Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005134**

ID профиля: **306709**

Вариант 13

Чистовик

№2

Дано: $a_1 \ldots a_n \in \mathbb{N}$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

$a_1, \ldots, a_n$ - различные

$$32a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 477$$
$$"-" \quad a_1 + \ldots + 14a_n = 477$$

$$31a_1 - 13a_n = 0 \to 31a_1 = 13a_n$$

31 и 13 - простые числа => они взаимно простые

$\Rightarrow a_1 = 13k$; $a_n = 31k$, где $k \in \mathbb{N}$

Если $k \geq 2$, то $(32 \cdot 13 \cdot 2 + \Sigma\mathbb{N} > 477)$

$(32 \cdot 26 + \text{натур. числа} > 477)$

и для $k > 2$

$\mathbb{N} + 32 \cdot 13 \cdot k > 32 \cdot 13 \cdot 2 + \mathbb{N} > 477$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 32 \\ \hline 26 \\ 390 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 26 \\ \hline 192 \\ 1240 \\ \hline 1432 \end{array}$$

Следовательно ~~k=1~~ k равно только 1; $\Rightarrow a_1 = 13$; $a_n = 31$;

$13 \cdot 32 + \ldots + 31 = 477$; $416 + 31 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 477$; $447 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 477$

$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 30$ 1) Если между a_1 и a_n 3 числа, то найдется такое число, которое меньше 13, а так как это не так => max между a_1 и a_n 2 числа.

(Если б такого числа не нашлось, то min Σ 3 чисел $= 3 \cdot 13 = 39$, что больше 30)

(Аналогично и для того случая когда чисел между a_1 и a_n больше 3)

$30 = a_2 + a_3$, При этом $a_2 > 13 \Rightarrow a_2 \min = 14$; $\Rightarrow a_3 = 16$

Если $a_2 \min > 14$, то $a_2 = a_3$ $(15 = 15)$ → это не подходит, т.к. числа различны

или $a_2 > a_3$ $(16 > 14)$ - это не подходит, т.к. $a_2 < a_3$

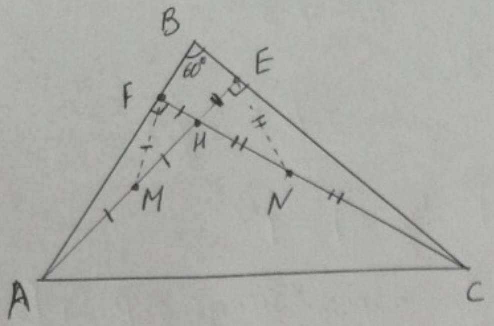
2) Если между a_1 и a_n - 1 число, то это будет $\boxed{a_2 = 30}$, т.к. 1 число $= 30$;

Ответ: 13, 14, 16, 31

или

13, 30, 31

№1



Дано: ABC – остроуг.; CF и AE – высоты
$AE \cap CF$ = т. H; т. M – середина AH
т. N – середина CH
$FM=2$; $EN=5$; $FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$; S_{ABC}; R_{ABC}

Решение:

1) $\triangle AFH$ – прямоуг. и т. M середина AH $\Rightarrow$ $FM = MH = AM$ (т.к. FM – медиана из прямого угла)

2) $\triangle HEC$ – прямоуг. и т. N – середина HC $\Rightarrow$ $EN = HN = NC$ (т.к. EN – медиана провед. из прямого угла.)

3) т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle FME = \angle MEN$ – накрест. леж.

