Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005278**

ID профиля: **320783**

Вариант 13

Чистовик

№1

Заметим, что т.к. $\angle AFC$ и $\angle AEC$ равны $90°$ и M и N — середины AH и HC, то FM и EN — медианы в $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$ и равны $\frac{1}{2}$ гипотенузы. $AM = MH = FM = 2$; $EN = HN = NC = 5$.

Т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle FME = \angle NEM$ и $\angle MFN = \angle FNE \Rightarrow \triangle FMH$ и $\triangle HNE$ — подобны с коэффициентом $= \frac{EN}{FM} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow FM = \frac{HN}{2{,}5} = 2$; а $HE = 2{,}5 \cdot HM = 5. \Rightarrow$ в $\triangle HEN$ все стороны равны $5 \Rightarrow$ он равносторонний и все углы по $60°$. $\angle FHE = 180° -$

$- \angle EHC = 120°. \Rightarrow \angle ABC = 360° - \angle BFH - \angle BEH - \angle FHE = 360° - 90° - 90° -$

$120° = 60°$. В прямоугольном треугольнике BFC — $FC = 5+5+2 = 12$;

$\angle ABC = 60° \Rightarrow BC = \sin 60° \cdot 12 = 6\sqrt{3}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{(2+2+5) \cdot 6\sqrt{3}}{2} =$

$= 27\sqrt{3}$. $AC = \sqrt{AF^2 + FC^2} = \sqrt{\sqrt{2 \cdot 2^2(1+\frac{1}{2})}^2 + 144} = 2\sqrt{39} = 2\sqrt{13 \cdot 3}$

$AB = AF + FB = 2\sqrt{3} + \frac{BC}{2} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$S = pR = \frac{5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{13}\sqrt{3}}{2} \cdot R = 27\sqrt{3} \quad \Big| \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$(5 + 6 + 2\sqrt{13})R = 54 \qquad R = \frac{54}{11 + 2\sqrt{13}}$

Ответ: $60°$; $27\sqrt{3}$; $\frac{54}{11+2\sqrt{13}}$

1

Чистовик

№2

$$\begin{cases} 32a_1+a_2+\ldots+a_n=477 \\ a_1+a_2+\ldots+44a_n=477 \end{cases}, \text{ где } a_1 \le a_2 < a_3 < \ldots < a_n$$

$$\Downarrow$$

$31a_1 = 13a_n \Rightarrow a_1 \vdots 13;\ a_n \vdots 31$

Т.к. все числа натуральные и $32a_1+a_2+\ldots+a_n=477 \Rightarrow a_1=13$ (если $a_1>13$; то хотя бы 26; $26\cdot 32>477$); аналогично $a_n=31$.

$32\cdot 13+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+31=477 \Rightarrow a_2+\ldots+a_{n-1}=30$;

Т.к. $a_2, a_3, \ldots a_{n-1} > a_1 = 13$ и $a_2, a_3, \ldots a_{n-1} < a_n = 31$, то $n=4$ или $n=3$. Если $n=3$ получаем $(13;30;31)$; Если $n=4$, заметим что 2-х одинаковых чисел нет, и все числа $>13 \Rightarrow$ подходит только 14 и 16 (15 и 15 – 2 одинаковых; 14 и 16; 13 и 17 – одно из чисел меньше или равно 13 и т.д.)

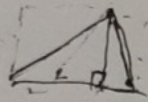
Ответ: $(13;30;31)$; $(13;14;16;31)$.

-2

211005278 (U320783 M1273955)

