

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005546**

ID профиля: **195145**

Вариант 13

Условие

N2

Не унитарности:  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$  - м.к. различные

между:

$$\begin{cases} 32a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = 477. & (1) \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 14a_n = 477. & (2) \end{cases}$$

(1) - (2)

$$31a_1 - 13a_n = 0$$

$$31a_1 = 13a_n$$

м.к.  $a_1, a_n \in \mathbb{N}$ , то  $a_1 = 13$ ;  $a_n = 31$

$\Downarrow$

$$a_1 \geq 13; a_n \geq 31$$

$$a_n = 31: 31 \cdot 14 = 434 < 477 - \text{гг}$$

$$a_n \geq 32: a_n \cdot 14 \geq 448 > 477 - \text{негг}$$

$$\Downarrow \\ a_n = 31$$

$$a_1 = 13: 13 \cdot 31 = 406 < 477 - \text{гг}$$

$$a_1 \geq 16: a_n \cdot 32 \geq 512 > 477 - \text{негг}$$

Значит  $a_1 = 13, a_n = 31$

$$\text{между } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 477 - 31 \cdot 14 = 43$$

$\Downarrow$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 30$$

$$\text{но } a_2 > a_1$$

$$\Downarrow \\ a_2 \geq 14$$

$$a_2 = 14: a_3 + \dots + a_{n-1} = 16, \text{ но } a_3 > 14, \text{ между } a_3 = 15 - \text{негг} \text{ между } 13, 14, 16, 31$$

каждый элемент - м.к.  $a_3 = 16 - \text{гг}$

между пусть  $30 > a_2 > 14$ , между  $a_3 + \dots + a_{n-1} \leq 15$ , а значит  $a_3 \leq 15$  - негг м.к. между  $a_3 \leq a_2$  - негг

$\sqrt{3}$

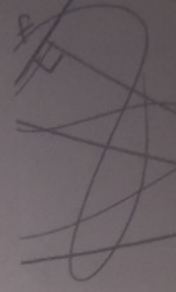
⑧

B ~~longa~~

$$\frac{6-a^2}{a} \vee 1$$

$$6-a^2-a \vee 0$$

$$-(a-\frac{1}{2})^2 \vee 0$$



$$180-2d \\ d=60$$

$$AC = \int \\ =$$

$$AC = \sqrt{8}$$

$$\frac{4AC}{LAC}$$



(7)

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^2y + 9a^2 + 36 = 0$$

~~$$a^2(x^2 - 6x + 6) - 16a^2 + a^2y^2 - 2ay + 12a^2 = 0$$~~

$$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$2ay(6-a^2) + a^4 - 2a^2 + 36 = 0$$

$$a^4 - 2a^2 + 36 = 0$$

$$4x^2 \quad y > 1$$

~~$$a^2(x-4)^2 + (ya + (6-a^2))^2 = 4a^2(a^2)$$~~

$$a^2(x-4)^2 + (ya + (6-a^2))^2 = 4a^2(a^2)$$

$$N1 \quad (x-4)^2 + (y + \frac{6-a^2}{a})^2 = 4$$

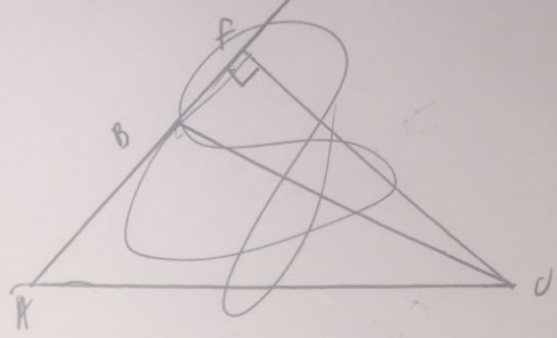
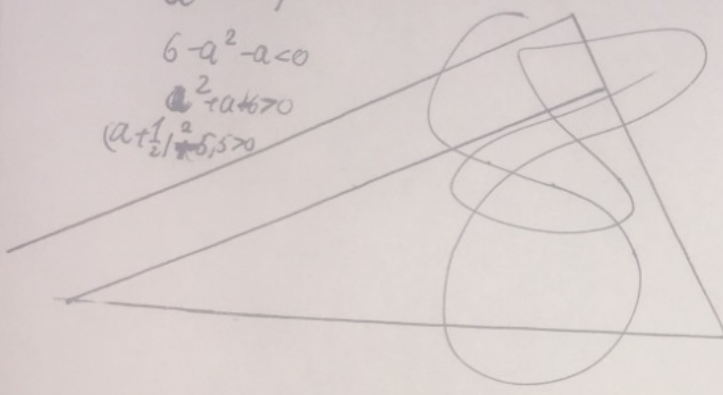
$$(4; \frac{6-a^2}{a})$$

