Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

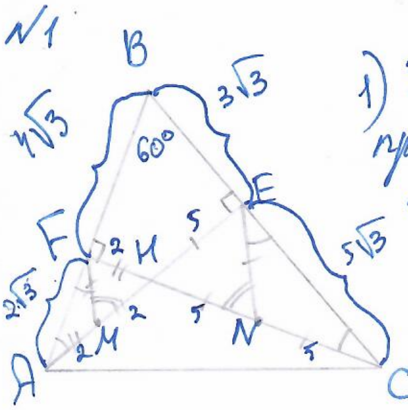
Шифр: **211005384**

ID профиля: **280603**

Вариант 13

Чистовик

№1



1) Заметим, что $AM=FM=MH$ и $EN=HN=CN$, т.к. в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе равна ~~на~~ её половине.

2) $\angle BAE = 90° - \angle ABC$, т.к. сумма углов при гипотенузе AB в $\triangle ABE$ равна $90°$;

$\angle FCB = 90° - \angle ABC$ аналогично. $\Rightarrow \angle BAE = \angle FCB = \alpha$ (обозначим так)

3) $\angle AFM = \angle NEC = \alpha$, т.к. углы при основании равны.

$\Rightarrow \angle FMH = \angle HNE$. Но также $\angle FMH = \angle HEN$, т.к. $FM \parallel EN$.

$\Rightarrow HE = HN$, $\triangle HEN$ равносторонний.

4) $\Rightarrow \angle EHN = 60°$, $\angle HCE = 30° \Rightarrow \angle ABC = 60°$

5) $AF = \sqrt{3}\cdot \overset{2\sqrt{3}}{FH}$ (у $\triangle AFH$ тоже углы $60°$ и $30°$ при гипотенузе);

$CF = 2+5+5 = 12$, $BF = \frac{CF}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}CF}{3} = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$, $S_{ABC} = \frac{CF\cdot AB}{2} = \frac{12\cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$

6) $BC = BE + EC$, $BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = \frac{2+2+5}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$, $EC = \sqrt{3}\cdot HE = 5\sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$;

7) По теореме косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC = AB^2 + BC^2 - AB\cdot BC =$

$= 108 + 192 - 144 = 156 \Rightarrow AC = 2\sqrt{39}$.

8) По теореме синусов: $\frac{AC}{\sin 60°} = d$ (диаметр описанной окр.), $d = \frac{2\sqrt{39}}{\sqrt{3}\cdot 0{,}5} = 4\sqrt{13} \Rightarrow r = 2\sqrt{13}$ (радиус)

Ответ: $60°$; $36\sqrt{3}$, $2\sqrt{13}$.

Чистовик

№2

1) Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — наши нат. числа, тогда:

$32a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 477;$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + 14a_n = 477;$

$\Rightarrow 32a_1 + \cancel{a_2 + a_3 +} \dots + a_n = a_1 + \cancel{a_2 + a_3 +} \dots + 14a_n, \quad 31a_1 = 13a_n.$

31 и 13 взаимно просты $\Rightarrow a_1 \vdots 13$, а $a_n \vdots 31$.

2) Минимальное значение a_1 — 13, т.к. числа натуральные.
Тогда $a_n = 31$; $32 \cdot 13 + 31 = 447 \Rightarrow$ было выписано 2 числа: 13 и 31, если минимальное из $a_1, a_2, \dots a_n$ равно 13, а максимальное — 31.

3) Дальше идёт вариант с 26 (от 13 до 26 не вкл. нет подходящих), но тогда $32 \cdot 26 > 447$.

4) $a_1 = k \cdot 13$, $a_n = 31k$, при $k = 1$ сумма $32a_1$ и a_n равна 447, при больших k она соответственно больше в k раз. $\Rightarrow$ единственный вариант — пара чисел 13 и 31.

Ответ: 13, 31.

Чистовик

№3

1) $\exists$ окружность $a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$.

