangle FMH$ и $\triangle HEN$ – равносторонние $\Rightarrow$ $FH=HM=FM=2$ и $HE=EN=NH=5$ и $\angle EHN=60^\circ$.

$\angle ECH=90^\circ-\angle EHN=30^\circ$ т.к. сумма острых углов в прямоугольном $\triangle$, равна 90° $\Rightarrow$ $\angle FBC=$ $=90^\circ-\angle FCB=60^\circ$ т.к. сумма острых углов в прямоуг. $\triangle$ равна 90° $\Rightarrow$ $\angle ABC=60^\circ$, по теореме пифагора в $\triangle HEC$, $EC=\sqrt{HC^2-HE^2}$

$EC=\sqrt{100-25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, ~~$\sin\angle FCB=\sin 30^\circ=$~~

$\cos\angle FCB=\cos 30^\circ=\frac{FC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $FC=FH+2HN=2+5\cdot 2=12$ $\Rightarrow$

$\frac{12}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$24=\sqrt{3}\,BC$

$BC=\frac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$

Чистовик

$S_{ABC} = BC \cdot \frac{1}{2} \cdot AE$

$AE = MH \cdot 2 + HE = 2 \cdot 2 + 5 = 9$

$S_{ABC} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot 9 = \cancel{36\sqrt{3}}\ 36\sqrt{3}$

~~AC~~ по теореме Пифагора в $\triangle AEC$, $AC = \sqrt{AE^2 + EC^2}$

$AC = \sqrt{81 + 75} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$

из следствие теорем синусов

$\cancel{2R = \frac{AC}{\sin\beta}}$ $\quad 2R = \frac{AC}{\sin\angle ABC}$

$R = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{39}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$

Ответ: $S_{ABC} = 36\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{13}$, $\angle ABC = 60^\circ$

Чистовик

Пусть S - сумма чисел на доске изначально

x - самое маленькое

y - самое большое $\Rightarrow$

$\begin{cases} S+31x=477 \\ S+13y=477 \end{cases} \Rightarrow 31x=13y$, т.к. $x, y \in N \Rightarrow$

~~предположим что:~~ $x \vdots 13$ и $y \vdots 31 \Rightarrow$ ~~если $x \neq 13$ то~~

предположим, что $x \neq 13 \Rightarrow x \geq 26 \Rightarrow 31x \geq 31 \cdot 26 = 806$

, а это больше 477 $\Rightarrow S+31x > 477 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$x = 13$ ~~$\Rightarrow$~~ только может быть $\Rightarrow$

$S = 74 \Rightarrow$ если $y \geq 62$ то $S > 74$, а это невозможно $\Rightarrow$

$y = 31 \Rightarrow$

если ~~их все~~ всего их 3 числа то третье равно

$74-31-13=30$, а $13<30<31$

если всего их 4 числа то наименьшее равно $\geq 14 \Rightarrow$

или 14 то 13, 14, 16, 31 если 15 то 13, 15, 15, 31, но

это противоречит условию, а три быть не может т.к.

$S > 74$ тогда будет $\Rightarrow$

Ответ: $(13; 30; 31)$; $(13; 14; 16; 31)$.

Чистовик

№ 3

$y^2+2y(x-a)+5a^2-6ax+2x^2=0$

$D_1=(x-a)^2-5a^2+6ax-2x^2=-x^2+4ax-4a^2=-(x-2a)^2 \Rightarrow$

т.к. $D_1 \geq 0$:

$x=2a \Rightarrow$

$y=a-x=-a \Rightarrow A(2a;-a)$

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$ если $a=0$ то

$36=0$ – неверно $\Rightarrow$

$a \neq 0$ тогда мы можем поделить на a^2 и получив-~~ш~~шееся уравнение будет графическим решением окружн. с радиусом в a^2 раз меньше и тем же центром (B)

$x^2+y^2-8x-2ay+12y\frac{1}{a}+a^2+\frac{36}{a^2}=0$

$(x-4)^2-16+\left(y^2+2y\cdot\left(6\frac{1}{a}-a\right)+\left(\frac{36}{a^2}-12+a^2\right)\right)+12=0$

$(x-4)^2+\left(y+\left(6\frac{1}{a}-a\right)\right)^2=4 \Rightarrow$ центр в точке с координатами

$\left(4;a-\frac{6}{a}\right)$ – это ~~коо~~ ~~корд~~ координ. точки B, ~~что выпол-~~ ~~няет~~ чтобы выполнялось условие задачи, надо чтобы выполнялось следующие:

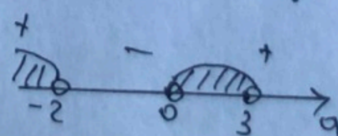
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-a>1\\ a-\frac{6}{a}<1 \quad (1)\end{cases}\\ \begin{cases}-a<1\\ a-\frac{6}{a}>1 \quad (2)\end{cases}\end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases}a<1 & (а)\\ \frac{a^2-6-a}{a}<0 & (б)\end{cases}$

(а) $a\in(-\infty;1)$

б) $\frac{(a-3)(a+2)}{a}<0$, ~~нет реш.~~.