$$\frac{6-a^2}{a} < 1;$$

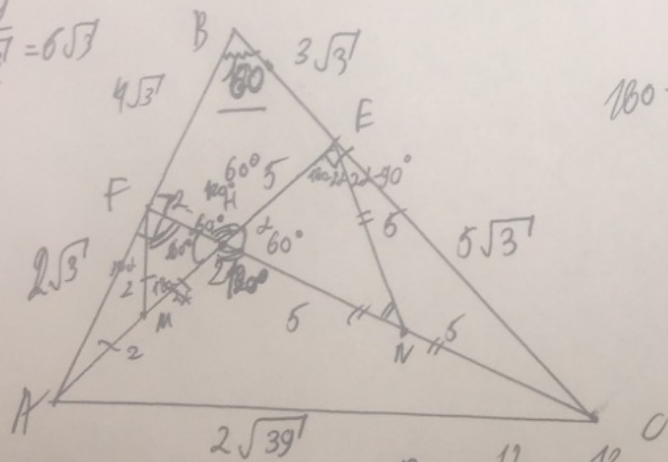
$$6-a^2-a < 0$$

$$a^2+a-6 > 0$$

$$(a+3)(a-2) > 0$$



$$AB = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}$$



$$180 - 2 - 180$$

$$180 - 2d = 2$$

$$d = 60^\circ$$

$$AC = \sqrt{12^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{12 \cdot 12} = \sqrt{56} = 2\sqrt{39}$$

$$AC = \sqrt{81 + 75} = \sqrt{156}$$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{36\sqrt{3}}{4R}$$

$$BC = \frac{12}{\sin 60} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}$$

$$R = \frac{abc}{4 \cdot 36\sqrt{3}}$$

$$AB = 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$BE = 3\sqrt{3}$$

$$R = \frac{6 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{39}}{4 \cdot 30\sqrt{3}}$$

$$39 = 29 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \angle AHC$$

$$= 2\sqrt{39}$$

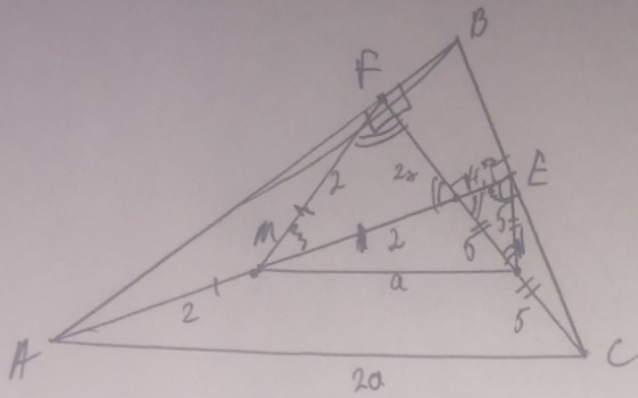
$$\frac{4E \cdot BC}{2} = \frac{9 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

$$12 = 20 - \cos \angle AHC$$

$$\cos \angle AHC = \frac{1}{2}$$

$$\angle AHC = 60^\circ$$

$$360 - 180 - 60$$



~~MN =~~

$$FE = \sqrt{29} \cdot x$$

$$MN = \sqrt{4 + 4x^2 + 20x + 25}$$

$$25 + 4x^2 + 16x + 4$$

~~$$4x^2 + 20x + 25 + 4x^2 + 16x + 4$$~~

$$AF^2 = 4 - 4x^2$$

$$EC^2 = 100 - 25x^2$$

$$AC = \sqrt{100 + 4x^2 + 80x + 4 - 4x^2} = \sqrt{104 + 80x}$$

~~$$(10 + 2x)^2 = 100 + 4x^2 + 80x$$~~

~~$$AC = \sqrt{16 + \dots}$$~~

~~$$2\sqrt{26 + 20x}$$~~

$$MN = \sqrt{26 + 20x}$$

$$a_1 \leq a_2 \dots \leq a_n$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$32a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + 14a_n$$