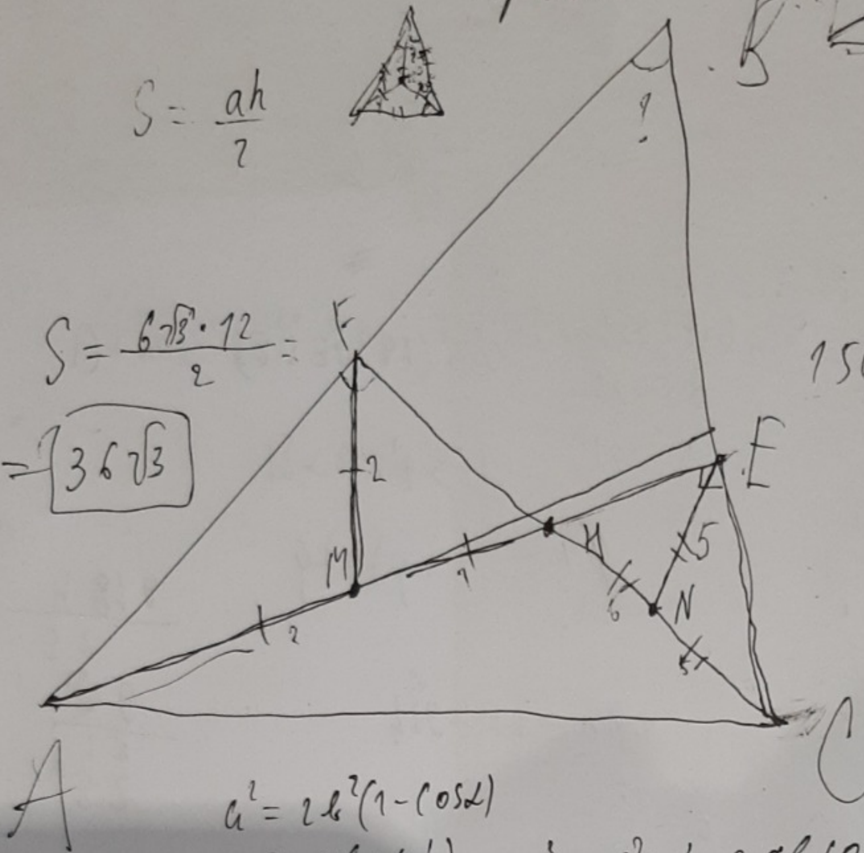
Черновик

$S = \frac{ah}{2}$



$\frac{ah_1}{2} + \frac{a_2h}{2} =$

$S - ? = \frac{h}{2}(a_1+a_2)$



$S = \frac{6\sqrt{3}\cdot 12}{2} = \boxed{36\sqrt{3}}$

$\angle ABC - ?$

$R - ?$

156

$2\sqrt{39}$

$\begin{array}{r|l} 136 & 4 \\ 26 & 39 \end{array}$

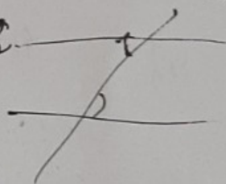
$a^2 = 2b^2(1-\cos\alpha)$

$a^2 = 8(1+\frac{1}{2})$

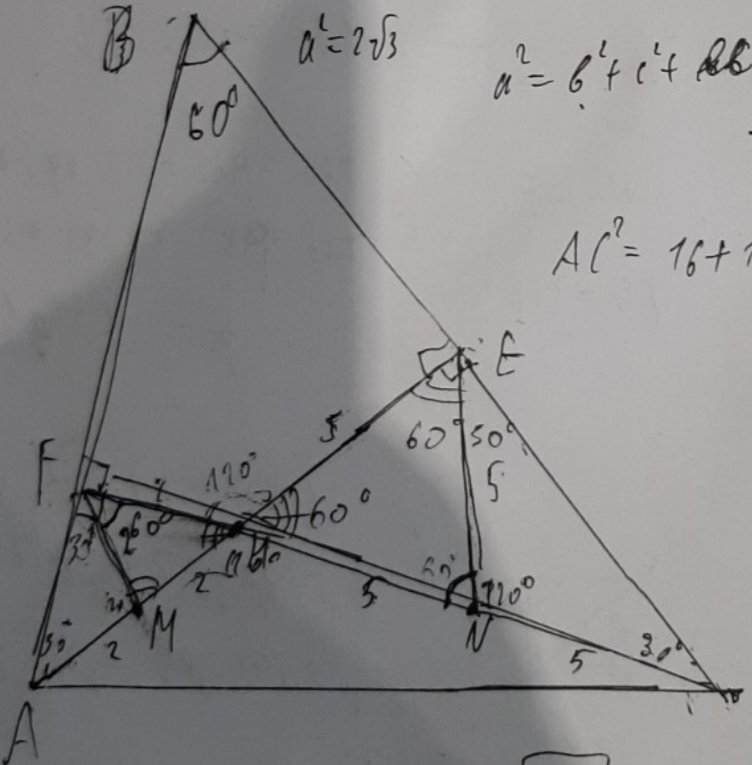
$a^2 = 2\sqrt{3}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 + ab$



$AC^2 = 16 + 100 + 40 = 156$



$4 \cdot 14 = 56$

$36 \cdot 3 =$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{9}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$12 + 144 = \sqrt{156}$