4) $\angle MEN = \angle EHN$ (т.к. $\triangle HNE$ – р/б ($HN=NE$))

5) $\angle EHN = \angle MHF$ – верт.; 6) $\angle MHF = \angle MFH$ (т.к. $\triangle MHF$ – р/б ($MH=MF$))

7) $\angle MFH = \angle MHF = \angle FMH$ $\Rightarrow$ $\triangle FHM$ – равносторонний и $\angle MFH = 60^\circ$; $FH = 2 = HM$

Аналогично и для тр. HNE – равносторон $\Rightarrow$ $\angle HEN = 60^\circ$ и $HE = 5 = HN$

8) $\angle FHE = 180^\circ - \angle AHF = 120^\circ$; 9) Сумма углов в 4-угольнике $= 360^\circ$;

$FHEB$; $\angle CFB + \angle AEB + \angle FHE + \angle ABC = 360^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

10) $S_{треуг.} = FC \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$; $FC = FH + 2HN = 2+10 = 12$;

$S_{треуг.} = \sin\alpha \cdot AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$; $12 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60$; $\cancel{12AB}$ $FC = \sin\alpha \cdot BC$

$12 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC$

$BC = \frac{24}{\sqrt{3}}$;

$AE = 2MH + HE = 4+5 = 9$

$S_{треуг.} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC$; $S_{треуг.} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{12 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 12 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

11) $\cancel{R}$ $AB = \frac{S_{тр.} \cdot 2}{FC} = \frac{36\sqrt{3} \cdot 2}{12} = 6\sqrt{3}$;

12) $R = \frac{AC}{2} \cdot \sin 60$;

Ответ: $S_{треуг.} = 36\sqrt{3}$; $\angle ABC = 60^\circ$

Чистовик

№3

Найти: a - ?

$5a^2-6ax-2ay+2x^2+2xy+y^2=0$; т. $A(x_1;y_1)$;

$a^2x^2+a^2y^2-8a^2x-2a^3y+12ay+a^4+36=0$; Окр. с центр. т. $B.(x_2;y_2)$

$\boxed{(a-x)^2+(a-y)^2=r^2}$

где x и y - координ. центра окр => т. B.

1 случай) $y_1>1$ и $y_2<1$;

2 случай) $y_1<1$ и $y_2>1$;

~~ecfox~~

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005134**

ID профиля: **306709**

Вариант 13

№1

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cancel{3x^2+3y^2-3=2x^2y^2;\ \frac{3(x^2+y^2-1)}{2}=x^2y^2}$

$\Rightarrow \cancel{x^4+y^4+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2-1)=17;\ (x^4+y^4+x^2+y^2=18)}$

$\cancel{x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)=18}$

Заменим $x^2+y^2=a$; $x^2y^2=b$; Тогда $3(x^2+y^2)-2x^2y^2=3$;

$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$; $(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+\frac{2}{3}x^2y^2=x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2$;

$$\begin{cases} 3a-2b=3 \\ a^2-2b+\frac{2}{3}b=17 \end{cases}$$

$2b=3a-3$; $\frac{2b}{3}=\frac{3a-3}{3}$; $a^2-(3a-3)+\left(\frac{3a-3}{3}\right)=17$; $a^2-3a+3+a-1=17$;

$a^2-2a+2-17=0$; $a^2-2a-15=0$; $D=4+60=64$; $a_1=\frac{2+8}{2}=5$; $a_2=\frac{2-8}{2}=-3$;

$3\cdot5-2b=3$; $2b=15-3=12$; $b_1=6$;

$2b=-9-3$; $b_2=-6$;

② $\begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-6 \end{cases}$ — нет решения, т.к. сумма квадратов ≥ 0;

① $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=6 \end{cases}$ $\rightarrow x^2=\frac{6}{y^2}$ $\rightarrow \frac{6}{y^2}+y^2=5$

$6+y^4=5y^2$

$y^4-5y^2+6=0$,

$t=y^2$

$t^2-5t+6=0$; $D=25-24=1$; $t_1=\frac{5+1}{2}=3$; $t_2=\frac{5-1}{2}=2$

① $3=y^2$; $y=\pm\sqrt{3}$

② $2=y^2$; $y=\pm\sqrt{2}$

$x^2+y^2=5 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$x^2+y^2=5 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(x=\pm\sqrt{3};\ y=\pm\sqrt{2})$ и $(x=\pm\sqrt{2};\ y=\pm\sqrt{3})$

$$\begin{pmatrix} x=+\sqrt{3};\ y=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{3};\ y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{3};\ y=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{3};\ y=-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Аналогично