$$31a_1 = 13a_n$$

$$a_n : 31; a_1 : 13$$

$$a_n = 31$$

$$14 \cdot 31 =$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 31 \\ \hline 14 \\ 434 \end{array}$$

$$14 \cdot 62 > 477 - \text{key}$$

$$a_1 = 13$$

$$947$$

$$13 \cdot 32 = 390 + 26 = 416$$

$$26 \cdot 32 = 832 > 477 - \text{key}$$

$$13, \dots, 31$$

$$a_2 + \dots + a_{n-1} = 30$$

$$14 + 16$$

$$a_2 > 13$$

$30 > a_2 \geq 15$  - key, m.k. marga lima kelas  $\leq 15$  - key

$a_2 = 14$ ; marga  $a_2 = 16$ , m.k.  $a_3 > 15$

$a_3 = 15$  - key

$$13, 14, 16, 31;$$

$$13, 30, 31.$$

$$13 \cdot$$

$$416 + 61 = 477 - \text{key}$$



Числовые множества

$$\text{моща} \begin{cases} \text{В случае } y=1 \\ \text{А случае } y=-1 \end{cases} \begin{cases} a \in (-3; 2) \\ a \in (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-3; 1) \quad \text{B}$$

$$\begin{cases} \text{В случае } y=1 \\ \text{А случае } y=-1 \end{cases} \begin{cases} a \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty) \\ a \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (2; +\infty)$$

$$\text{моща} \begin{cases} a \in (-3; 1) \\ a \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$$

Ответ:  $a \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$

точка B:

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 20^2y + 12ay + a^4 + 36 = 0$$

$$a^2(x^2 - 8x + 16) - 16a^2 + y^2 \cdot a^2 + 2ay(6 - a^2) + a^4 - 12a^2 + 36 + 12a^2 = 0$$

$$a^2(x^2 - 8x + 16) + (ya + 6 - a^2)^2 = 4a^2 \quad (a^2)$$

$$(x^2 - 4)^2 + (y + \frac{6 - a^2}{a})^2 = 4$$

точка B  $(4; -\frac{6 - a^2}{a})$

точка A:

$$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$$

Пусть точка B лежит ниже прямой  $y=1$ , тогда:

$$-\frac{6 - a^2}{a} < 1$$

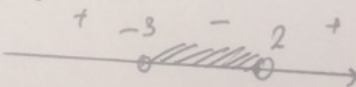
$$\frac{6 - a^2}{a} > 1$$

$a=0$  не подходит:  $36 \neq 0$

$$\frac{6 - a^2 - a}{a} > 0$$

$$a^2 + a - 6 < 0$$

$$(a+3)(a-2) < 0$$



$$a \in (-3; 2)$$

точка выше  
 $a \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$

$$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

~~$$(x+ay)^2 + x^2 - 6ax - 2ay + 5a^2 = 0$$~~

$$(x^2 - 6ax + 9a^2) + (y^2 + x^2 + 2xy - 2ay - 2ax + a^2) = 0$$

$$(x - 2a)^2 + (y - a)^2 = 0$$

$$\geq 0$$

$$\geq 0$$

$$\begin{cases} x - 2a = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2a \\ y = -a \end{cases}$$

число:  $a > 1$

Если A лежит выше прямой  $y=1$ , то  $-a > 1$   
 $a < -1$

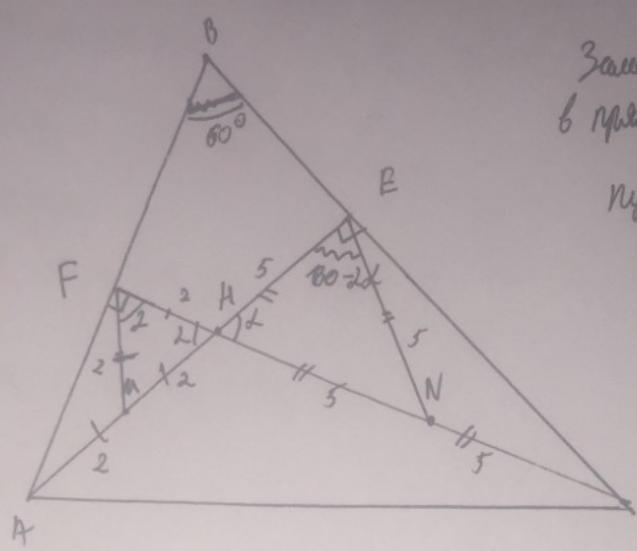




Условие  
N1.

