МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

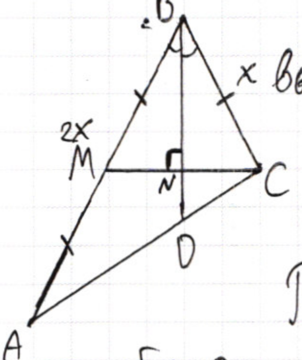
№1. $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2-4\cdot|x-1|+4}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\le 0 \Rightarrow x\ne 0;\ x\ne 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x-1-2)^2}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\le 0$, $(x-1-2)^2\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ - не удовл. усл. } x\ne 3 \\ 4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|<0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|<0$. Поскольку модули >0, $\Rightarrow 4x(x-3)<0$, при этом $|4x(x-3)|>|x|\cdot|x-3|$. $4x(x-3)<0$ $\Rightarrow x\in(0;3)$. ~~Условия~~

При $x\in(0;3)$ $|4x(x-3)|>|x|\cdot|x-3|$ всегда выполняется. Ответ: $x\in(0;3)$

№2. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором бисс. $BD\perp$ медиане CM: $(BD\cap CM=N)$



В получившемся $\triangle MBC$, биссектриса BN также является высотой. $\Rightarrow \triangle MBC$ – равнобедр. $\Rightarrow MB=BC$. Также $MB=MA$, (CM-медиана).

Следовательно во всех таких треугольниках одна из сторон равна удвоенной другой стороне. $a=2\cdot b$

Тогда $P_{ABC}=a+b+c=2b+b+c=3b+c=300$. $c=300-3b$ Таким образом, каждое значение b ~~одним~~ единственным способом задаёт остальные стороны треугольника, а значит и весь треугольник. Чтобы треуг. существовал, должны выполняться неравенства треуг.: $a+b>c$; $b+c>a \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2b+b>300-3b \\ b+300-3b>2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b>300 \\ 4b<300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>50 \\ b<75 \end{cases}$. Следовательно для каждого значения b в промежутке $(50;75)$ существует ровно один треуг., удовлетворяющий условию. Это верно и в обратную сторону: каждому треуг., удовлетв. условию соотв. одно значение b. Итого всего ~~натуральных~~ целых значений b в промежутке $(50;75)$ ~~=~~ $74-51+1=24$. Столько же и треуг.

Ответ: 24

№3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Возведём в квадрат: $y^2-4xy+4x^2=xy \Rightarrow y^2-5xy+4x^2=0$ (I)

$\Rightarrow y=\frac{9-x^2}{2}$ Подставим в первое уравнение:

$$\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-5x\cdot\left(\frac{9-x^2}{2}\right)+4x^2=0 \Rightarrow \frac{81-18x^2+x^4}{4}-\frac{45x-5x^3}{2}+4x^2=0 \quad \Big| \cdot 4$$

$$81-18x^2+x^4-90x+10x^3+16x^2=0 \Rightarrow x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$$

Разложим по методу неопр. коэфф.:

$$(x^2+qx+p)(x^2+mx+n)=0$$

$\begin{cases} q+m=10 \\ q\cdot m+p+n=-2 \\ qn+pm=-90 \\ pn=81 \end{cases}$ Методом подбора находим четвёрку чисел, удовл. системе: $q=2$; $m=8$; $p=-9$; $n=-9$

$(x^2+2x-9)(x^2+8x-9)=0$ — Решаем два квадратных уравнения.