$18 = \sqrt{3}\,AB$

$2\sqrt{3} + 12$

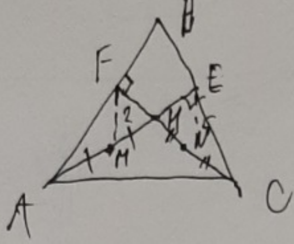
$2\sqrt{39}$

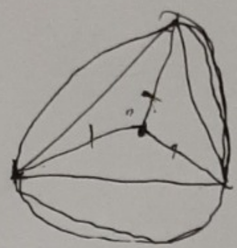
$6\sqrt{3} = AB$

Черновик

Математика экл

№1





$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\alpha$

$a^2 = 2b^2(1-\cos\alpha)$

№2

$a, b, c, \ldots d$

$32a + b + c + \ldots + d = 477$

$a + b + \ldots + 14d = 477$

$31a = 13d$

$d = \frac{31}{13}a$; $a \vdots 13$

$d \vdots 31$

~~220 - 27~~

$440 - 27 = 413$

413

$13 + 14 + \ldots + 31 = \frac{13+31}{2} \cdot 19 = 22 \cdot 19$

$\frac{44}{2} = 22$

$$\begin{array}{r} \times\; 32 \\ 13 \\ \hline 96 \\ +\;32\; \\ \hline 416 \end{array}$$

$416 + 31 = 447$

$$\begin{array}{r} \times\; 31 \\ 14 \\ \hline 124 \\ 31\; \\ \hline 434 \\ +\;13 \\ \hline 447 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\;477 \\ 447 \\ \hline 30 \end{array}$$

$b + c + d + \ldots = 30$

$13 < b, c, d < 31$

$30 = 15 + 15$;

$14 + 16$

$13 + 17 \ldots x$

$$\begin{array}{r} \times\; 13 \\ 3 \\ \hline 39 > 30 \end{array}$$

Ответ: $(13; 30; 31)$; $(13; 14; 16; 31)$

$S = pr$

$\pi r^2 -$

Черновик Математика 9 кл.

$5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$ $x_1; y_1$ – центр.

$5a^2 - 6ax - 2ay + x^2 + (x+y)^2 = 0$

$\boxed{5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0}$

$5a^2 + 2x^2 + 2xy + y^2 = 6ax + 2ay$

$9a^2 - 4a^2 + 2x^2 - 6ax + 2xy + y^2 - 2ay + a^2 - a^2 = 0$

$(3a - x)^2 + x^2 + (y - a)^2 - 5a^2 + 2xy = 0$

$(a^2 - 2ax + x^2) + (a^2 - 2ax + x^2) + (a^2 - 2ax + x^2) - x^2 +$

$+ (a^2 - 2ay + y^2) + a^2 + 2xy = 0$

$3(a - x)^2 - x^2 + (a - y)^2 + a^2 + 2xy = 0$

211005278 (U320783 M1273955)

Черновик

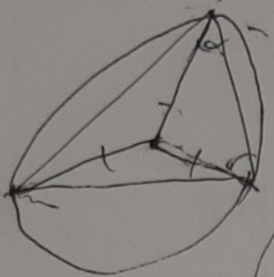
$$S=\frac{\pi R^2}{4abc}$$

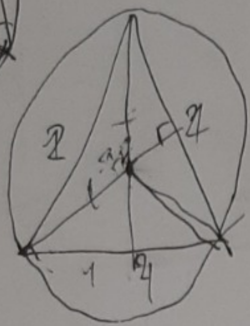
211005278 (U320783 M1273955)

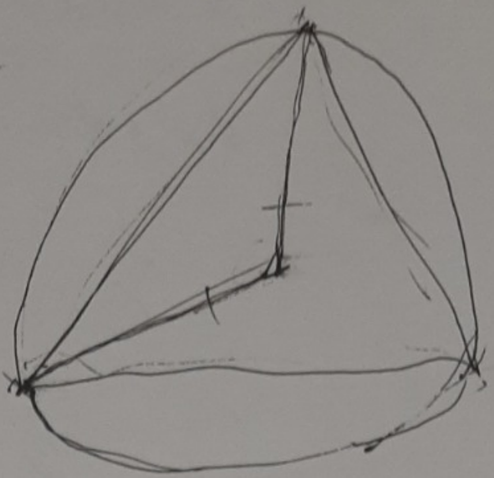
Черновик

$$\frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^\circ} - \frac{\pi r^2}{4abc}$$

$$\pi \frac{4}{3}$$







$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{2}$$

$$4 = 2a^2 + \cancel{2}a^2 = 3a^2$$

$$a^2 = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

211005278 (U320783 M1273955)

Черновик

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$a^2x^2+a^2y^2\underbrace{-8a^2x-2a^3y+12ay}+a^4+36=0$

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2$

$x^2-2xx_1+x_1^2$ $\quad S=pr$

$\cancel{2x^2}$ $\cancel{(x+y)^2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005278**

ID профиля: **320783**

Вариант 13

Чистовик

№5

Рассмотрим 2 случае, когда 1 дубль, и когда 2 дубля, очевидно, что эти случаи не пересекаются, и ответом на задачу будет сумма способов.

