Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005449**

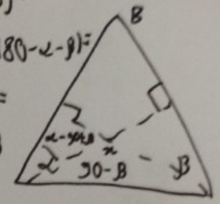
ID профиля: **383687**

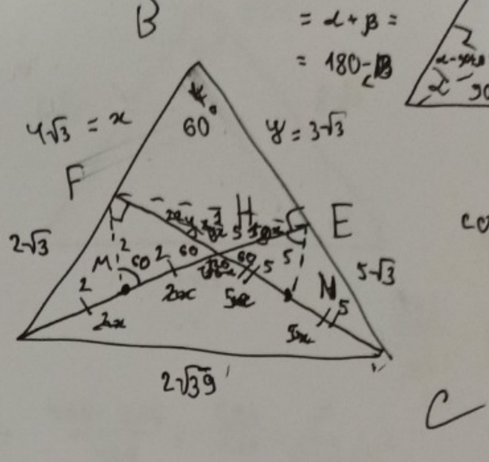
Вариант 13

Черновик

$90-(\alpha-90+\beta)=180-\alpha-\beta$

$x=180-(180-\alpha-\beta)=$
$=\alpha+\beta=$
$=180-\angle B$

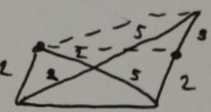




$\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$

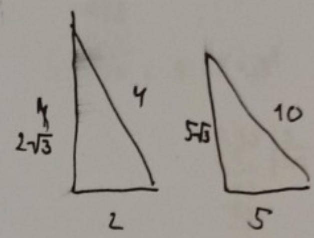
(1) $FM=2$
$EN=5$
$FM \parallel EN$
$\angle ABC-?$
$S-?$
$R-?$

$FM \parallel EN \Rightarrow$



$FHE \sim AHC$

$AC^2=16+100+2\cos\alpha\cdot 2\cdot 5=116+20\cos\alpha$



$\frac{2}{EH}=\frac{FH}{5}$ $FH=\frac{10}{EH}$ $MN=\frac{1}{2}AC$

~~$MN=\frac{1}{2}AC$~~ $\frac{2}{5}=\frac{2}{x} \Rightarrow x=5$

$\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
$\sqrt{100-25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

$\frac{2}{5}=\frac{y}{5} \Rightarrow y=2$

$\angle ABC=\cancel{120^\circ}\ 60^\circ=k$

~~$AC^2=16+100+10=126$~~

$MN^2=FE^2=4+25+10=39$

$FE=\sqrt{39}$

$AC=2\sqrt{39}$

$\frac{x}{y+5\sqrt{3}}=\frac{1}{2}=\frac{y}{x+2\sqrt{3}}$ $x+2\sqrt{3}=2y$

$2x=y+5\sqrt{3} \Rightarrow y=2x-5\sqrt{3}$

$x+2\sqrt{3}=4x-10\sqrt{3}$

$3x=12\sqrt{3} \Rightarrow x=4\sqrt{3}$

$y=2x-5\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

211005449 (U383687 M1278180)

Черновик

(1) $36\cdot3 = 64\cdot3 + 4\cdot39 - 2\cdot\cos\beta\cdot16\sqrt{3\cdot13} =$

$= 192 + 156 - 32\cdot3\sqrt{13}\,x = 108$

$96\sqrt{13}\,x = 240$

$x = \frac{240}{96\sqrt{13}} = \frac{15}{6\sqrt{13}} = \cos\beta$

$\sin^2\beta = 1 - \frac{15^2}{36\cdot13} = \frac{36\cdot13-225}{36\cdot13} = \frac{468-225}{468} = \frac{243}{468} = \frac{3^5}{3^2\cdot13\cdot2^2} =$

$= \frac{3^3}{2^2\cdot13}$

$\sin\beta = \frac{3\sqrt3}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \frac{h}{8\sqrt3}$

$h = \frac{\overset{12}{\cancel{24}}\cdot3}{\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{13}} = \frac{36}{\sqrt{13}}$

$S = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{36}{\sqrt{13}}\cdot\cancel{2}\sqrt{39} = \frac{36\cdot\sqrt3\cdot\cancel{\sqrt{13}}}{\cancel{\sqrt{13}}} = \boxed{108}$

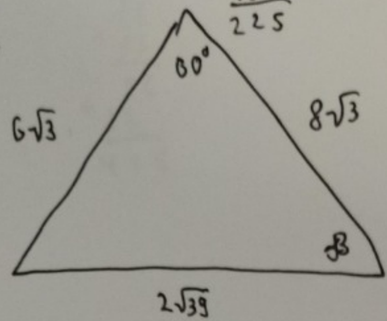
$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac14 = \frac34 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt3}{2}$

