

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

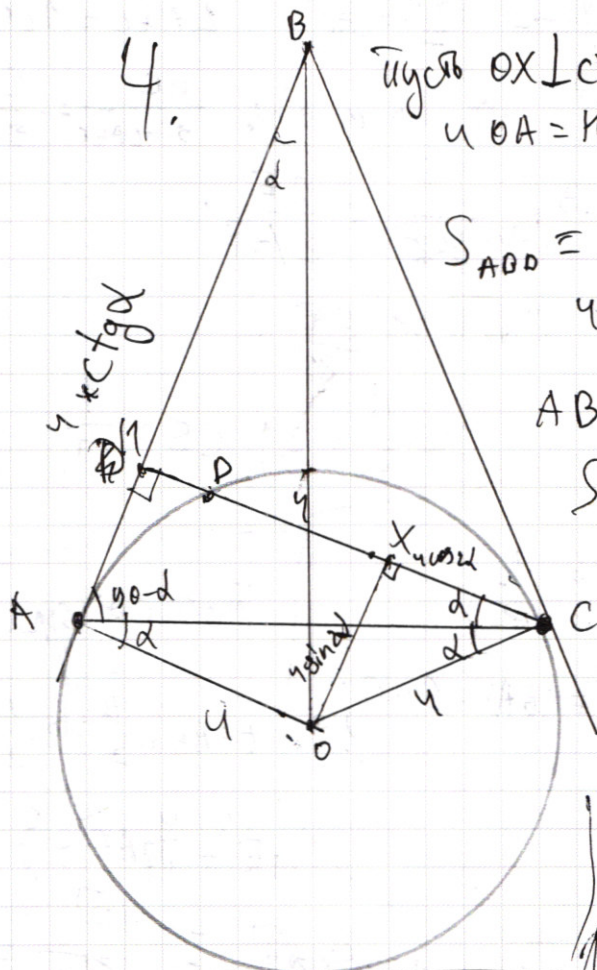
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



угол $\angle OX \perp CX$. Тогда $CX = 4 \cos 2\alpha$. Но $CX = XD$,
и $OA = R$. Поэтому $CH = 4 + 4 \cos 2\alpha$, а
 $CD = 2 \cdot 4 \cos 2\alpha$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} HD \cdot AB; \quad HD = CH - CD =$$

$$4 + 4 \cos 2\alpha - 8 \cos 2\alpha = 4(1 - \cos 2\alpha)$$

$$AB = 4 \operatorname{ctg} \alpha$$

$$S_{ABD} = 8 \operatorname{ctg} \alpha (1 - \cos 2\alpha)$$

$$6 = 8 \operatorname{ctg} \alpha (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (1 - 2 \sin^2 \alpha) =$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

Тогда $OX = 3$, $XC = \sqrt{7}$, $CH = 4 + \sqrt{7}$

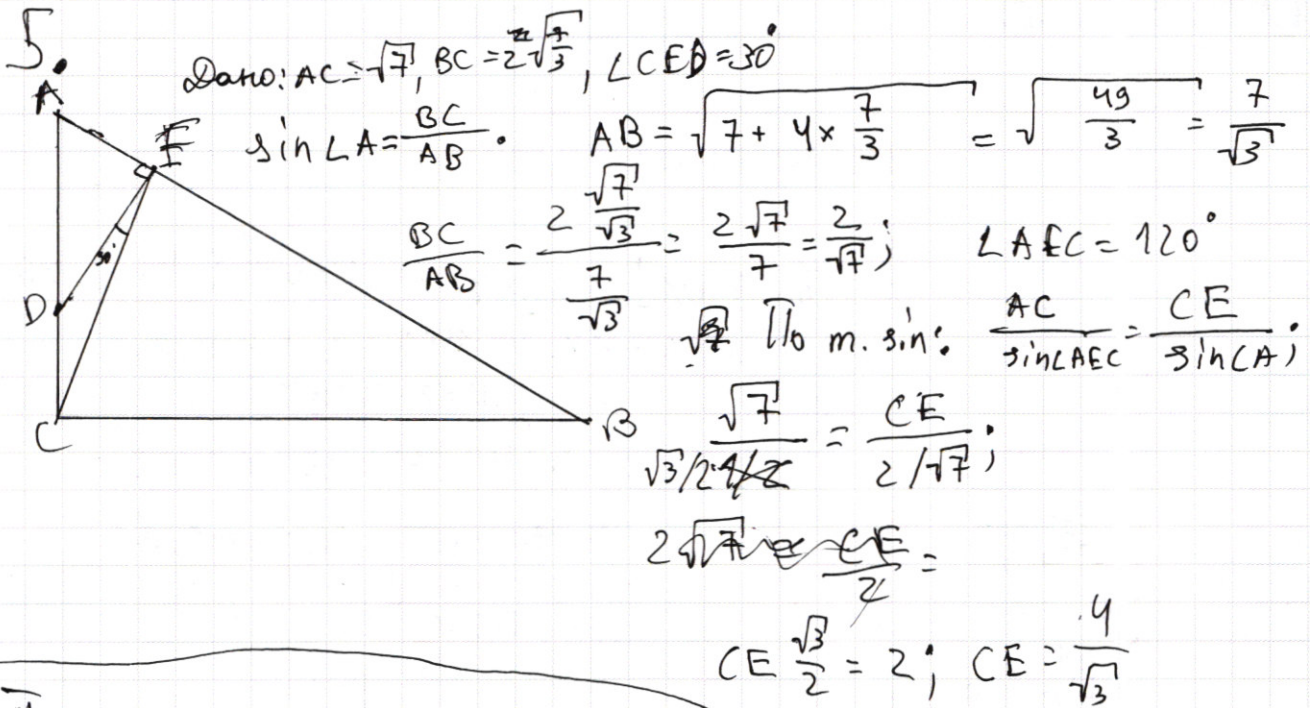
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (4 + \sqrt{7})^2}}$$