(1): $D=4+36=40$ $x_{1,2}=\frac{-2\pm2\sqrt{10}}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{10} \\ x_2=-1-\sqrt{10} \end{array}\right.$

(2): По теор. Виета: $\begin{cases} x_3+x_4=-8 \\ x_3x_4=-9 \end{cases}$ Подбираем корни: $\left[\begin{array}{l} x_3=-9 \\ x_4=1 \end{array}\right.$

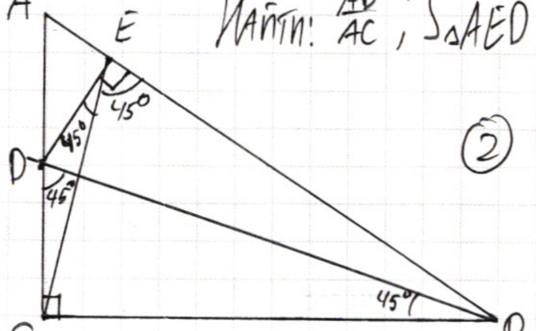
Для каждого полученного корня находим y:

$y_1=\frac{9-(-1+\sqrt{10})^2}{2}=\frac{9-1+2\sqrt{10}-10}{2}=-1+\sqrt{10}$ $y_3=\frac{9-81}{2}=-36$

$y_2=\frac{9-(-1-\sqrt{10})^2}{2}=\frac{9-1-2\sqrt{10}-10}{2}=-1-\sqrt{10}$ $y_4=\frac{9-1}{2}=4$

Ответ: $(-1+\sqrt{10}; -1+\sqrt{10})$, $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$, $(-9; -36)$, $(1; 4)$

№5. Дано: $\triangle ABC$-прямоуг., $\angle C=90^\circ$, $DE\perp AB$, $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, $\angle CED=45^\circ$



Найти: $\frac{AD}{AC}$; $S_{\triangle AED}$ Решение: (1) $\angle CEB=\angle DEB-\angle CED=90^\circ-45^\circ=45^\circ$ ($DE\perp AB$)

(2) $DEBC$ - вписанный четырёх-угольник, т.к. $\angle DEB+\angle DCB=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC=\angle DBC=45^\circ$; $\angle CEB=\angle CDB=45^\circ$. (опир. на одну дугу в описан. окр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDB=\angle DBC \Rightarrow \triangle CDB$ - равнобедр. $\Rightarrow DC=BC=\frac{5}{2}\sqrt{29}$ По условию

$D\in AC \Rightarrow DC<AC$; $\frac{5}{2}\sqrt{29}>\sqrt{29}$. Противоречие $\Rightarrow$ конструкция не существует,

$\Rightarrow$ Задача не имеет решений. Ответ: НЕТ РЕШЕНИЙ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

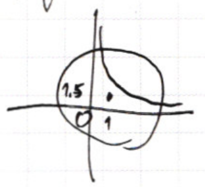
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} |6-3x-2y|>6-|3x|-|2y| & \text{I} \\ (x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2\le \frac{13}{4} & \text{II} \end{matrix}$

II $\Rightarrow$ Все точки лежат ~~вну~~ не снаружи окр. с центром $(1;1{,}5)$ и радиуса $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

I Выполняется всегда, кроме случая $3x+2y<6$, где $x,y\ge 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Площадь фигуры равна площадь круга минус интеграл ~~от~~ ~~интеграла~~ этой функции. Схема:



№7 Заметим, что функция $f(x)$ всегда равна сумме простых делителей числа x. ~~Тогда мы можем сказать~~ $f(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n)=f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_n)$

$f\left(\frac{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n}{p_1}\right)=f(p_2\cdot p_3\cdot p_n)=f(p_2)+f(p_3)+\ldots+f(p_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{p_1 p_2\cdot\ldots\cdot p_n}{p_1}\right)=f(p_1\cdot p_2\ldots p_n)-f(p_1)$. Выполняется для $\forall\, p_i$.