$2R = \frac{2\sqrt{39}}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{2\sqrt{39}\cdot2}{\sqrt3} =$

$= \cancel{\frac{4\cdot\sqrt3\sqrt{13}}{\sqrt3}} = \cancel{\frac{12\sqrt{13}}{\sqrt3}}$

$= \frac{4\cdot\cancel{\sqrt3}\cdot\sqrt{13}}{\cancel{\sqrt3}} = \boxed{4\sqrt{13}}$



15×15: $75 + 15 = 225$

$192 + 156 = 348$

$348 - 108 = 240$

$\frac{\overset{60}{\cancel{240}}}{\underset{24}{\cancel{96}}} = \frac{\overset{15}{\cancel{60}}}{\underset{6}{\cancel{24}}} = \frac{15}{6}$

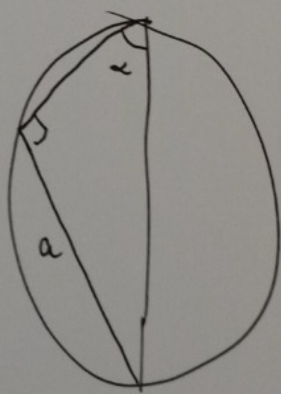
36×13: $108 + 36 = 468$

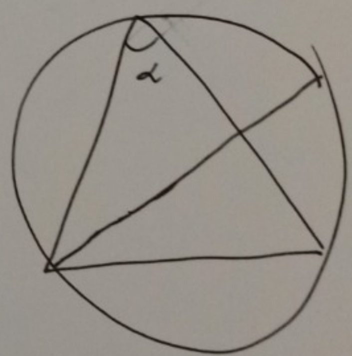
$468 - 225 = 243 = 9\cdot27 = 3^5$

$243 : 9 = 27$; $243 - 18 = 63$; $63 - 63 = 0$

$36\sqrt3$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$





Черновик

(2)

$a_1 + \dots + a_n = c$

$32a_1 + \dots + a_n = 477$

$a_1 + \dots + a_n \cdot 14 = 477$

$13a_n = 477 - c$; $31a_1 = 477 - c$

$13a_n = 31a_1$

$a_n = 31$

$a_1 = 13$

$416 + \dots + 31 = 477$

$\cancel{31} + \dots + 434 = 477$

13

$c = 30$

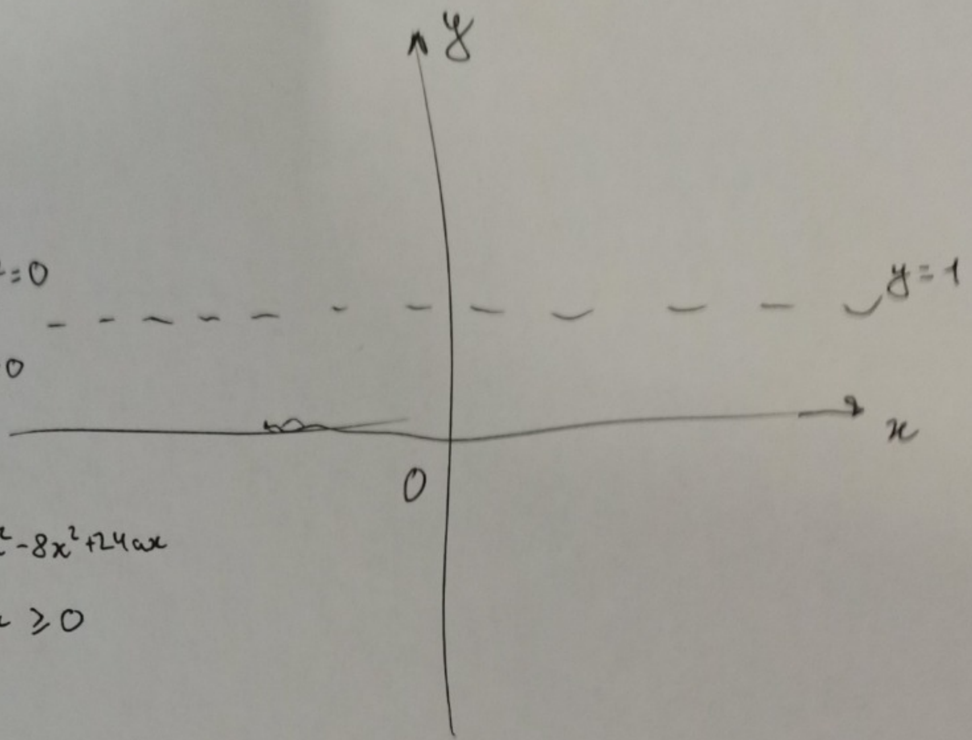
30 из [14; 30]