1) Если всего 1 дубль, то выбрать число на нём можно 12 способами, а выбрать числа на другой карте 11·10 способов. То есть всего 12·11·10 = 1320 способов.

2) Если 2 дубля, то выбрать число на 1 можно 12 способами, а на 2 оставшимися 11 способами, так же нужно поделить на 2, так как мы посчитали все способы дважды (например: (5;3) и (3;5))

⇒ Всего 12·11/2 = 66 способов.

Складывая 1320 + 66 = 1386 — получаем количество способов выводить карточки, так как хочет фокусник.

Ответ: 1386.

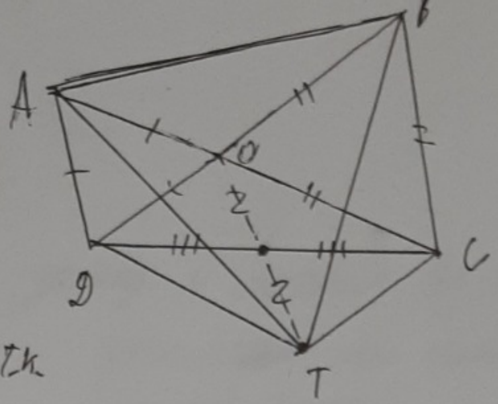
1

211005278 (U320783 M1273956)

Чистовик

№6

Так как в четырёхугольнике ДОСТ диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам, то ДОСТ — параллелограмм



$\Rightarrow ДТ = ОС,\ ДО = ТС$;

Пятиугольник АДТСВ — вписанный, т.к. вписанный АВСД ($\angle АДВ$ и $\angle АСВ$) и ДВСТ (т.к. является равнобокой трапецией) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATB = \angle ACB = \angle OCB = 60°$; $AT = BT$, т.к. $\angle ACT = \angle BДТ$ (из параллелограмма ДОСТ), а равные углы опираются на равные хорды. $\Rightarrow$

$\Rightarrow ATB$ — правильный треугольник. Так как четырёхугольник АВСД — вписанный, то его площадь можно посчитать по формуле $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, а $S_{\triangle}\ ABT$ по формуле $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона) по т. косинусов получаем, что $AT = TB = AB = \sqrt{19}$ и $AB = ДС = \sqrt{19}$;

$$\sqrt{\frac{1{,}5\sqrt{19}\cdot(0{,}5\sqrt{19})^3}{(2{,}5+\sqrt{19}-\sqrt{19})^2(2{,}5+\sqrt{19}-2)(2{,}5+\sqrt{19}-3)}} = \sqrt{\frac{1083}{1875}} = \frac{19\sqrt{3}}{25\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{19}{25} = 0{,}76$$

Ответ: $0{,}76$ или $\frac{19}{25}$

2

211005278 (U320783 M1273956)

Чистовик

№4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \quad | \cdot \frac{1}{3} \\ x^4+y^4+\frac{8}{3}x^2y^2=17 \end{cases} + = x^4+x^2+y^4+y^2=18$$

$$x^2(3-2y^2)=3-3y^2$$

$x^2 = \dfrac{3-3y^2}{3-2y^2}$, произведя замену и подставив во 2 равенство мы можем решить задачу.

