Часть 1

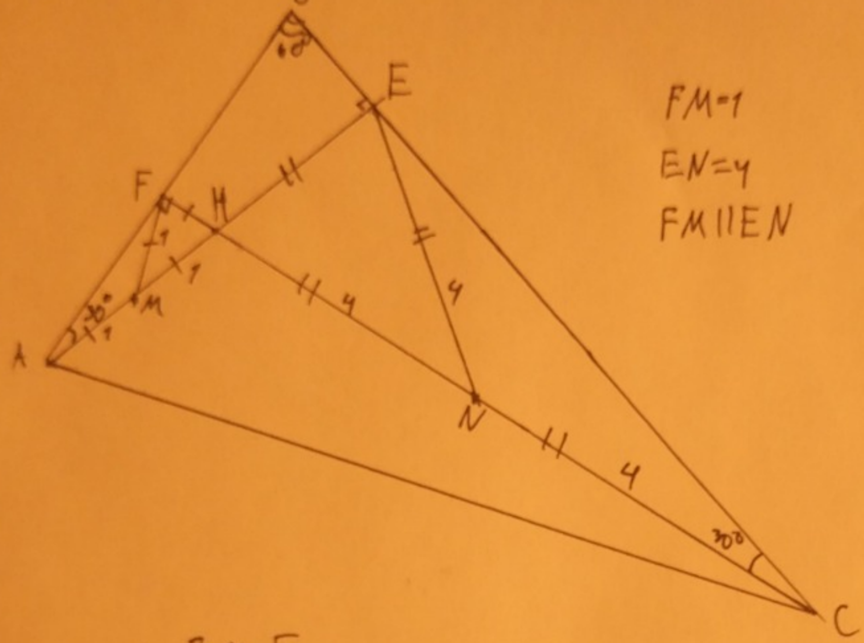
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006795**

ID профиля: **879121**

Вариант 16

Задание № 1)



$FM = 1$

$EN = 4$

$FM \parallel EN$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$

(медиана в пр. тр.)

Решение: так как $\angle AFH = 90^\circ$, $FM = MH = AM = 1$. Аналогично $EN = HN = NC = 4$. $FM \parallel EN$, поэтому $\angle MFH = \angle HNE$. При этом $\angle MFH = \angle MHF = \angle EHN = \angle NEH$ (как вертик.. или как углы при осн. равнобед. тр.). Значит все углы в $\triangle HEN$ равны, значит он правильный, то есть $HE = EN$, а $\angle ECH = 30^\circ$. Аналогично $FH = FM$, а $\angle FAH = 30^\circ$. (в пр. $\triangle ABE$ $\angle ABE = 60^\circ$) Тогда $\angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Тогда $AB = 2 \cdot BE$. При этом $AB^2 - BE^2 = AE^2 = 6^2$. То есть $4BE^2 - BE^2 = 3BE^2 = 6^2 = 36$. Тогда $BE^2 = 12$, а $BE = \sqrt{12}$, $AB = 2 \cdot \sqrt{12}$. Тогда $S_{\triangle ABC}$ равна $\frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 2\sqrt{12}}{2} = 9 \cdot \sqrt{12} = 18 \cdot \sqrt{3}$.

Задание №2)

Пусть сумма всех чисел будет равна S, а числа будут равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (всего n чисел), причём $a_1<a_2<\ldots<a_n$. По условию $S+a_1\cdot 34=592$ и $S+a_n\cdot 15=592$, тогда $a_1\cdot 34=a_n\cdot 15$.

НОД$(34,15)=1$, значит $a_1 \vdots 15$. Так как a_1 – нат., минимальное такое число – это 15. Причём, если a_1 будет равно хотя бы 30, то $a_1\cdot 34\geq 30\cdot 34>592$, но $S>0$, противоречие. Значит $a_1=15$, тогда $a_n=34$. Тогда $S=592-15\cdot 34=592-510=82$, а $a_2+\ldots+a_{n-1}=82-34-15=33$. Если $n=3$, то $a_2=33$ и всё сходится (~~если n=1~~ n хотя бы 3, потому что $a_1\neq a_n$, и $n\neq 2$, потому что $a_1+a_n<592$). Если $n=4$, то $a_2+a_3\geq a_1+1+a_1+2=33$, значит $a_2=a_1+1$, а $a_3=a_1+2$, потому что равенство достигается только в этом случае. Если же $n>4$, то $a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}\geq a_1+1+a_1+2+a_1+3=45+6>33$, противоречие. Значит возможны 2 случая: $a_1=15$, $a_2=33$, $a_3=34$ и $a_1=15$, $a_2=16$, $a_3=17$, $a_4=34$.