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 13 \\ \hline 96 \\ +\ 32 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times\ 14 \\ \hline 14 \\ +\ 42 \\ \hline 434 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 477 \\ -\ 31 \\ \hline 446 \\ -\ 416 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 477 \\ -\ 13 \\ \hline 464 \\ -\ 434 \\ \hline 30 \end{array}$$

Черновик

③

$\Delta(x;y)$



$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$y^2 + 2y(x-a) + 5a^2 + 2x^2 - 6ax = 0$

$y = \quad D = 4(x-a)^2 - 20a^2 -$

$- 8x^2 + 24ax =$

$= 4x^2 - 8ax + 4a^2 - 20a^2 - 8x^2 + 24ax$

$= -4x^2 - 16a^2 + 16ax \geq 0$

$16ax \geq 4x^2 + 16a^2$

$16a^2 - 16ax + 4x^2 \cancel{\geq} \leq 0$

$\cancel{4a^2 \; 4ax}$

$(4a - 2x)^2 \leq 0 \Rightarrow D = 0$ и $4a = 2x$

$x = 2a$

$D = 0$

$y = \dfrac{-2x + 2a}{2} = a - x = -a$

$y > 1$

$a^2x^2 + a^2 - 8a^2x - 2a^3 + 12a + a^4 + 36 = 0$

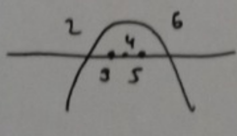
$a^2y^2 + 2y(6a - a^3) + a^4 + 36 + a^2x^2 - 8a^2x = 0$

$D = 4(6a - a^3)^2 - 4a^6 -$

$x^2 - 8x + 12 < 0$

$x = 2$

$x = 6$

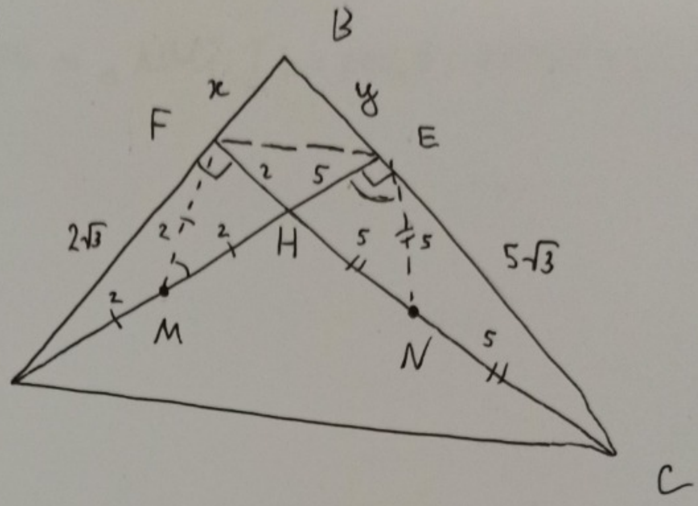


$36 \times 4 = 144$

16×4, 24, 4, 64

Чистовик №1

Задача 1



Дано: $\triangle ABC$

AE, CF – высоты

M, N – середины AH, CH соотв.

$FM = 2$; $EN = 5$

$FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}, R

Решение:

FM и EN – медианы в прямоуг. треуг.

$AM = MH = FM = 2$; $HN = CN = EN = 5$

$FM \parallel EN \Rightarrow \angle FMH = \angle HEN$ (как накр. леж.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle FMH \sim \triangle HEN$ (по 2 уг.). Из подобия:

$$\frac{FM}{EN} = \frac{2}{5} = \frac{FH}{HN} = \frac{FH}{5} = \frac{MH}{EH} = \frac{2}{EH}.$$

Отсюда: $FH = 2$, $EH = 5$

Тогда $\triangle FMH$ и $\triangle EHN$ – равностор. $\Rightarrow \angle FHM = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FHE = 120^\circ$ (как верт.)