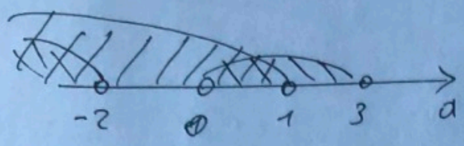
решаем методом интервалов



$\Rightarrow a\in(-\infty;-2)\cup(0;3)\Rightarrow$

Чистовик

~~реш~~ общее решение системы



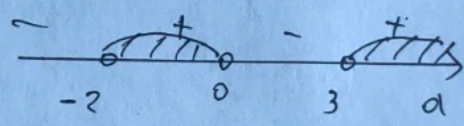
$a \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$

(2) $\begin{cases} a > 1 & (а) \\ \dfrac{a^2 - 6 - a}{a} > 0 & (б) \end{cases}$

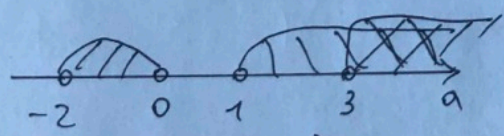
(а) $a \in (1; +\infty)$

(б) $\dfrac{(a-3)(a+2)}{a} > 0$

решаем методом интервалов

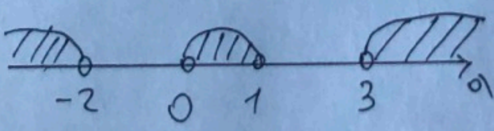


общее решение системы



$a \in (3; +\infty)$

решение совокупности



г) $a \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$

Черновик

x y z

$x \cdot 32 + y + z = 477$

$x + y + 14z = 477$

$31x - 13z = 0$

$x = \frac{13}{31} z$

$\frac{32 \cdot 13}{31} z + y + z = 477$

$477 - \frac{32 \cdot 13 + 31}{31} z = y$

$y = \frac{13}{31}$

$y = 477 - \frac{13}{31} z - 14z$

$y = 477 - \frac{13 + 14 \cdot 31}{31} z$

$447 - 2 \frac{32 \cdot 13 + 31}{31} = y$

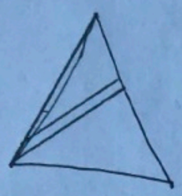
13 · 31

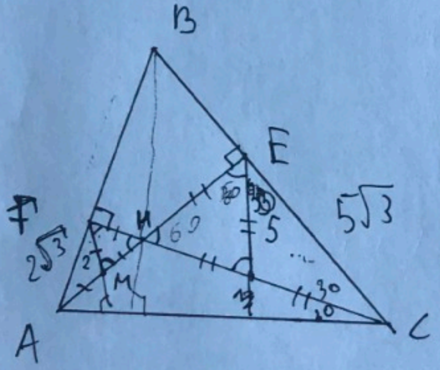
1

44

$\times \begin{array}{r} 31 \\ 13 \\ \hline 93 \\ 31 \\ \hline 403 \end{array}$

Черновик





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

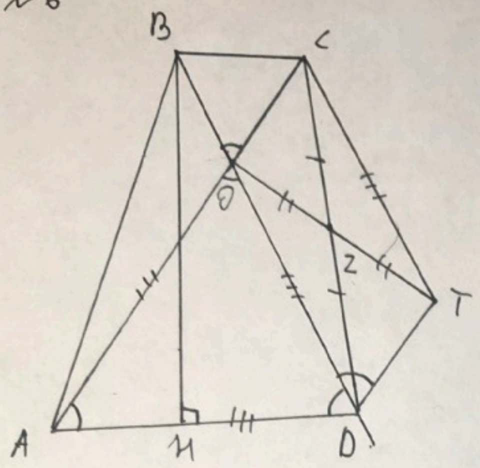
Шифр: **211005581**

ID профиля: **214763**

Вариант 13

Чистовик

№6



$\angle COD$ как смежный с $\angle COB$, а

$\angle CBO = \angle BCO = \angle COB = 60°$ т.к $\triangle BOC$ — правильный

$OCTD$ — параллелограм т.к точка T симметрична O относительно центра (D =>

$\angle ODT = 60°$

$\angle AOT = \angle CTD = 120°$

$CT = OD = AD$, TD — общая =>

~~$\triangle CTD = ATD$~~

$\triangle CTD = \triangle ATD$ по двум сторонам и углу между ними =>

$AT = CD$, $CD = AB$ => $AT = AB$, аналогично рассматриваем $\triangle BCT$ и $\triangle CTD$ получаем, что $AB = BT$ =>