Ответ: числа равны 15, 33 и 34 / числа равны 15, 16, 17, 34

Задание 3) — лист 1)

Рассмотрим уравнение

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$, как квад. уравнение с переменной x. Тогда

$$x^2+x(-4a-2y)+2y^2+5a^2+6ay=0$$

Его дискр. D равен

$(4a+2y)^2-4(2y^2+5a^2+6ay)=4((y+2a)^2-2y^2-5a^2-6ay)=4(-a^2-y^2-2ay)=$

$=-4(y+a)^2$. Тогда $D\geq 0$ только когда $y=-a$. Тогда ~~корни~~ корень кв. ур. ~~будут~~ будет равен $\frac{4a+2y}{2}=\frac{2a}{2}=a$. Значит координ. по x у точки A равна a.

Теперь рассмотрим уравнение

$P(x)=a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1$, как квад. ур. от x.

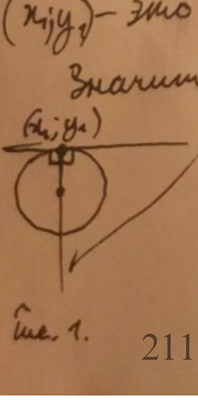
$P(x)=x^2a^2+x(-4a^3-2a)+a^2y^2+2a^2y+4a^4+1=0$

Его диск. D равен

$(4a^3+2a)^2-4a^2(a^2y^2+2a^2y+4a^4+1)=4a^2((2a^2+1)^2-a^2y^2-2a^2y-4a^4-1)=$

$=4a^2(4a^4+1+4a^2-a^2y^2-2a^2y-4a^4-1)=4a^4(4-y^2-2y)$. Давайте рассмотрим те y, при которых $D=0$. $a\neq 0$ (потому что тогда ур-е не решается), значит это y, при которых $4-y^2-2y=0$. Корни этого кв. уравнения - это $\frac{2+\sqrt{4+4\cdot4}}{-2}=\frac{2+\sqrt{4\cdot5}}{-2}=\frac{1+\sqrt5}{-1}$ и $\frac{1-\sqrt5}{-1}$. Так как урав.

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$ — это урав. окр., то ~~если~~ при $x=$ каком-то нужно ~~решаться~~ имеет только 1 корень, (корень x_1), то точка $(x_1;y_1)$ — это точка касания прямой, парал. оси O_x, с окружностью. Значит прямая $x=x_1$ проходит через центр окружности (рис. 1).



Значит точка B имеет ~~такую же~~ координ. по x, равную решению уравнения $P(x)=0$ при $y=(1+\sqrt5)\cdot(-1)$. В этом случае $D=0$, значит ~~решение~~ корень уравнения будет равен $\frac{4a^3+2a}{2a^2}=2a+\frac{1}{a}$

рис. 1.

[redacted]

Задание 3 – лист 2)

Осталось найти такие a, при которых либо $a>3$ и $2a+\frac{1}{a}<3$, либо $a<3$ и $2a+\frac{1}{a}>3$.

Если $a>3$, то и $2a+\frac{1}{a}>3$, ~~противор~~ значит в этом случае a не ~~сущес~~ существует.

~~Если $a<3$~~ Пусть $a<3$ и $2a+\frac{1}{a}>3$ ~~(то есть $2a^2+1>3a$)~~

Если $a<0$, то и $2a+\frac{1}{a}<0$, противоречие.

Значит $a>0$ ($a\neq 0$, потому что на 0 делить нельзя).

Если $a>0$ ~~...~~, то $2a+\frac{1}{a}>3$ равносильно нер-ву $2a^2-3a+1>0$, что равносильно нер-ву

$\left(\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{8}>0$, то есть $\left(\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2>\frac{1}{8}$. Значит либо

($\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, либо $\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}<-\frac{1}{\sqrt{8}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

В 1-м случае

$\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(\cdot\sqrt{2})$

$2a-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$ $(\cdot 2)$

$4a-3>1$

$4a>4$

$a>1$

Во 2-м случае:

$\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}<-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(\cdot 2\sqrt{2})$

$2a-3<-1$

$2a<2$

$a<1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006795**

ID профиля: **879121**

Вариант 16

Задание №1)