Из четырёхуг. BFHE: $\angle B + 90^\circ + \angle FHE + 90^\circ = 360^\circ$

$\angle B = 180^\circ - \angle FHE = 60^\circ \Rightarrow \boxed{\angle ABC = 60^\circ}$

Из $\triangle AFH$ по т. Пифагора:

$AF^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow AF = 2\sqrt{3}$

Из $\triangle ECH$ по т. Пифагора:

$EC^2 = \cancel{25}\ 100 - 25 = 75 \Rightarrow EC = 5\sqrt{3}$

пусть $BF = x$, $BE = y$

Чистовик №2

По свойству высот $\triangle BFE \sim \triangle ABC$ $\left(k = \cos\angle B = \cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

Тогда:

$$\frac{x}{y+5\sqrt{3}} = \frac{y}{x+2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y + 5\sqrt{3} = 2x \\ 2y = x + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y = 2x - 5\sqrt{3}$$

$$2y = 4x - 10\sqrt{3} = x + 2\sqrt{3}$$

$$3x = 12\sqrt{3}$$

$$x = 4\sqrt{3}\ ; \quad y = 3\sqrt{3}$$

$$\angle AHC = \angle FHE = 120°$$

Найдём AC из $\triangle AHC$ по т. косинусов:

$$AC^2 = 16 + 100 - 2\cdot\cos(120°)\cdot 4\cdot 10 = 116 + 2\cos(60°)\cdot 40 =$$

$$= 116 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 40 = 156$$

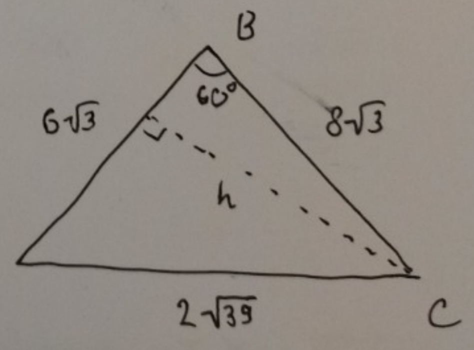
$$AC = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$$

Теперь мы знаем все стороны в треугольнике.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot AB$$

$$h = \sin\angle B\cdot 8\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot \overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{3} = 12$$

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \overset{6}{\cancel{12}}\cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}}$$



По т. синусов:

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{2\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{13}}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{R = 2\sqrt{13}}$$

Ответ: $\angle ABC = 60°$

$S_{ABC} = 36\sqrt{3}$

$R = 2\sqrt{13}$

211005449 (U383687 M1278180)

Чистовик № 3

Задача № 2

Пусть изначальный набор $a_1, a_2 \ldots a_n$ в сумме давал c.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = c \quad ; \quad a_1 < a_2 < \ldots < a_n \text{ (по усл.)}$$

Тогда:

$$32a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 477$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + 14a_n = 477$$

Заметим:

$$(477 - c) = 31a_1 = 13a_n$$

$\text{НОД}(31, 13) = 1 \Rightarrow$ мин. подходящие a_1 и a_n 13 и 31 соотв.

a_1 должно иметь вид $13x$

a_n должно иметь вид $31x$

Тогда единственный подходящий $x = 1$, т. к. при $x = 2$

$32 \cdot a_1 = 32 \cdot 26 > 477$ (такого не может быть, т. к. все числа натуральные)

То есть $a_1 = 13$, $a_n = 31$

Тогда остальные числа в сумме должны давать

$477 - 13 \cdot 32 - 31 = 30 \Leftrightarrow 477 - 13 - 14 \cdot 31 = 30$

Все числа попарно различны. Причем

Тогда подходящие нам наборы:

$\{13; 30; 31\}$

$\{13; 14; 16; 31\}$

Других наборов не существует, т. к. нам нужно подобрать числа в диапазоне $[14; 30]$ так, чтобы они были различны и в сумме давали 30.

Для этого подойдут только:

$30 = 30$

$14 + 16 = 30$

Ответ: $\{13; 30; 31\}$

$\{13; 14; 16; 31\}$.

Чистовик №4

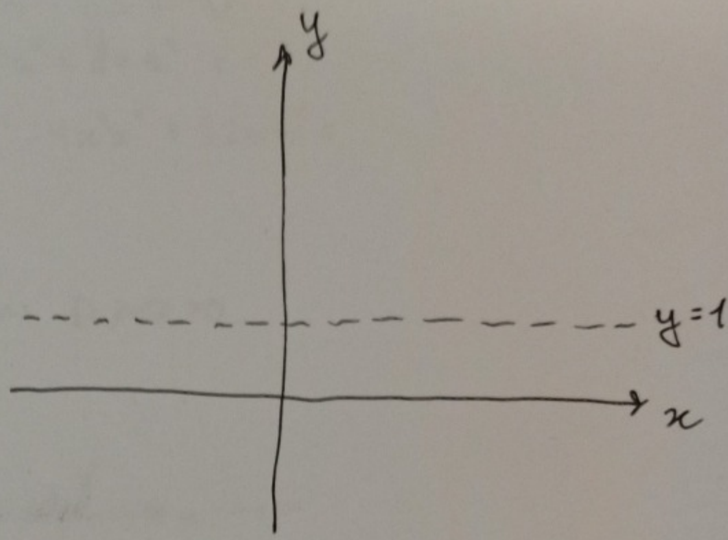
Задача №3

точка $A(x;y)$

$$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$$

точка B – центр окр.