$a=0$ не подходит, $36\neq 0$. $\Rightarrow$ можно поделить уравнение на a^2:

$$x^2+y^2-8x-2ay+\frac{12}{a}y+a^2+\frac{36}{a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-8x+16)+\left(y^2-2\cdot y\cdot\left(a-\frac{6}{a}\right)+a^2-12+\frac{36}{a^2}\right)-16+12=0$$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+\left(y-\left(a-\frac{6}{a}\right)\right)^2=4 \leftarrow$ окружность с радиусом 2 и координатой вершины $\left(4;\,a-\frac{6}{a}\right)$. ~~точка B справа $y=1$~~ $\leftarrow$ точка B

2) Запишем уравнение точки, как уравнение параболы $x=y^2$:

$$y^2+(2x-2a)y+(5a^2-6ax+2x^2)=0$$

$$D=4x^2-8ax+4a^2-20a^2+24ax-8x^2=-4x^2+16ax-16a^2=-4(x^2-4ax+4a^2)=-4(x-2a)^2$$

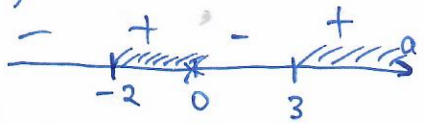
Дискриминант D должен быть равен 0, чтобы уравнение имело одно решение (A соответствует точке). Тогда $x=2a$ (если $D=0$),

а $y=\frac{-(2x-2a)}{2}=-x+a=-a$. Проверка: $5a^2-12a^2+2a^2+8a^2-4a^2+a^2=0$, всё хорошо.

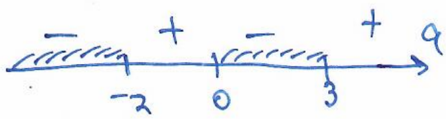
3) Нужно решить следующую систему:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\underbrace{-a}_{\text{ордината A}}<1\\ a-\frac{6}{a}>1\end{cases}\\ \begin{cases}\underbrace{a-\frac{6}{a}}_{\text{орд. B}}<1\\ -a>1\end{cases}\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-1;+\infty)\\ \frac{a^2-a-6}{a}>0\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{a^2-a-6}{a}<0\\ a\in(-\infty;-1)\end{cases}\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-1;+\infty)\\ \frac{(a-3)(a+2)}{a}>0 \quad (1)\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{(a-3)(a+2)}{a}<0 \quad (2)\\ a\in(-\infty;-1)\end{cases}\end{array}\right.$$

(1):



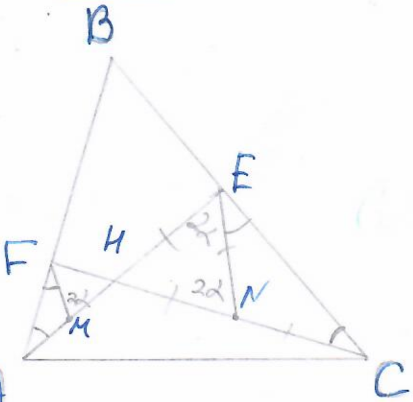
(2):

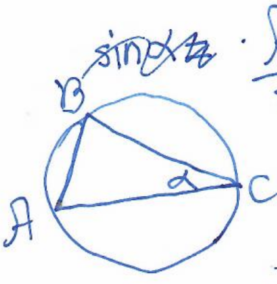


$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-1;+\infty)\\ a\in(-2;0)\cup(3;+\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-\infty;-1)\\ a\in(-\infty;-2)\cup(0;3)\end{cases}\end{array}\right.
\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\in(-1;0)\cup(3;+\infty)\\ a\in(-\infty;-2)\end{array}\right.
\Leftrightarrow a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(3;+\infty).$$

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(3;+\infty)$.

Черновик





$\frac{AB}{\sin\alpha} = d$

$\frac{AB}{AC} = \sin\alpha$

$4x^2 - 8ax + 4a^2 -$

$2a4 - a$

$5a^2 - 6\cdot a\cdot 2a + 2\cdot a\cdot a +$

$+ 2\cdot 4a^2 - 2\cdot 2a\cdot a + a^2 =$

$= 5a^2 - 12a^2 + 2a^2 + 8a^2 -$

$-2a^2 + a^2 = -14a^2 + 16a^2$

$5a^2 - 6\cdot a\cdot 2a + 2a^2 + 8a^2 - 2\cdot 2a + 4a^2 =$

$= -16a^2 + 16a^2$

$36\cdot 3 = 90 + 18$

$64\cdot 3 = 180 + 12$

$48\cdot 3 = 120 + 24$

$300 - 144$

$$\begin{array}{r} 300 \\ -144 \\ \hline 156 \end{array}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$32a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 477$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + 14a_n = 477$