(1)

Дано:  
CF и AE - высоты;  
M-ср. AH  
N-ср. CH.  
FM=2  
EN=5  
FM/EN  
∠ABC=?  
S<sub>ABC</sub>=?  
R=?.



Заметим, что FM, EN - медианы  
в прямоугол. Δ, тогда FM=AM=MN;  
EN=HN=NC;  
Пусть ∠FHA=α,  
тогда ∠ENC=∠FHA=α - вертикал.  
∠MFH=∠MNF - в равностор. Δ;  
тогда ∠FMH=∠MEN=180-2α  
как вертикал.  
делаются при N-на AC.  
FM и EN - медианы  
ME;

тогда в Δ HNE: ∠EHM=  
=∠HEN  
- равнобедр.;

и ∠=180-2α  
α=60°  
тогда ∠FHE=180-α=120°  
- как смежные

∠ABC=360-90-120-90°=  
=60° - 2 угла равны

тогда м.к. α=60° и AM=NE;  
FM=MN, то  
NC=HN=NE=HE=5  
FM=MN=FN=AM=2  
тогда BC =  $\frac{5+5+2}{\sin 60} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$   
 $= \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$

$$S_{ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{(2+2+5) \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} \text{ - эмс.}$$

∠AHC=180-60=120° - смежные.  
по теор. косинусов:

$$AC = \sqrt{4^2 + 10^2 - 2 \cdot \cos 120 \cdot 4 \cdot 10} =$$

$$= \sqrt{116 + 40} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$$

$$AB = \frac{2+2+5}{\sin 60} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}$$

$$8\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 48 \cdot 3 = 144$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$$\downarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S_{ABC}}$$

$$R = \frac{6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{39} \cdot 6\sqrt{3}}{4 \cdot 36 \cdot \sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$$

Ответ: ∠ABC=60°; S<sub>ABC</sub>=36√3; R=2√13

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005546**

ID профиля: **195145**

Вариант 13

№4.

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3 \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17 \end{cases}$$

Реш. замены:

$$\begin{cases} x^2y^2 = a \\ x^2y^2 = b \end{cases} \quad a, b \geq 0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ (a^2 - 2b) + \frac{2}{3}b = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2} \quad (1) \\ a^2 - \frac{4}{3}b = 17 \quad (2) \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 =$$

(1) (2):

$$a^2 - 2a + 2 = 17$$

$$a^2 - 2a - 15 = 0$$

$$(a-5)(a+3) = 0$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ a = -3 \end{cases}$$

не подходит, так как  $a \geq 0$

тогда

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2y^2 = 5 \quad (3) \\ y^2 = \frac{6}{x^2} \quad (4) \end{cases}$$

или:

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^2} = 0$$

$x \neq 0$  не подходит так как  $0 \neq 6$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 3 \\ x^2 = 3 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \\ x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ:  $\{(\sqrt{2}; \sqrt{3}); (-\sqrt{2}; \sqrt{3}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{3}); (\sqrt{2}; -\sqrt{3});$   
 $(\sqrt{3}; \sqrt{2}); (\sqrt{3}; -\sqrt{2}); (-\sqrt{3}; \sqrt{2}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{2})\}$



Реш.

~~Реш.~~  
 П. и. у функции характеровако есть 1 дуды, то скело а качкони,  
 дуды из пологи можно витькуть 12 способами

тогда во второй карте могут быть 11 дудр (все кране 1)

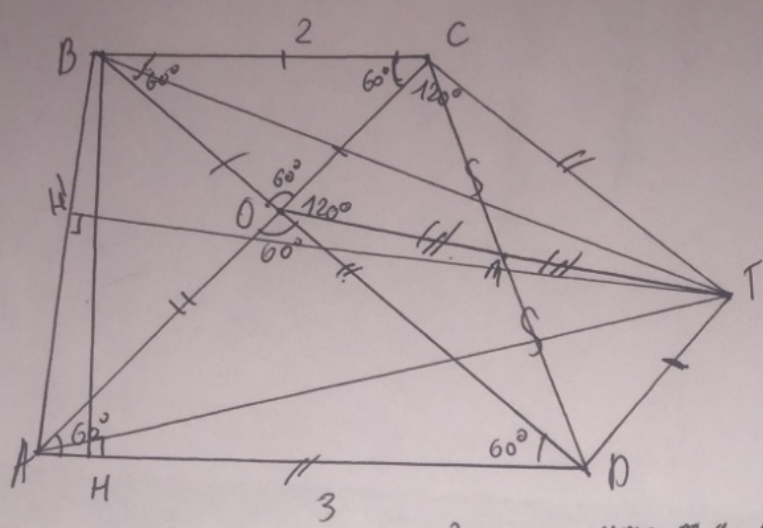
тогда из 11 число можно составить  $11 \cdot 11 = 121$  карту (т.к. сдвух