$\triangle ABT$ — равносторонний, ч.т.д

б) $BC = 2$, $AD = 3$ тогда $AC = 5$ т.к. $AC = AO + OC$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ =>

по теореме косинусов в $\triangle ABC$ $AB = \sqrt{2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{19}$

т.к. $\triangle ABT$ р/с по $S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ т.к. высота по теореме пифагора равна $h = \sqrt{AB^2 - 0{,}5^2 AB^2} = 0{,}5AB\sqrt{3}$ =>

$S_{ABT} = h \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, $BH \perp AD$ $\triangle ABH$: $AH = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

$BH = \sqrt{19 - \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{2+3}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABT} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{19\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$$

~~Ответ:~~ Ответ: $4\frac{3}{4} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{ABCD}}$

Чистовик

№ 5

У вокуенина всего 12 дублей => он может взять дубль ~~двенадцатью вариантами~~ двенадцатью вариантами, т.к. у него всего 12 чисел то вторую карточку он может выбрать (12-1)·(12-1) т.к. нам не важно вторая карточка – это дубль или нет => всего вариантов выложить дубль и любую другую без цифр дубля равен 12·11·11 = 1452 варианта

Ответ: 1452 варианта

Чистовик

№4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3 \\ (x^4+2x^2y^2+y^4)-2x^2y^2+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3 \\ (x^2+y^2)^2-1\frac{1}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$x^2+y^2=t$, $u,t\geqslant 0$

$x^2y^2=u$

$$\begin{cases} 3t-2u=3 \Rightarrow t=\frac{3+2u}{3} \\ t^2-1\frac{1}{3}u=17 \end{cases}$$ подставим во второе

$\left(\frac{3+2u}{3}\right)^2-\frac{4}{3}u=17 \quad |\cdot 9$

$(3+2u)^2-12u=153$

$9+12u+4u^2-12u-153=0$

$4u^2-144=0$

$4u^2=144$

$u^2=6$

$u=\pm 6$

т.к. $u\geqslant 0 \Rightarrow$

$u=6 \Rightarrow$

$t=\frac{3+2\cdot 6}{3}=5$

$x^2+y^2=5$

$$\begin{cases} x^2y^2=5 \Rightarrow y^2=5-x^2 \\ x^2y^2=6 \quad (5-x^2)x^2=6 \end{cases}$$

$5x^2-x^4-6=0$

$x^4-5x^2+6=0$, $t=x^2$, $t\geqslant 0$

$D=25-4\cdot 6=1$

$t_1=\frac{5-1}{2}=2$

$t_2=\frac{5+1}{2}=3$

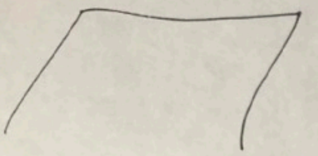
Чистовик

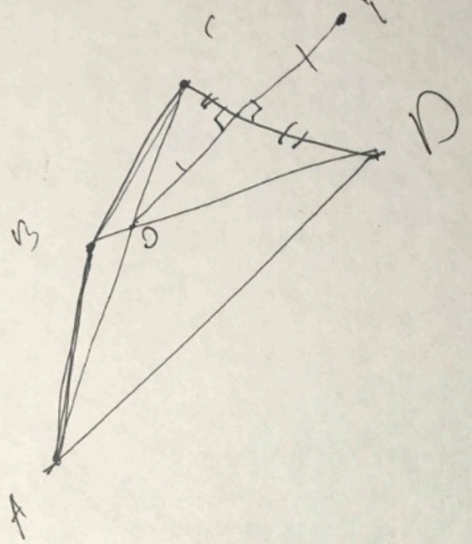
$t_1 = 2$

$t_2 = 3$ $\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}\ ;\ y = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{3}\ ;\ y = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

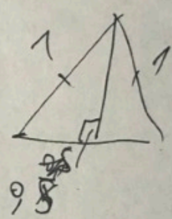
Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{3})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};\sqrt{2})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{2})$