$+a_n = a_1 + 14a_n$

$32a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$31a_1 = 13a_n$

$\cancel{32\cdot 13 =}$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 26 \\ \hline 192 \\ 64 \\ \hline 832 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 2 \\ \hline 416 \end{array}$$

447

$64\cdot 3 + 36\cdot 3$

$300 - 48\cdot 3 =$

$416 + \dots + 31 = = 156$

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{156}{156} \Big| \frac{39}{4}$

$2\cdot 2a - 2a = 2a$

$\frac{a^2-6}{a} - 1 > 0$

$\frac{a^2-a-6}{a} > 0$

$\frac{a^2-6}{a} > 1$

$x^2 - 8x + y^2 - 2ay + \frac{12}{a}y + a^2 + \frac{36}{a^2} = 0$

$y^2 - 6ay + 9a^2$

$2x^2 + 2\sqrt{2}x(y-3a) + (y-3a)^2$

$(\sqrt{2}x)^2 + 2\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{y-3a}{\sqrt{2}} + \left(\frac{y-3a}{\sqrt{2}}\right)^2$

$y^2 + 2\cdot$

$a > 1$

$\frac{a^2-6}{a} > 1$

$(\sqrt{2}x + y + b)^2$

$(\sqrt{2}x + y + b)(\sqrt{2}x + y + b) =$

$= 2x^2 + \sqrt{2}xy + \sqrt{2}xy + \sqrt{2}bx + \sqrt{2}bx +$

$+ y^2 + by + \sqrt{2}bx + by + b^2$

$2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 + 2by + 2\sqrt{2}bx + b^2$

$2x^2 + 2\sqrt{2}xk_1 + k_1^2$

$+ y^2 + 2yk_2 + k_2^2$

$2\sqrt{2}xk_1 + k_1^2 + y^2 + 2yk_2 + k_2^2$

$32\cdot 13 = 416 + 31$

$\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$9\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0,$

$x^2 + y^2 - 8x - 2ay + \frac{12y}{a} + a^2 + \frac{36}{a^2} = 0$

$(x^2 - 8x + 16) + \left(y^2 - 2\cdot\left(a + \frac{6}{a}\right)\cdot y + a^2 + 12 + \frac{36}{a^2}\right) - 12 = 0$

$(x-4)^2 + \left(y - \left(a + \frac{6}{a}\right)\right)^2 = 12$

1 из 1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005384**

ID профиля: **280603**

Вариант 13

Чистовик

№4

a и $b \geq 0$

1) Пусть $x^2+y^2=a$, а $x^2y^2=b$, тогда:

$3x^2+3y^2-2x^2y^2=\underline{3a-2b=3}$, $x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=a^2-\frac{4}{3}b=17.$

Получается такая система:

$$\begin{cases} 3a-2b=3 \\ a^2-\frac{4}{3}b=17 \end{cases} \quad a=\frac{3+2b}{3}$$

$\Rightarrow \frac{9+12b+4b^2}{9}-\frac{4}{3}b=17$, $9+4b^2=9\cdot17=153$, $4b^2=144.$

$\Leftrightarrow b=\pm6$:

если $b=6$, то $a=5$, положительно, эта пара подходит,

а если $b=-6$, то $a=-3$, не подходит, ~~есть~~ подходит лишь одна пара в решении системы с a и b: $(5,6)$.

2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases}$ x^2 и y^2 — корни уравнения $t^2-5t+6=0$.

$t_1=2$, $t_2=3$.

$\Rightarrow$ либо $x^2=2$, либо $y^2=3$.

Решения системы: $(\sqrt{2};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2};\sqrt{3})$, $(\sqrt{2};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{2})$.

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2};\sqrt{3})$, $(\sqrt{2};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{2})$.

Чистовик

№5

Всего 12 дублей в наборе. Назовём „первой" карточку-дубль, а „второй" — другую карточку (возможно тоже дубль), а дублированное число — a.

~~В наборе~~ В наборе есть $\underbrace{11}_{\text{только на красной стороне } a}+\underbrace{11}_{\text{только на синей стороне } a}+\underbrace{1}_{\text{на обеих}}=23$ карточек, на сторонах которых есть a, одинаковых карточек нет, $\Rightarrow$ карточка b может быть одной из $144-23=121$ оставшихся возможных.