$$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$$



Выразим y точки A через x и a

$$y^2+2y(x-a)+2x^2+5a^2-6ax=0$$

$$D=4(x-a)^2-8x^2-20a^2+24ax=$$

$$=4x^2-8ax+4a^2-8x^2-20a^2+24ax=-4x^2-16a^2+16ax$$

Точка A существует $\Rightarrow D\geq 0$

$$-4x^2-16a^2+16ax\geq 0$$

$$16a^2-16ax+4x^2\leq 0$$

$(4a-2x)^2\leq 0$. Квадрат числа всегда ≥ 0

Тогда $(4a-2x)^2=0 \Rightarrow 2x=4a;\ x=2a$

$$D=-4x^2-16a^2+16ax=-1\cdot(4a-2x)^2=0$$

Тогда для точки A:

$$y=\frac{-2(x-a)+0}{2}=a-x=a-2a=-a$$

$\boxed{y=-a}$

Тогда $a\neq -1$ (точка A не лежит на $y=1$ по условию)

при ~~a≠~~ $a>-1$

координата y точки B должна ~~дт~~ быть <1

при $a<-1$

координата y точки B должна быть >1

(т.к. по условию A и B лежат по разные стороны от $y=1$)

Чистовик №5

Выразим y окружности через x и a:

$$a^2y^2+2y(6a-a^3)+a^4+36+a^2x^2-8a^2x=0$$

$$D=4(6a-a^3)^2-4a^6-144a^2-4x^2a^4+\overset{32}{\cancel{8}}xa^4=$$

$$=\cancel{144}a^2-48a^4+\cancel{4a^6}-\cancel{4a^6}-\cancel{144}a^2-4x^2a^4+32xa^4=$$

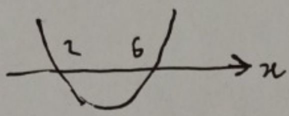
$$=a^4(32x-4x^2-48)$$

т.к. окружность существует: $D \cancel{\geq 0} > 0$

$a^4 \geq 0$ всегда

тогда $32x-4x^2-48>0$

$4x^2-32x+48<0$



~~$x\in(-\infty;2)\cup(6;\infty)$~~

$x\in(2;6)$

Тогда у B (центр окр.) $x=4$

$$a^2y^2+2y(6a-a^3)+a^4+36+a^2\cdot 16-8a^2\cdot 4=0$$

$$D=a^4(32x-4x^2-48)=a^4(128-48-64)=16a^4$$

$$y_{1,2}=\frac{-2(6a-a^3)\pm 4a^2}{2a^2}=\frac{2a^3-12a\pm 4a^2}{2a^2}$$

тогда y у y^B будет $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a^3-12a}{2a^2}=a-\frac{6}{a}$

~~при~~ $a-\frac{6}{a}<1 \quad |\cdot a$

$a^2-a-6<0$

$a\in(-2;3)$

но $a>-1$

Тогда

$a\in(-1;3)$

$a-\frac{6}{a}>1$

$a^2-a-6>0$

$a\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$

на $a<-1$

Тогда $a\in(-\infty;-1)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005449**

ID профиля: **383687**

Вариант 13

Черновик

(4)
$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$u \neq \frac{3}{2}$

204 $\quad$ $204 - 24 = 180$

$51 \times 9 = 459$; $459 - 27 = 432$; $51 \times 12 = 612$; $612 - 36 = 576$

I $\quad v=x^2;\ u=y^2$

$3v+3u-2vu=3$

$v(3-2u)=3-3u$

$v=\dfrac{3-3u}{3-2u}$

II $\quad v^2+u^2+\frac{2}{3}vu=17$

$$\frac{(3-3u)^2}{(3-2u)^2}+u^2+\frac{2u(3-3u)}{3(3-2u)}=17$$

$$\frac{9-18u+9u^2}{\cancel{9-12u+4u^2}\ (3-2u)^2}+u^2+\frac{6u-6u^2}{3(3-2u)}=17$$