Чистовик

№2

Пусть номера карточек будем записывать, как $(x;y)$; где первое число на ~~передней~~ красной стороне, а второй на синей;

1) Фокусник может вытащить 2 дубля, тогда точно никакое число не встрет. однов. на 2 карт.;

Всего дублей у нас 12: $(1;1);(2;2);\ldots;(12,12)$.

$C_{12}^{2}=\frac{12!}{10!2!}=\frac{12\cdot 11}{2}=66$; - Нам надо вытащить 2 карты из 12 возможных;

2) Фокусник вытаскивает только 1 дубль, ~~тогда~~ $(a;a)$ и некоторую карточку $(b;c)$

Всего карточек $\underline{144}$; из них 12 дублей; и ~~24~~ 2 карточек в которых есть „a"

в дубле кроме (a,a) нет „a";

$(a;\underbrace{\text{от 1 до 12 кроме a}}_{11 \text{ чисел}})+(\underbrace{\text{от 1 до 12 кроме a}}_{11 \text{ чисел}};a)$

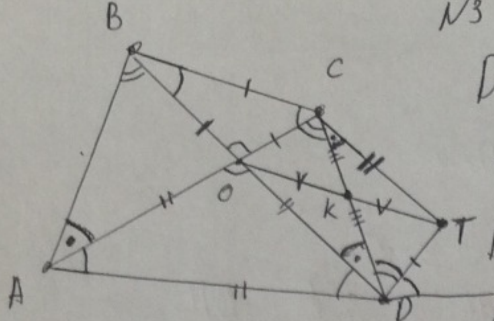
$144-12-22=110$ карточек, которые могут быть

$C_{12}^{1}\cdot C_{110}^{1}=12\cdot 110=1320$

Ответ: $C_{12}^{2}+C_{12}^{1}\cdot C_{110}^{1}=66+1320=1386$

211005134 (U306709 M1274731)

№3



Дано: $ABCD$ - выпукл. четырехуг.; $AC \cap BD =$ т. O

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные; т. T сим. т. O отн. K

K - середина CD

Док-ть: ABT - правильный треуг.

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$, если $BC=2$; $AD=3$

Решение:

1) Треуг. BOC - правильный $\Rightarrow BO=OC=BC$ и $\angle OBC=\angle OCB=\angle BOC=60°$;

AOD - правильный $\Rightarrow AO=OD=AD$ и $\angle OAD=\angle ODA=\angle AOD=60°$

2) $BC \parallel AD$, т.к. накрест. леж. углы равны при сек. AC; $\angle DAO=\angle ACB$

3) $\triangle CAD=\triangle BAD$ (по 2 ст. и углу между ними) $\left\{\begin{array}{l} BD=AC=BO+OD=OC+OA \\ AD - \text{общ.} \\ \angle BDA=\angle CAD=60° \end{array}\right.$

$\Rightarrow BA=CD$; $\angle ABO=\angle OCD$; $\angle BAO=\angle ODC$

($ABCD$ - равнобедренная трапеция, т.к. $BC \parallel AD$ и $AB=CD$ и $\angle BAD=\angle ADC$)

4) т. K - середина CD; $CK=KD$; 5) т. T сим. т. O отн. т. K $\Rightarrow OK=KT$.

6) $OCTD$ - параллелограм. т.к. диагонали пересекаются и делят. пополам.