сторон по числу) тогда

по комбинаторкему правилу произведения:  
 всего способов вьтацуть 2 карты, сдвуходу условию

$$12 \cdot 11^2 = 12 \cdot 121 = 1452 \text{ (сп.)}$$

Ответ: Он может сделать это 1452 способами.



Заметим, что т.к.  $\angle CBD = \angle BDA$  — как накрест лежащие, при ~~прямых~~  $BC \parallel AD$  и секущей  $BD$ , то  $BC \parallel AD$  и  $ABCT$  — параллелограмм

$\angle BOA = \angle COD = 180 - 60 = 120^\circ$

$BC \parallel AD$  и  $ABCT$  — параллелограмм

Пусть  $M$  — середина  $CD$ , тогда т.к.  $O$  — центр тяжести  $\triangle BCD$ , то  $OM = MT$ ;  $CM = MD$ , но  $OC \parallel TD$  — параллельно сторонам  $BC$  и  $AD$ , тогда по теор. кос.:

$AB = \sqrt{OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cdot \cos \angle BOA}$

по теор. кос.  $OC = TD$ ;  $OT = OD$  и  $\angle OCT = \angle ODT$ ; тогда по теор. кос.:

$DC = \sqrt{OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos \angle COD}$

$CO = OB$ ;  $OA = OD$ ;  $\cos \angle BOA = \cos \angle COD$

$AB = DC$

$BT = \sqrt{BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos \angle BCT}$

$AT = \sqrt{AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot DT \cdot \cos \angle ADT}$

$BC = CT = OC$ ;  $AD = OD = DT$ ;  $\angle BCT = 60 + \angle OCT = 60 + \angle ODT = \angle ADT$

$OB = BC$ ;  $OA = CT$ ;  $\cos \angle BCT = \cos 120^\circ = \cos \angle ADT$ ;  $AB = BT = AT$  т.к.  $\angle BOA = \angle COD$  и  $OC \parallel TD$   $\angle OCT = \angle ODT$   $\angle BCT = \angle ADT$

$\triangle ABT$  — равносторонний;  $BC = 2$ ;  $AD = 3$ , тогда  $BO = 2$ ,  $AO = 3$  по теор. косинусов:

$AB = BT = AT = \sqrt{4 + 9 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{13 + 2 \cdot 3} = \sqrt{19}$

Тогда  $S_{ABT} = \frac{AB \cdot TH}{2} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{19 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$TH \perp AB$ ;  $BH \perp AD$ ;  $BH = BC \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{19\sqrt{3}}{4}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{19}{10}$

Ответ:  $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19}{10}$



Умножим

④

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3 \quad (17) \Rightarrow \frac{2}{3}x^2y^2 = 1 + x^2y^2 \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17 \quad (31) \end{cases}$$

$$51x^2 + 51y^2 - 34x^2y^2 = 3x^4 - 3y^4 - 2x^2y^2 = 0$$

$$51x^2 + 51y^2 - 34x^2y^2 - 3x^4 - 3y^4 = 0$$

$$12x^2 + 12y^2 - 12x^2y^2 - x^4 - y^4 = 0$$

$$-x^4 - y^4 - 2x^2y^2 + 17x^2 + 17y^2 - 10x^2y^2 = 0$$

$$x^4 + y^4 + 12x^2y^2 - 17x^2 - 17y^2 = 0$$

$$x^4 + y^4 +$$

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 - 1 = 17$$

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 = 18$$

$$x^4 + x^2 + \frac{1}{4} + y^4 + y^2 + \frac{1}{4} = 18,5$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 18,5$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 32 \\ \hline 259 \\ + 111 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ + 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$153 + 12$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ b^2 - 2a + \frac{2}{3}a = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 + \frac{2}{3}b \\ b^2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{9}b = 17 \end{cases}$$

$$9b^2 - 8b - 165 = 0$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 153 \\ \hline 1374 \\ + 165 \\ \hline 1485 \end{array}$$

$$1501$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 20 \\ \hline 240 \\ + 153 \\ \hline 393 \end{array}$$

$$17 = 0$$

$$(9) \quad 153$$

$$D = 64 + 165 \cdot 9 = 4 \cdot (16 + 165 \cdot 9)$$

$$9b^2 - 8b - 153 = 0$$

$$D = 400 + 153 \cdot 4 = 9$$



N5 Чепкобин

(5)

X 11

$$12 \cdot 12 - 12 = 12 \cdot 11$$

12.