3

Черновик

$5^2 \cdot 5^2 \cdot 3$

$\frac{2+3+6\sqrt{19}}{2} = 2{,}5+\sqrt{19}$

$1875 : 25 = 75$

$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

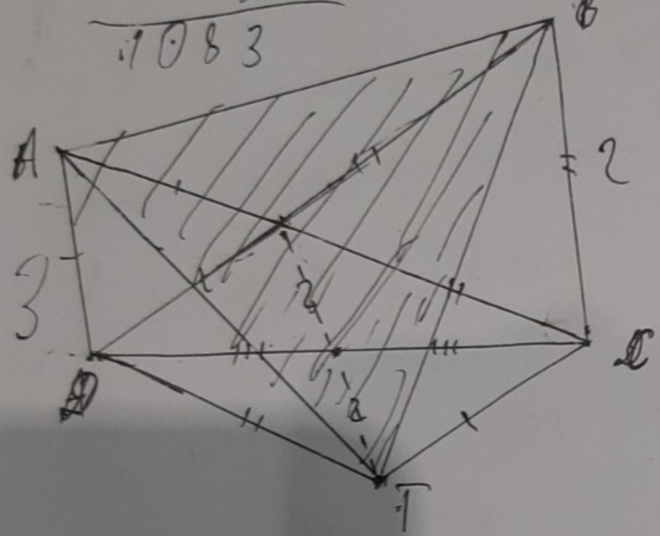
$19 \cdot 19 = 361$

$361 \cdot 3 = 1083$

$1083 : 3 = 361$

$\frac{3\sqrt{19}}{2}$

$1{,}5\sqrt{19}$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 + bc$

$a^2 = 4+9+6 = 19$

$\sqrt{19}$

$\sqrt{\frac{3 \cdot 19^2 \cdot 0{,}5^2}{16 \cdot 2{,}5^2 \cdot (0{,}5+\sqrt{19})(\sqrt{19}-0{,}5)}}$

$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

$\sqrt{\frac{3 \cdot 19^2}{16 \cdot 2{,}5^2 \cdot (19-0{,}25)}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 19^2}{\cancel{400} \cdot 1875}} = \sqrt{\frac{1083}{1875}} =$

$4 \cdot 2{,}5$

$= \frac{19\sqrt{3}}{25\sqrt{3}} = \frac{19}{25} = 0{,}76$

211005278 (U320783 M1273956)

Черновик

$\times\begin{array}{r}17\\3\\\hline 51\end{array}$

№4

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-2x^2y^2=3\\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17\end{cases}$$

$3x^2+3y^2-2x^2y^2=3$

$3x^4+3y^4+2x^2y^2=51$

$n\geq 0$ $x^2-2x^2y^2+y^2$

$3x^4+3x^2+3y^4+3y^2=54$ $x<18$

$x^2+x+y^2+y=18$

$x^4\geq 0$

$\underbrace{x^4+x^2+y^4+y^2=18}$

$x^4<18$

~~$x^2+y^2=18-y^4-x^4$~~

$3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \Rightarrow$ ~~$x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1$~~

~~$3\cdot18-3(x^4+y^4)-2x^2y^2=3$~~ $x^2+y^2-\frac{2}{3}x^2y^2=1$

x^4

$3x^4+3y^4-2x^2y^2=$

$12\cdot110$

$11+11+1=23$

~~$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17$~~

$-\begin{array}{r}144\\23\\\hline 121\end{array}$

№5 $11+11=22$

$x^4+y^4+2x^2y^2+2(x^4+y^4)=$
$=17$

1|1 2|2 2|4 2|5 ...

$12^2=144$

12	1
11	2
13	3
...	...
12	12

1|1
2|2
1|3
...
11|12

$11\cdot11=$

$(x^2+y^2)^2+2(x^4+y^4)=17$

$12\cdot11^2$

$12\cdot110+12\cdot11=12\cdot11(10+1)=12\cdot11^2$

$\times 12$

$1+\dots+11=11\cdot6$

$12\cdot(11\cdot10+$

$x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)=18$

$12\cdot(11\cdot10)+\frac{12\cdot11}{2}=$

$x^2+x+y^2+y-18=0$

$=1320+66=\boxed{1386}$

1

2

6 трет

Черновик

№4

$3x^2+3y^2-2x^2y^2=3$

$x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17$

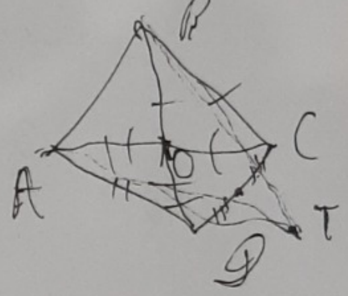
$x^2(3-2y^2)=3-3y^2$

$x^2=\frac{3-3y^2}{3-2y^2}$

$x^4+y^4+x^2+y^2=18$

$3x^4+3y^4+2x^2y^2=51$

$3\frac{9-18y^2+9y^4}{9-12y^2+4y^4}+3y^4+2y^2\frac{3-3y^2}{3-2y^2}=51$



$\frac{9-18y^2+9y^4}{9-12y^2+4y^4}+y^4+\frac{3-3y^2}{3-2y^2}+y^2=18$

$(9-12y^2+4y^2)+5y^4-6y^2$

$1+\frac{5y^4-6y^2}{9-12y^2+4y^4}+y^4-\frac{\cancel{3}y^2}{3-2y^2}+y^2=18-1$

$\cancel{5y^4-6y^2}$