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} x=2 & y=\sqrt{3} \\ x=-2 & y=\sqrt{3} \\ x=2 & y=-\sqrt{3} \\ x=-2 & y=-\sqrt{3} \\ y=2 & x=\sqrt{3} \\ y=-2 & x=\sqrt{3} \\ y=2 & x=\sqrt{3}\cdot(-1) \\ y=-2 & x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

Пусть $a=x^2$, а $b=y^2$, тогда

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19 \quad (\cdot 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ 2a^2+2b^2-ab=38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+b)-ab=2 \quad (\cdot 5) \\ 2(a+b)^2-5ab=38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10(a+b)-5ab=10 \\ 2(a+b)^2-5ab=38 \end{cases}$$

Тогда $2(a+b)^2-10(a+b)=28$

$(a+b)^2-5(a+b)-14=0.$

Если $a+b=s$, то $s^2-5s-14=0$. У этого кв. уравнения два решения:

$s_1=\frac{5+\sqrt{25+56}}{2}=\frac{5+\sqrt{81}}{2}=7$; $s_2=\frac{5-\sqrt{81}}{2}=\frac{5-9}{2}=-2$. Поскольку

$s=x^2+y^2\geq 0$, $s=7$.

Тогда:

$2a+2b-ab=2$

$2a+2(7-a)-a(7-a)=2$

$2a+14-2a-7a+a^2=2$

$a^2-7a+12=2$

$a_1=\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}=4$

$a_2=\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}=3$

Во 1-м случае $a=4$, $b=3$, значит $x=\pm 2$, а $y=\pm\sqrt{3}$

Во 2-м случае $a=3$, $b=4$ значит $x=\pm\sqrt{3}$, а $y=\pm 2$

Задание №2)

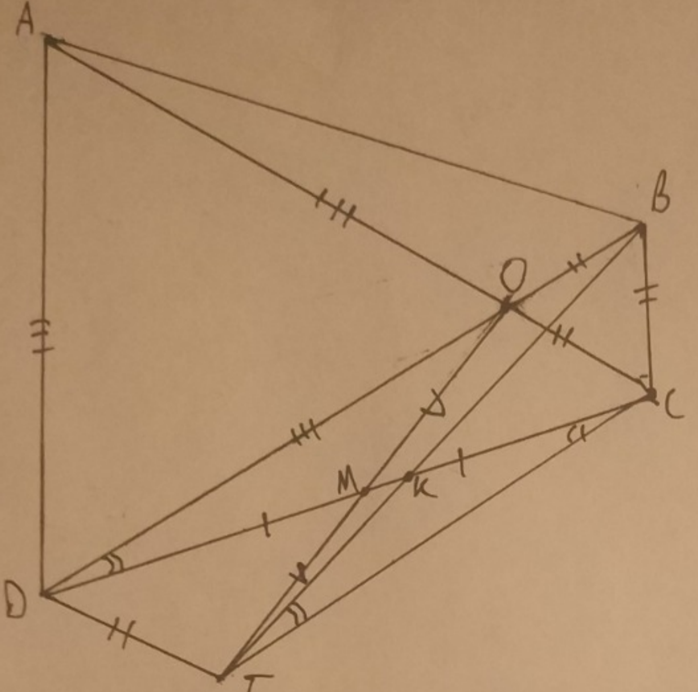
Ответ: $C_{16}^2 + 14\cdot15\cdot16 = 8\cdot15 + 14\cdot15\cdot16 = 120 + 3360 = 3480$

Для начала заметим, что всего различных карточек может быть $16\cdot16 = 16^2$, значит ~~мо~~ фок. может взять абсолютно любую карточку. Если обе карточки, которые он взял — дубли, то способов так сделать — C_{16}^2 (оно равно числу способов выбрать ~~число для 1 кар~~ пару различных чисел из чисел от 1 до 16; ~~одно~~ меньшее из них написать на обеих сторонах 1-й карточки, а 2-е ~~да~~ на 2-й). Если из 2-х карточек только 1 дубль, то число способов их выбрать равно $16\cdot15\cdot14$ (16 способов выбрать число для карточки-дубля, 15 способов выбрать „синее" число для 2-й карточки (одно число уже занято) и 14 способов выбрать „красное" число для 2-й карточки (2 числа уже заняты))

211006795 (U879121 M1278479)