Следовательно, $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$. Расчитаем $f(x)$ для каждого $x\in[3;19]$:

$f(3)=3$	$f(8)=6$	$f(13)=13$	$f(18)=8$
$f(4)=4$	$f(9)=6$	$f(14)=9$	$f(19)=19$
$f(5)=5$	$f(10)=7$	$f(15)=8$	
$f(6)=5$	$f(11)=11$	$f(16)=8$	
$f(7)=7$	$f(12)=7$	$f(17)=17$	

Количество пар x,y таких, что $f(x)-f(y)\le 0$ равно сумме ~~пар~~ возможных вариантов $f(y)<f(x)$ для каждого $f(x)$:

16 для $f(19)$, 15 для $f(17)$, и т.д.: $\cancel{17}+16+15+14+13+9\cdot 3+6\cdot 3+4\cdot 2+2\cdot 2+1=116$

Ответ: 116

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$\frac{9-(1-2\sqrt{10}+10)}{2}=-1+\sqrt{10}$

$\frac{81}{2}=36$

$y_1=-1+\sqrt{10}$

$y_2=-1-\sqrt{10}$

$y_3=\frac{9-1}{2}=4$

$y_4=36$

$\cancel{x^4+5x^3-10x^2-45x+81=0}$

$\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-5x\left(\frac{9-x^2}{2}\right)+4x^2=0$

$\frac{81-18x^2+x^4}{4}-\frac{45x-5x^3}{2}+4x^2=0$

$81-18x^2+x^4-90x+10x^3+16x^2=0$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

$0=(x^2+2x-9)(x^2+8x-9)$

$(x^2+qx+p)(x^2+mx+n)=0$

$D=4+36=40$ $\quad D=64+36=100$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm2\sqrt{10}}{2}$ $\quad x_{1,2}=\frac{-8\pm10}{2}$

$x_1=-1+\sqrt{10}$ $\quad x_3=1$

$x_2=-1-\sqrt{10}$ $\quad x_4=-9$

$\begin{cases} q+m=10 \\ qm+p+n=-2 \\ qn+pm=-90 \\ pn=81 \end{cases}$

2 8 $\quad x^2$

-9 -9

82	30	18

84	80	32	28	20	10

$x=$

$|6-3x+2y|>6-|3x|-y$

$|3x|+|2y|<6$

№6

$|6-3x-2y|>6-|3x|-|2y|$ $\quad +xy?$

$|x+y|\le|x|+|y|$ $\quad$ Если $x,y>0\Rightarrow|6-3x-2y|\ge6-|3x|-|2y|$

$|x-y|$ $\quad$ Если $x,y<0\Rightarrow|6-3x-2y|\ge6-|3x|$

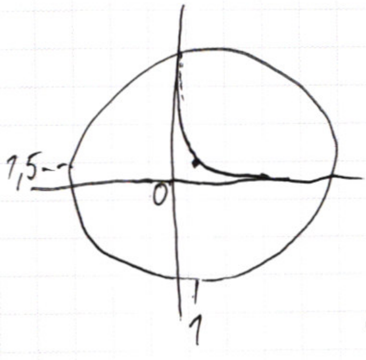
$-|x+y|\ge-|x|-|y|$

$\cancel{(x-2)^2}\le13$

$(1;1,5)$ - центр окр. R $\frac{\sqrt{13}}{2}$

$3x+2y<6$

$\frac{1}{10000}$



№6 ±406

$\frac{16\cdot17}{2}=406$

30

1,5

80

$\frac{10\cdot7}{2}$ 5

$58+27+78+8+1+1$

$80+27+8+1$

28

36

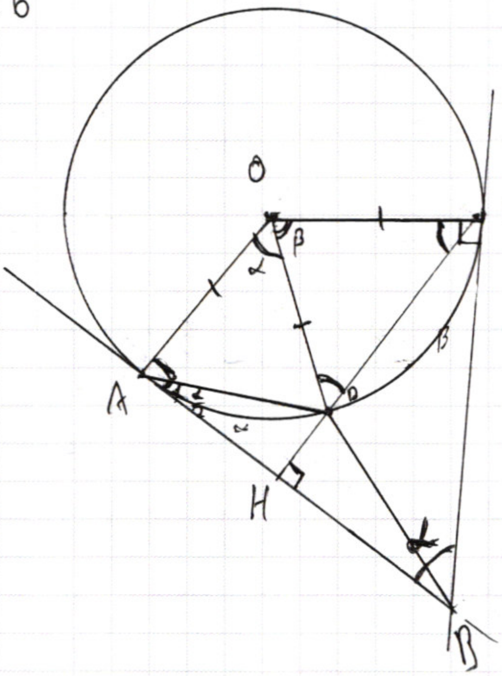
$\boxed{116}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$S_{AED} = 15$

$OC = 6$



① $OA \parallel CH$

$\beta = 180° - 2\alpha$

② $\angle ABC = \alpha$!