$\Rightarrow OC=TD$; $OD=CT$ и $\angle ODC=\angle DCT$ и $\angle OCD=\angle CDT$

7) $\triangle BCT=\triangle ATD$ (по 2 ст. и углу между ними) $\left(\begin{array}{l} AD=CT \\ DT=BC \\ \angle ADT=\angle BCT=\angle BCA+\angle ACD+\angle DCT \end{array}\right)$

$\Downarrow$

$BT=AT$

8) $\angle DTC=180°-\angle ODT$;

$\angle DTC=180°-\angle 2-\angle 3$;

$\angle DTC=180°-(180°-2\angle 1)$;

$\angle DTC=2\angle 1=120°$

9) $\angle ADB+\angle DBA+\angle BAT=180°$;

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 1=180°$

$(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=180°-\angle 1$

$\angle 2+\angle 3=180°-2\cdot\angle 1=60°$

$\angle ADT=60°+60°=120°$

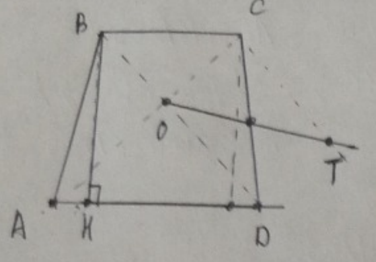
(Пусть угол с 1 дужкой $=\angle 1$; угол с 2 дужками $=\angle 2$; угол с точкой $=\angle 3$)

$\Rightarrow \angle DTC=\angle ADT$; $DT=DT$; $AD=CT$ $\Rightarrow \triangle CTD=\triangle ADT$ (по 2 ст. и угл. между ними) $\Rightarrow$

$CD=AT$; $CD=AB=AT$

$\Rightarrow AT=AB=BT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

(продолжение задачи №3)



Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение: $BC=2$; $AD=3$

$\Rightarrow BD = BO + OD = 2+3 = 5$;

Проведем ~~вы~~ перпенд. к AD из т. B; BH

$BD=5$; $AH = \frac{3-2}{2} = 0{,}5$ (т.к. $ABCD$ - р/б трап.)

$\rightarrow HD = 3-0{,}5 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$

BHD - прямоуг. треуг.

$\Rightarrow BD^2 = BH^2 + HD^2$ (по теор. Пифагора) $25 = \frac{25}{4} + BH^2$; $BH^2 = 25 - \frac{25}{4}$

$BH^2 = \frac{100-25}{4} = \frac{75}{4}$; $BH = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{\sqrt{3\cdot 25}}{2} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}$

AHB - прямоуг. треуг. $\Rightarrow AH^2 + HB^2 = AB^2$ (по теор. Пифагора)

$AH = \frac{1}{2}$; $HB = \frac{5}{2}\sqrt{3}$; $AB^2 = \frac{1}{4} + \frac{25}{4}\cdot 3$; $AB^2 = \frac{1+75}{4} = \frac{76}{4} = 19$; $AB = \sqrt{19}$

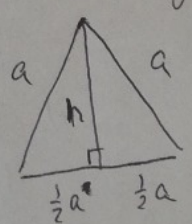
треуг. ABT - равносторонний $\Rightarrow S_{ABT} = \frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{19\cdot\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot(BC+AD)\cdot\frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{25\cdot\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{25\cdot\sqrt{3}} = \frac{19}{25}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19}{25}$

$S_{равн.\ треуг.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$; $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$S = \frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

черновик

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-2x^2y^2=3 \\ x^4+y^4+\frac{2}{3}x^2y^2=17 \end{cases}$$

$3(x^2+y^2-1)=2x^2y^2$

$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$

$x^2+y^2=u$; $x^2y^2=V$

$3u-2V=3$;

$u^2-2V+\frac{2}{3}V=17$

~~x=0 ; y=2~~ 4·5

x=1 ; y=1 ; 1·2+1·2

5+(-3)=2

5·(-3)=

$x^2=\frac{-6}{y^2}$

$\frac{-6}{y^2}+y^2=-3$;

$-6+y^4=-3y^2$

$y^4+3y^2-6=0$;

D=9+24=33

$y=\left(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right)$

$x^2+\frac{-3+\sqrt{33}}{2}=-3$

$x^2=-3=$

(1;1) (1;2) – неподходит.