№3) лист 1

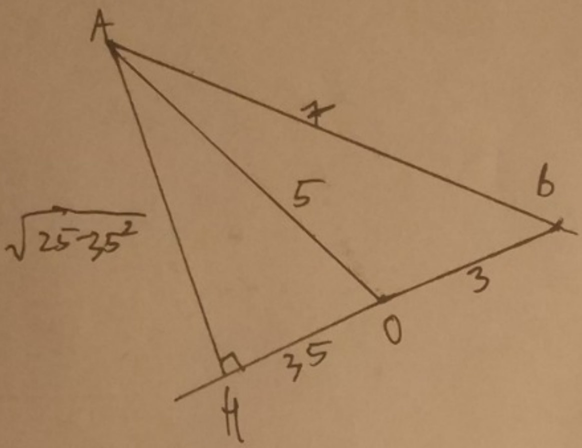
а)



Д-во: пусть M-середина CD. В силу симметрии, $DT = OC = BC$.
При этом $CT \parallel OD$ (так как ~~при~~ из-за симметрии $\angle ODC = \angle DCT$).
Значит $BCTD$ - равнобок. трапеция (это не парал., потому что $OC \parallel DT$, а BC пер. с OC). Следовательно, если K-пересечение BT с CD,
$\angle KCT = \angle KTC = \angle KDB$. $\angle OCD = 180° - \angle COD - \angle ODC = 60° - \angle ODC$; значит
$\angle TBC = 180° - \angle BCT - \angle BTC = 180° - (\angle BCO + \angle OCD + \angle DCT) - \angle ODC =$
$= 180° - (60° + 60° - \angle ODC + \angle ODC) - \angle ODC = 60° - \angle ODC$. Значит $\angle KBD = \angle ODC$
(на самом деле это очевидно из того, что $BCTD$-равнобок. трапеция).
$\Delta OCD = \Delta OAB$ по углу и 2-м сторонам, значит $\angle OBA = \angle OCD = 60° - \angle ODC$.
Тогда $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = 60°$. Аналогично $\angle TAB = 60°$ (ситуация ~~симметричная~~ аналогичная). Значит в ΔATB два угла по $60°$,
значит он правильный.

№3 лист 2)

Теперь пусть $BC=3$, а $AD=5$. Давайте найдём, чему равна сторона AB. Рассмотрим $\triangle ABO$ и прямую OB. Проведём перп. из A на OB. Пусть основание ~~равн~~ — это точка H.



Так-как $\angle AOH=60^\circ$, $OH=\frac{5}{2}=2{,}5$.

Тогда $AH=\sqrt{AO^2-HO^2}=\sqrt{25-2{,}5^2}$, а

$AB=\sqrt{HB^2+AH^2}=\sqrt{5{,}5^2+25-2{,}5^2}=$

$=\sqrt{25+3\cdot 8}=\sqrt{25+24}=\sqrt{49}=7.$

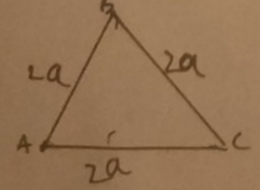
~~Заметим~~ Заметим что если у одного прав. треугольника сторона в k раз больше, чем сторона (рис. внизу) другого, то его ~~пло~~ щадь будет больше в k^2 раз. Тогда

$S_{ABT}=\frac{7^2}{5^2}\cdot S_{AOD}$; $S_{AOB}=\frac{3}{5}\cdot S_{AOD}$ $\left(\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\frac{OD}{OB}\right)$, $S_{OBC}=\frac{3^2}{5^2}\cdot S_{AOD}$,

$S_{OCD}=S_{AOB}=\frac{3}{5}S_{AOD}$. Тогда $S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{AOD}+S_{BOC}+S_{OCD}=\frac{3}{5}\cdot S_{AOD}\cdot 2+S_{AOD}+$

$+\frac{3^2}{5^2}S_{AOD}=S_{AOD}\left(\frac{6}{5}+1+\frac{9}{25}\right)=S_{AOD}\cdot\frac{30+25+9}{25}=S_{AOD}\cdot\frac{64}{25}$. Тогда $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{49}{25}\cdot S_{AOD}}{\frac{64}{25}\cdot S_{AOD}}=$

$=\frac{49}{64}$



$S_{ABC}=\sqrt{3}\,a^2$. При увеличении a в k раз $\sqrt{3}\,a^2$ увеличится в k^2 раз