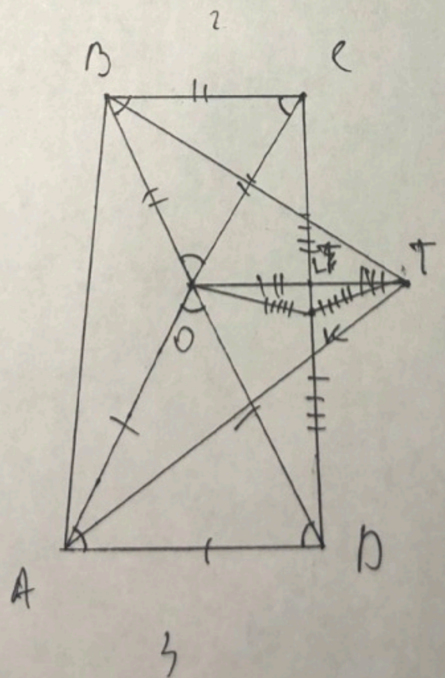
$$\sqrt{AB^2 - 0,5 \cdot 0,5AB^2}$$

$0,25$



$0,75AB^2$

$0,5AB\sqrt{3}$



144 розы. карточки Черновик

1 кр 2 син стороны

на каждой карточке написано

$$\begin{array}{r} \times\ 143 \\ 12 \\ \hline 286 \\ 3 \end{array}$$

12 руб

$143 \cdot 12$

~~12~~

~~1 + 11~~.

$12 \cdot 11 \cdot 11 = 121 \cdot 12$

$132 \cdot 11 =$

$$\begin{array}{r} 352 \\ 11 \\ \hline 1452 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 132 \\ 11 \\ \hline 132 \\ 132 \\ \hline 1452 \end{array}$$

Черновик

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3 \\ (x^2+y^2)^2-1\frac{1}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$a=x^2+y^2$ $\quad a\geq 0$

$B=x^2y^2$ $\quad b\geq 0$

$$x^2+y^2-1=\frac{2}{3}x^2y^2$$

$$\frac{2}{3}x^2y^2=17-x^4-y^4$$

$$\begin{cases} 3a-2B=3 \\ a^2-\frac{4}{3}B=17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^4+y^4+x^2+y^2-18=0$$

$$x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)-18=0$$

$$\begin{cases} b=\frac{3a-3}{2} \\ a^2-\frac{4}{3}\left(\frac{3a-3}{2}\right)=17 \end{cases} \quad |\cdot 6$$

$(x+y)^2=18$

$x+y=\pm 3\sqrt{2}$

$6a^2-4(3a-3)=17\cdot 6$

$6a^2-12a+12-102=0$

$6a^2-12a-90=0$

$a^2-2a-15=0$

$x=3\sqrt{2}-y$

3(

$3(3\sqrt{2}-y)^2+3y^2-2(3\sqrt{2}-y)^2\cdot y^2=3$

$3(y^2-6\sqrt{2}y+18)+3y^2-$

~~Чистовик~~ Черновик

№ 4

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17\end{cases}$$

$$\begin{cases}3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3\\ (x^4+2x^2y^2+y^4)-2x^2y^2+\frac{2}{3}x^2y^2=17\end{cases}$$

$$\begin{cases}3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3\\ (x^2+y^2)^2-1\frac{1}{3}x^2y^2=17\end{cases}$$

Пусть

$x^2+y^2=a$ $\quad$ $A, B \geq 0$

$x^2y^2=b$

$$\begin{cases}3a-2b=3\\ a^2-\frac{4}{3}b=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\frac{3a-2}{2}\\ a^2-\frac{4}{3}\left(\frac{3a-3}{2}\right)=17 \,\Big|\cdot 6\end{cases} \Rightarrow$$

$6a^2-12a+12=102$

$6a^2-12a-90=0$

$a^2-2a-15=0$

по обратной т. Виетта

$$\left[\begin{array}{l}a=5\\ a=-3\end{array}\right. \quad \text{т.к. } a, b \geq 0 \Rightarrow$$

$a=5 \Rightarrow$

$$b=\frac{3a-2}{2}=\frac{15-2}{2}=\frac{13}{2}=6,5$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x^2y^2=6,5\end{cases}$$

$x^2+y^2+2x^2y^2=18$

$(x+y)^2=18$

$|x+y|=3\sqrt{2}$

(А) $x=\cancel{y-3\sqrt{}}\ 3\sqrt{2}-y$

(б) $x=-3\sqrt{2}-y$