C. 11

K. 11

$$12 \cdot 11^2$$

N4.

$$\begin{cases} x^2 y^2 = a & ab > 0 \\ a^2 y^2 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ a^2 - 2b + \frac{2}{3}b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2} \\ a^2 - \frac{4}{3}b = 17, \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2 \end{cases}$$

$$a^2 - 2a + 2 = 17$$

$$a^2 - 2a - 15 = 0$$

$$(a-5)(a+3) = 0$$

- ответ

$$a=5: \quad b = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$$

$$\begin{cases} x^2 y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = \frac{6}{x^2} \\ \frac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 2 & y^2 = 3 \\ x^2 = 3 & y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{2} \\ y = \pm \sqrt{3} \\ x = \pm \sqrt{3} \\ y = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$y = \pm \sqrt{3}$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$y = \pm \sqrt{2}$$

N6.

⑥

$$\frac{12 \cdot 11^2 + (12^2 - 2) \cdot 10}{2} = \frac{12 \cdot 121 + 10 \cdot 10}{2} = \frac{1442}{2} = 721$$

$$= 12 \cdot 11 \cdot 10 + 12 \cdot 11$$

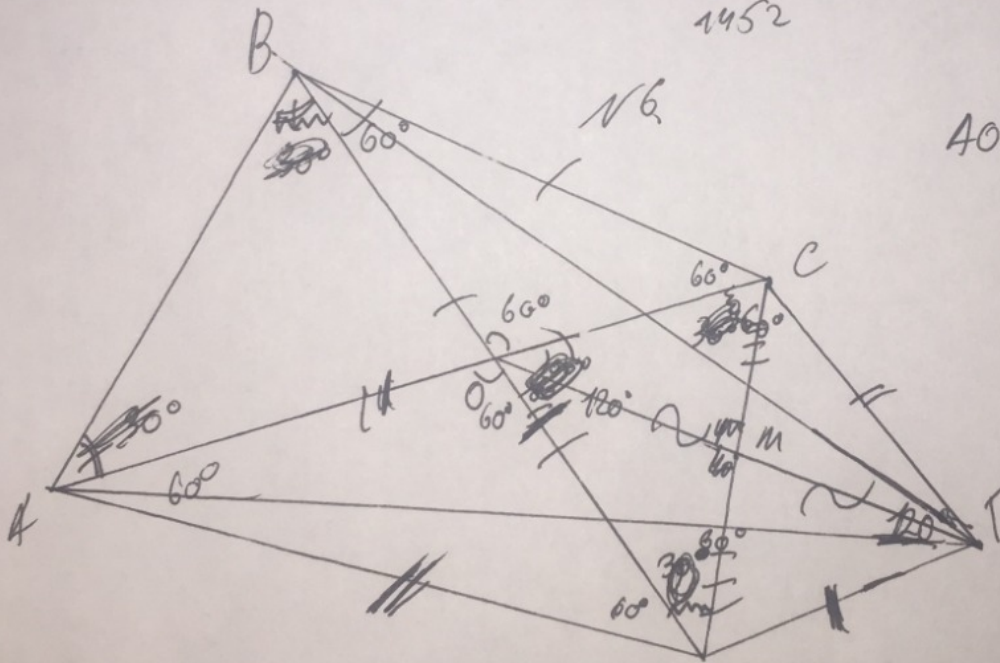
$$= 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 \cdot 10$$

$$6 \cdot 241 - 80 =$$

$$6 \cdot 241 - 10 = 1436$$

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 241 \\ + 6 \\ \hline 1446 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ + 12 \\ \hline 142 \\ + 121 \\ \hline 1452 \end{array}$$



$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ + 12 \\ \hline 142 \\ + 121 \\ \hline 1452 \end{array}$$