$27-54u+27u^2+3(9-12u+9u^2)u^2+(6u-6u^2)(3-2u)-51(3-2u)^2=0$

$27-54u+27u^2+27u^2-36u^3+27u^4+18u-12u^2-18u^2+12u^3-51(3-2u)^2=0$

$24u^4-24u^3+24u^2-36u+27-51\cdot 9+51\cdot 12u-51\cdot 4u^2=0$

$24u^4-24u^3-180u^2+576u-432=0$

$3x^4+3y^4+2x^2y^2=51$

$54 : 3 = 18$

$3x^4+3y^4+3x^2+3y^2=54$

$x^4+y^4+x^2+y^2=18$

$18 \times 4 = 72$

$v^2+u^2+v+u=18$ $\quad$ (a+u)

~~$D=1-4u^2-4u+72$~~

~~$(v+u)+(v+u)^2-2vu=18$~~

$v^2+v+u^2+u-18=0$

~~$D=1-4u^2-4u+72$~~

$x^2(3-2y^2)+y^2(3-2x^2)=3$

$2x^2y^2=51-3x^4-3y^4=3x^2+3y^2-3$

$17-x^4-y^4=x^2+y^2-1$

$(x^2-y^2)(x^2+y^2)=x^2+y^2-18$

~~$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=x^2+y^2$~~

$v=x+y$

$u=xy$

~~$v^2-2u-18=(x-y)v(v^2-2u)$~~

Черновик

$3x^4+3y^4+2x^2y^2=51$

$3x^2+3y^2-2x^2y^2=3$

$V=x^2+y^2 \quad u=x^2y^2$

$3v-2u=3 \quad => \quad u=\frac{3v-3}{2}$

$3(v^2-2u)+2u=51$

$3v^2-6u+2u=51$

$3v^2-4u=51$

$3v^2-2(3v-3)=51$

$3v^2$

$$\begin{array}{r} 143 \\ -\ 22 \\ \hline 121 \\ \times\ 12 \\ \hline 242 \\ +\ 121 \\ \hline 1452 \end{array}$$

$\{1;2;3\}$

с 2

~~13~~

~~31~~

12

21

23

32

22

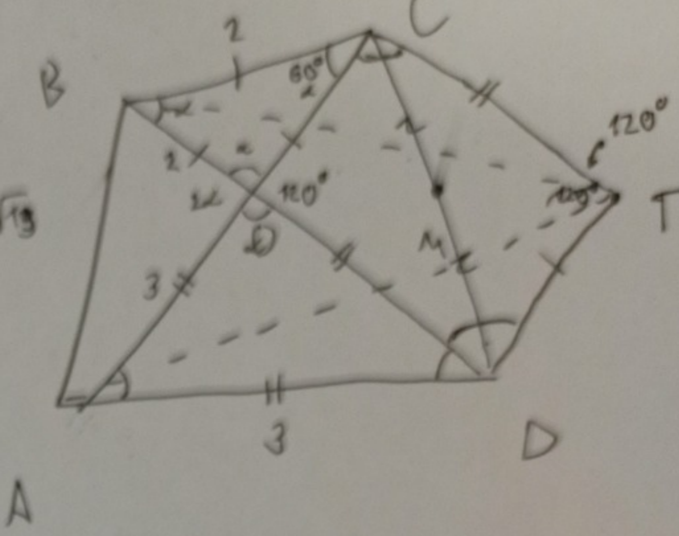
$\}5$

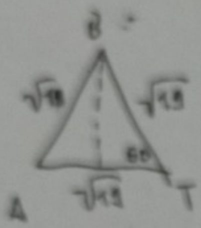
Черновик

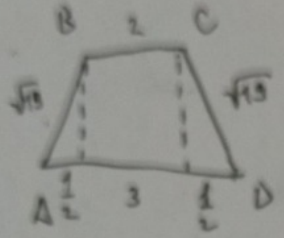
8

$AB^2 = 4+9+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 =$

$= 19 \quad AB = CD = AT = BT = \sqrt{19}$







$h^2 = 19 - \frac{1}{4} = \cancel{19\frac{3}{4}} \quad \frac{75}{4} = \frac{25\cdot 3}{4}$

$\times\frac{19}{4}$

$\frac{4}{76}$

$h = \frac{5\sqrt{3}}{2} \qquad S_{ABCD} = \frac{(2+3)}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$\cancel{S_{ABT}}\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{19} = \frac{\sqrt{19}\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{19}\cdot\frac{\sqrt{19}\sqrt{3}}{2} = \frac{19\sqrt{3}}{4} \qquad \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19\sqrt{3}}{4} : \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{19}{25}$