$\Rightarrow 12 \cdot 121 = 1452$ способа есть у фокусника.

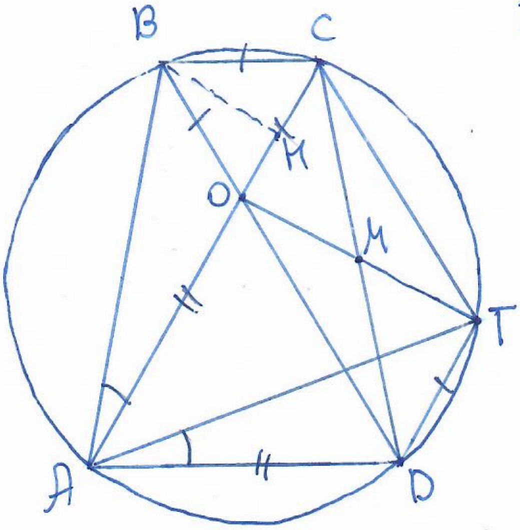
Ответ: 1452.

Чистовик

№6.

а) 1) Очевидно, что $ABCD$ — трапеция, т.к. $\angle ACB = \angle CAD$ (накрест лежащие), причём равнобедренная, т.к. $\triangle AOB = \triangle COD$ по двум сторонам и углу между ними. $\Rightarrow$ она вписанная.

2) $OCTD$ — параллелограмм, т.к. его диагонали делятся ~~в~~ точкой пересечения M (середина CD) пополам. $\angle DOC = 120^\circ$ $(180^\circ - \angle BOC)$ $\Rightarrow \angle CTD = 120^\circ$, $\angle CTD + \angle DBC = 180^\circ \Rightarrow BCTD$ — вписанная трапеция ($CT \parallel BD$), точки A, B, C, T и D лежат на одной окружности:



3) $DT = BC$, т.к. вписанная трапеция равнобедренная, $\angle BDT = 60^\circ$, т.к. углы при основании равны. $\Rightarrow \angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

4) $\angle BOA = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$ $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle ADT$ по двум сторонам и углу между ними: $AD = OA$ по усл., $DT = OB$, т.к. $OB = BC$ и $\angle AOB = \angle ADT = 120^\circ$. $\Rightarrow \angle TAD = \angle BAC$ и $AT = AB$.

5) $\angle BAT = \angle OAT + \angle BAO = \angle OAT + \angle TAD = \angle OAD = 60^\circ$. $\Rightarrow \triangle ABT$ равнобедренный и с углом 60° в вершине. $\Rightarrow$ углы при основании тоже по 60°, $\triangle ABT$ равносторонний. ч.т.д.

б) 1) По теореме косинусов $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = AD^2 + BC^2 + AD \cdot BC = 4 + 9 + 6 = 19$. $\Rightarrow AB = \sqrt{19}$.

2) $S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$ по формуле площади равностороннего.

3) Опустим перпендикуляр BH к AC: $BH = \sqrt{3}$, $\Rightarrow S_{AOB} = \frac{\sqrt{3} \cdot AO}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
$S_{OCD} = S_{AOB} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $S_{BOC} = \sqrt{3}$ по формуле пл. равностор., $S_{AOD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.
$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{OCD} + S_{AOD} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

4) $\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19}{25}$.

Ответ: $\frac{19}{25}$.

Черновик

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$3t+3d-2td=3$

$t^2+d^2+\frac{2}{3}td=17$

$t(t+1)+d(d+1)=18$

$t^2+t+d^2+d-11=0$

$D=1-4d^2-4d+44=-4d^2-4d+45$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$3a-2b=3$