11; 22
$\frac{4}{22 \cdot 11}$ один.

1
2
3
4

1–1
1–2
1–12

2–1
2–2
2–12

12
12
12

12 × 108 = 96, 1208, 1296, 66, 1362

1080
216

1 ... 12

12 12

1 вар. / 2 вар. / 2

1 2 3 ... 12
1 2 3 ... 12

$\frac{12 \cdot 11}{2!}$

12 −1 =1

кр. син.
(x ; y)
12 12

$12^2=144$ карточек

1 до 12 кр. — x
1 до 12 син. — y

дубли $x_{кр.}=y_{син.}$

1 и 2 дубля из 2 карт.

(1,1) 1 случай)

144 −1 −11 −1
−12 дубли

1;1

−1 −11

кр.
1; 2 3 4 5 6 ... 12 ; 1
син.

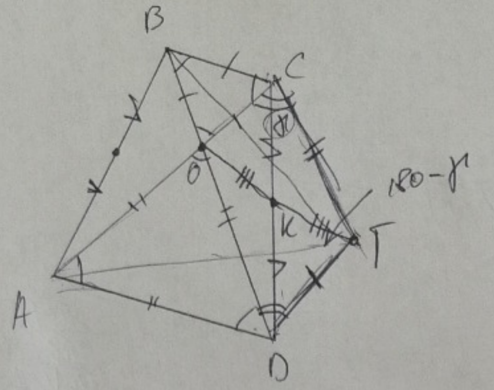
144
1
130
24

разные
1;2
2;1

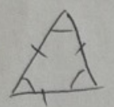
(1;1)

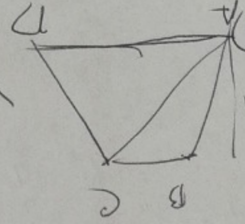
211005134 (U306709 M1274731)

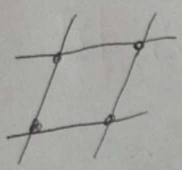
Черновик

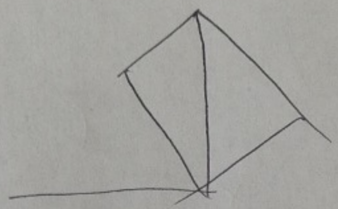


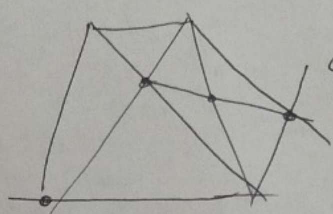
AT = BT









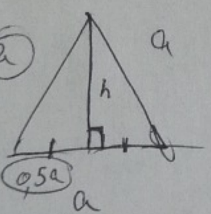


$\boxed{180 - \ldots - \ldots} = \ldots + \ldots + \ldots$

$2 \ldots + \ldots + \ldots = 180°$

$76 : 4 = 19$

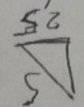
$\frac{a\sqrt{3}}{4}$



$a^2 = h^2 + \underbrace{\frac{1}{4}a^2}_{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$; $h^2 = \frac{3}{4}a^2$

$h = \sqrt{\frac{3}{4}}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



$\frac{6 + y^4}{y^2} = 5$

$\boxed{1}\ \boxed{2}$ $\boxed{2}\ \boxed{1}$

144 – 12 – 22 $\boxed{1}\ \boxed{1}$

00 | 0

$\boxed{12 ; 12}$

22

$\boxed{12 ;\ \begin{matrix}1\\2\\3\\\ldots\\11\\11\end{matrix}}$ + $\boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\\\ldots\\11\\11\end{matrix} ;\ 12}$

211005134 (U306709 M1274731)