O $\frac{DH \cdot AB}{2} = 15$

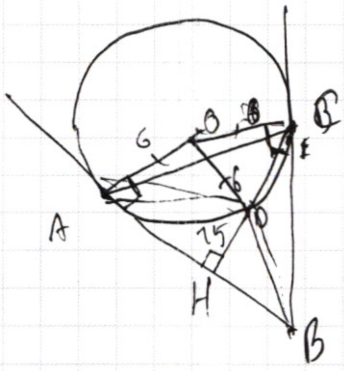
☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1234567

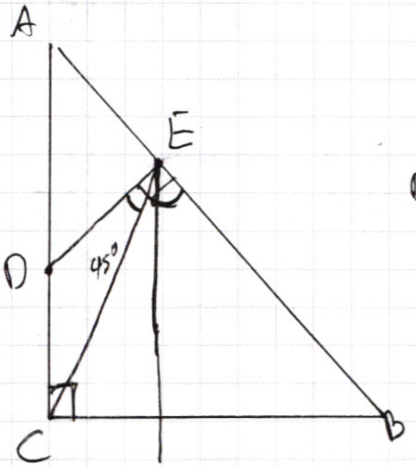


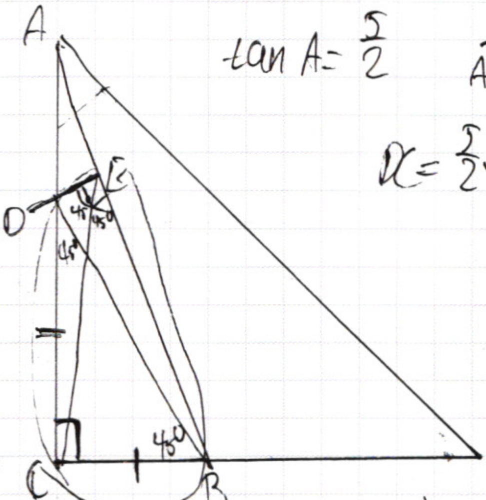
$\frac{AB}{CH}$

№5

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

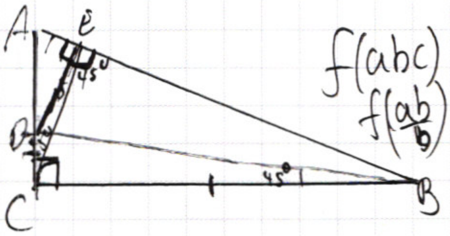




$\tan A = \frac{5}{2}$ $\frac{DE}{AE} = \frac{5}{2}$

$DC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$

№5 ✓?



$f(abc) = f(a) + f(b) + f(c)$ $f(abc) = f(a) +$

$f\left(\frac{ab}{b}\right) = f(b)$

$\Leftarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(p_1 p_2 \ldots p_3) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) \\ f\left(\frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{p_2}\right) = f(p_1 \cdot p_3 \ldots p_n) = f(p_1) \ldots \end{array}}$

№6 $\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{y}{3}\right| + \left|1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right| > 1 \\ \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{6} \le 0 \end{cases}$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{6} \ge 0$

$(x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \le 0$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{13}{4}$

$(1; 1{,}5)$ - центр окр. R. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

$f(3) = 3$ $f(15) = 3 + 5 = 8$

$f(5) = 5$ $f(b) = f(ab) - f(a)$ $16 + 15 + \ldots + 1$

$f(7) = 7$

$f(11) = 11$ $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$ $\frac{8}{16} \cdot 17 =$