$3x^2+3y^2+3x^4+3y^4=3+3\cdot17$

$3x^2(x^2+1)+3y^2(y^2+1)=3\cdot18$

$x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)=18$

$y^4+\frac{2}{3}x^2y^2+(x^4-17)=0$

$D=\frac{4}{9}x^4-4x^4+4\cdot17$

a^{12}

$11+11$

$25-24$

$\frac{5-1}{2}=2$

$\frac{5+1}{2}=3$

a^2

$17 \times 9 = 153$

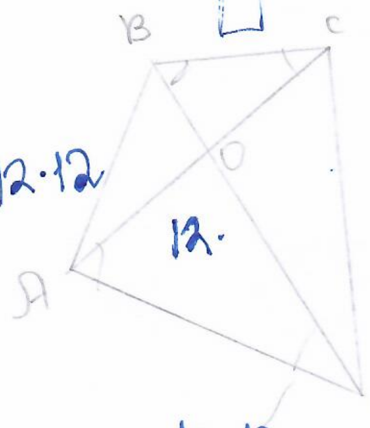
$144 : 4 = 36$

$x^4+2x^2y^2+y^4$

$2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$x^4+2x^2y^2+y^4-\frac{4}{3}x^2y^2$

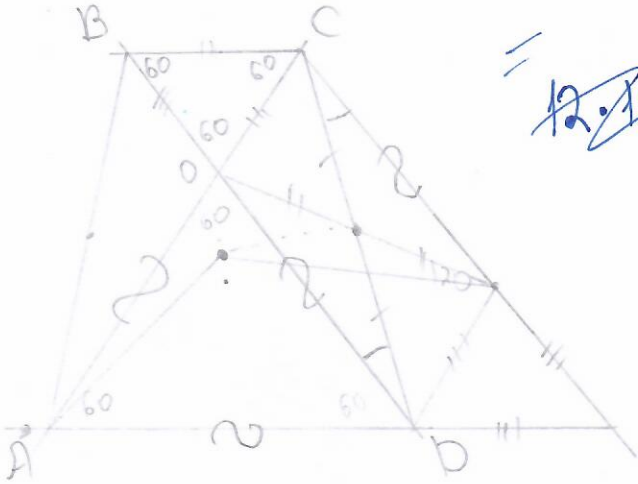
12·12



$121 \times 12 = 1452$

12·12

= 12.



$12^{\square}$

$\frac{15}{3}=5$

$\frac{3-12}{3}=$

$=-3$

Черновик

$\frac{1{,}5\sqrt{3}\cdot 3}{2} = 1{,}5\sqrt{3}$

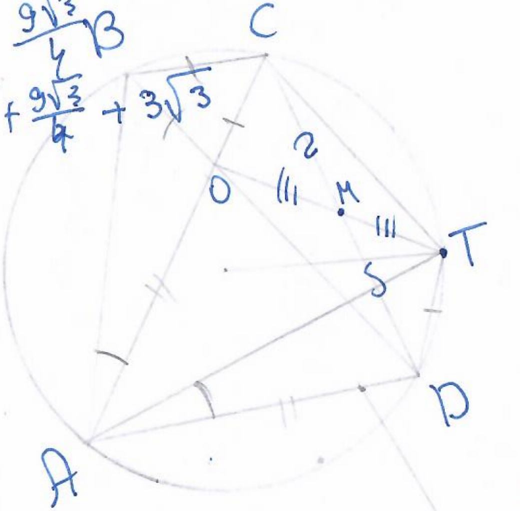
$= 2\cdot n$

$n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 =$

$4 + 9 + 6 = 19$

$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\frac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{3}$



$\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$\sqrt{3}\cdot\cancel{2}$

$\cancel{\sqrt{3}}$

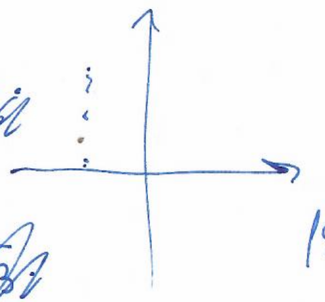
$9+16$

$3^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

$44^2 =$

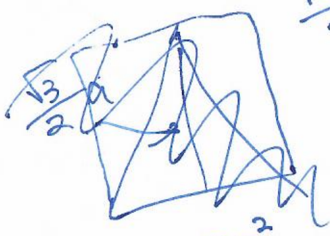
$\begin{array}{r} 44 \\ \times\ 44 \\ \hline 176 \\ +176\ \ \\ \hline 1936 \end{array}$

$19\cdot 4 =$



$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 12 \\ \hline 242 \\ +121\ \ \\ \hline 1452 \end{array}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a$



$\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a$

$\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4}$

$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$