Чистовик №1 ([illegible])

Задача №4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 & (\text{I}) \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 & (\text{II}) \end{cases}$$

Преобразуем уравнение II.

$$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \quad \Big| \cdot 3$$

$$3(x^4+y^4)+2x^2y^2=51$$

$$3(x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2)+2x^2y^2=51$$

$$3((x^2+y^2)^2-2x^2y^2)+2x^2y^2=51$$

Теперь пусть $a=x^2+y^2$

$b=x^2y^2$

Тогда имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3a-2b=3 \\ 3(a^2-2b)+2b=51 \end{cases}$$

Из первого уравнения: $b=\frac{3a-3}{2}$

Подставим это во второе уравнение:

$$3(a^2-2b)+2b=51$$

$$3a^2-6b+2b=51$$

$$3a^2-4b=51$$

$$3a^2-2(3a-3)=51$$

$$3a^2-6a+6=51 \quad \Big| \cdot \frac{1}{3}$$

$$a^2-2a+2=17$$

$$a^2-2a-15=0$$

$\left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=5 \end{array}\right.$ (не подходит, т.к. a - сумма 2ух квадратов, т.е. $a \geq 0$)

Чистовик №2 (часть 2)

~~Задача №4~~

Таким образом, $a = 5$

Тогда $b = \frac{3a-3}{2} = \frac{15-3}{2} = 6$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 6 \end{cases}$$

из первого уравнения $y^2 = 5 - x^2$

подставим это во второе:

$$x^2 y^2 = 6$$

$$x^2(5 - x^2) = 6$$

$$-x^4 + 5x^2 = 6$$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 2 \ ; \ y^2 = 3 \\ x^2 = 3 \ ; \ y^2 = 2 \end{array}\right.$$

~~Ответ:~~

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Чистовик №3

Задача №5

Пусть фокусник вытянул карточки A и B

Для удобства будем считать, что A – „дубль", т.к. по условию хотя бы одна карточка должна быть дублем,

Тогда для карточки A у фокусника есть 12 вариантов ($\{1;1\}$, $\{2;2\}$, ... $\{12;12\}$).

Рассмотрим следующую ситуацию: фокусник вытянул какую то карточку A. Теперь ему надо вытянуть карточку B. Сколько у него способов вытянуть B, соответствуя условию задачи?

По условию никакое число не должно встречаться на обеих карточках. Заметим, что A – „дубль". Значит карточка A имеет вид $\{x;x\}$, где $x \in [1;12]$. Тогда на карточке B не должно быть числа x. То есть для карточки B подойдёт любая карточка без x.

На текущий момент в ~~колоде~~ наборе 12^2-1 карта (т.к. A мы уже выбрали). Сколько из них содержат x?

Это карточки вида $\{x, y\}$ и $\{y;x\}$, где $y \in [1;12]$

Тогда таких карточек $12+12-1$. (Вычитаем 1, т.к. карточку вида $\{x;x\}$ мы посчитали 2 раза)

Также заметим, что карточку $\{x;x\}$ мы уже вытянули (карточка A), значит $\{x;x\}$ учитывать вообще не надо $(y \neq x)$

Тогда таких карточек $11+11=22$. Значит для карточки B подойдет 12^2-1-22 карточки.

$12^2-1-22 = 121$

Таким образом, для A у нас 12 способов, а для B 121 способ (независимо от A).

Тогда всего способов $12 \cdot 121 = 1452$

Ответ: 1452 способа

Чистовик №4 ([illegible])

Задача №6

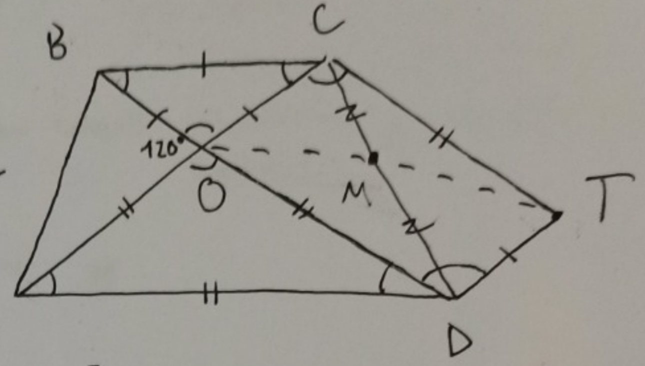
Дано:

четырёхуг. ABCD

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные

т. T симметрична т. O относительно т. M

M - серед. CD



а) Док-ть: $\triangle ABT$ - правильный

б) Найти: $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$, если $BC = 2$, $AD = 3$

Решение:

а) $\triangle BOC$ - правильный $\Rightarrow BO = BC = OC$

$\angle CBO = \angle BOC = \angle BCO = 60^\circ$

$\triangle AOD$ - правильный $\Rightarrow AO = OD = AD$

$\angle OAD = \angle AOD = \angle ODA = 60^\circ$

$\angle AOB = \angle COD$ (как верт.) $= \dfrac{360^\circ - 2 \cdot 60^\circ}{2} = 120^\circ$

т. T симм. т. O относительно т. M $\Rightarrow OM = MT$

M - серед. CD $\Rightarrow CM = MD$

CTDO - параллелограм (диагонали делятся пополам точкой пересечения)

Тогда $CT = OD$

$TD = CO$,

$\angle TCO = \angle ODT = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ$ (свой-во паралл.)

Рассмотрим $\triangle BCT$, $\triangle AOB$ и $\triangle ADT$

Чистовик №5

$$\left.\begin{array}{l} BC = BO = TD \\ TC = AO = AD \\ \angle BOA = \angle BCT = \angle ADT = 120^\circ \end{array}\right\} \triangle BCT = \triangle ADT = \triangle AOB$$

(по первому признаку
2 стороны и угол между ними)

Тогда $AB = BT = AT$ (как соотв. элементы у равных треугольников)

$\Downarrow$

$\triangle ABT$ – правильный ■

б) $BC = 2$, $AD = 3$

$\angle CBO = \angle ODA = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ – трапеция

$$\left.\begin{array}{l} \angle BOA = \angle COD \text{ (как верт.)} \\ BO = CO \\ AO = OD \end{array}\right\} \triangle ABO = \triangle COD \text{ (по 1ому признаку)}$$

$\Downarrow$

$AB = CD$

Таким образом, $ABCD$ – равнобокая трапеция.

В $\triangle ABO$: $BO = BC = 2$
$AO = AD = 3$

Тогда по т. косинусов в $\triangle ABO$:

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cos(120^\circ) \cdot BO \cdot AO$

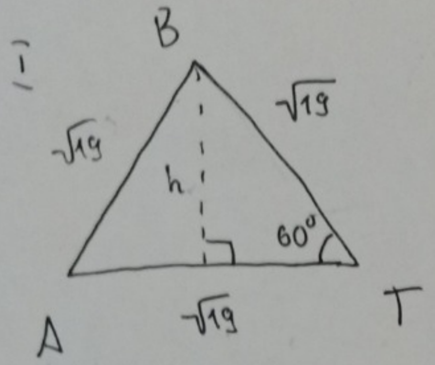
$AB^2 = 4 + 9 + 2\cos(60^\circ) \cdot 2 \cdot 3 = 13 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 19$

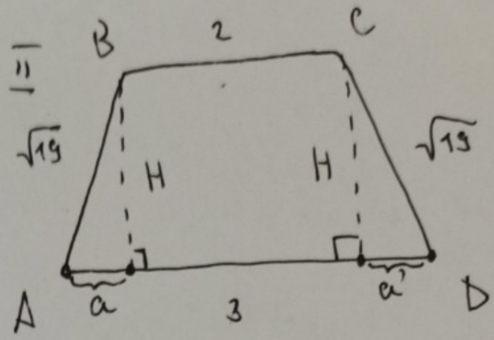
$AB = \sqrt{19} = CD = BT = AT$.

Теперь у нас есть правильный треугольник ABT со сторонами $\sqrt{19}$ и равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями $2;3$ и боковыми сторонами $\sqrt{19}$. Найдём их площади.

211005449 (U383687 M1278181)

Чистовик №6





I $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(60^\circ) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$h = \sin(60^\circ) \cdot \sqrt{19} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{2}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} h \cdot \sqrt{19} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{2} \cdot \sqrt{19} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$

II опустим высоты.

Трапеция равнобокая $\Rightarrow a = a' = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

по т. Пифагора;

$H^2 = 19 - \frac{1}{4} = \frac{76-1}{4} = \frac{25 \cdot 3}{4} \Rightarrow H = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = H \cdot \frac{2+3}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19\sqrt{3}}{4} : \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{19}{25}$

Ответ: $\frac{19}{25}$.

211005449 (U383687 M1278181)