$f(13) = 13$

$f(17) = 17$ $f\left(\frac{15}{3}\right) = 8 - 3 = 5$

$f(19) = 19$ $\boxed{17} \rightarrow 16$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ 19 $16 \rightarrow 15$ $\times \frac{17}{8}$ 136

3

27 ✓

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

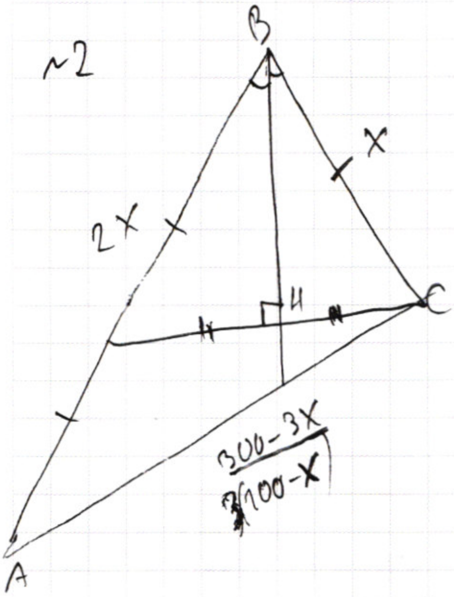
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$ $\frac{(x-1)^2-4|x-1|+4}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$ $\frac{(x-1-2)^2}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$ $\frac{(x-3)^2}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$

$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|<0$ $4x(x-3)<0$ $x\in(0;3)$

$4x(x-3) < x(x-3)$ ✓

№2



$x+2x>300-3x$ $6x>300$ $\boxed{x>50}$

$x+300-3x>2x$ $300>4x$ $\boxed{x<75}$

$2x+300-3x>x$ $300>2x$ $x<150$

300|4, 28|75, 20

10

59 60

51 52

50 100 150

75 150 75

1+2 297

2+4 294

99 198 3

$\boxed{y=\frac{9-x^2}{2}}$

$-\frac{74}{51}$ 23 $\boxed{24}$ ✓

$(y-2x)^2=xy$ $y-2x=\sqrt{xy}$

ОДЗ $y-2x\geq 0$

$y\geq 2x$

$9\geq 4x+x^2$ 9

$x(x+4)\leq 9$

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y=9-x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-5xy+4x^2=0 \\ y=\frac{(3-x)(3+x)}{2} \end{cases}$

84, 66, 72, 56

$\begin{cases} 2y-4x=2\sqrt{xy} \\ 2y=9-x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 9-x^2-4x=\sqrt{x(9-x^2)\cdot 2} \end{cases}$ $\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-\frac{5x(9-x^2)}{2}+4x^2$

$x^2+4x-9\leq 0$

$\frac{81-18x^2+x^4}{2}-\frac{45x-5x^3}{2}+4x^2=0 \Rightarrow x^4+5x^3-10x^2-45x+81=0$

16

$(x^2+qx+p)(x^2+mx+n)=0$

$xy\geq 0$

$\sqrt{xy}\geq 0$

$(\sqrt{xy})^2\geq 0$

$|xy|\geq 0$

$(x+2)^2\leq 13$

$|x+2|\leq\sqrt{13}$

x^4

$y-2x\geq 0$

$y\geq 2x$

$9=2y+x^2\geq 4x+x^2$

$x^2+4x-9\leq 0$

$(x+2)^2-5\leq 0$

$(x+2)^2\leq -5$

$4x\leq x^2$

$4\leq x$

$m+q=5$ 5

$qm+n+p=-10$ 5·2

$qn+pm=-45$ $-3^2\cdot 5$

$pn=81$ -3^4

$9\geq\sqrt{xy}$

3 3 3 3

82 80 78

8 13, 7 12, 6 11, 5 10, 4 9, 3 8, 2 7, 1 6, 0 5, 1 4, 2 3, 4 6

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)