$$= \frac{3}{32 + 8\sqrt{7}} \approx \sin \alpha. \quad OB = \frac{128 + 32\sqrt{7}}{3}$$

$$AB \cdot \cos \alpha = \frac{25 + 8\sqrt{7}}{32 + 8\sqrt{7}} \approx \frac{AC}{OB}$$

$$AB = \frac{128 + 32\sqrt{7}}{25 + 8\sqrt{7}}; \quad AB/CH = \frac{32}{25 + 8\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{AB}{CH} = \frac{32}{25 + 8\sqrt{7}}$



~~По т. кос для $\triangle AEC$:~~

~~$AE^2, 7 = AE^2 + \frac{16}{3} + 2 \times AE \times \frac{16}{3} \times \frac{1}{2}$
 $AE^2 + AE \times \frac{16}{3} - \frac{5}{3} = 0$; $3AE^2 + 16AE - 5 = 0$
 $AE = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 4 \times 3 \times 5}}{6}$
 $AE = \frac{16 - \sqrt{256 + 60}}{6}$~~

По т. кос для $\triangle AEC$:

$7 = AE^2 + \frac{16}{3} + 2 \times \frac{1}{2} \times AE \times \frac{4}{\sqrt{3}}$
 $AE^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}AE - \frac{5}{3} = 0$;

$AE = \frac{-\frac{4}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{16}{3} + \frac{20}{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$AD = \frac{1}{\sqrt{3}} / \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $AD:AC = \frac{1}{3}$; $ED = \sqrt{\frac{7}{9}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$; Ответ: $AD:AC = \frac{1}{3}$, $S_{AED} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

Составим таблицу значений $f(x)$ при $x \leq 18$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	7	8

Всего пар различных чисел
от 1 до 18 = $18 \times 17 = 306$.

Посчитаем кол-во пар,
которые принимают
одинаковые значения $f(x)$.

Есть числа $f(5) = 5 = f(6)$.

Это 2 пары $(5, 6)$ и $(6, 5)$.

$f(8) = f(9) = 6$. Это ещё две пары.

$f(7) = f(10) = f(12) = 7$. Это 6 пар 3×2 .

$f(15) = f(16) = f(18) = 8$. Это 6 пар.

f далее все различно.

Всего $2 + 2 + 6 + 6 = 16$ пар.

~~Половина из остав~~

$f(1) = 0$, т.к. $f(1) = f(2) - f(2)$.

$f(4) = 4$, т.к. $f(4) = f(2) + f(2)$

$f(6) = 5$, т.к. $f(6) = f(2) + f(3)$

$f(8) = 6$, т.к. $f(8) = f(2) + f(4)$

$f(9) = 6$, т.к. $f(9) = f(3) + f(3)$

$f(10) = 7$, т.к. $f(10) = f(2) + f(5)$

$f(12) = 7$, т.к. $f(12) = f(3) + f(4)$

$f(14) = 9$, т.к. $f(14) = f(2) + f(9)$

$f(15) = 8$, т.к. $f(15) = f(3) + f(5)$

$f(16) = 8$, т.к. $f(16) = f(4) + f(4)$

$f(18) = 8$, т.к. $f(18) = f(2) + f(9)$

Остальные числа простые.

Эти пары условно не удовлет-

воряют, т.к. $f(y) = f(\frac{y}{x}) + f(x)$,

и если $f(y) = f(x)$, то $f(\frac{y}{x}) = 0$.

Половина из оставшихся удовлетворяют условию, т.к.

если $f(\frac{x}{y}) \neq 0$, то $f(\frac{y}{x}) < 0$. Итого, всего пар $\frac{306 - 16}{2} = \frac{306 - 16}{2} = 145$.

Ответ: 145 пар.

1.

Пусть $x \leq 0$. Тогда $|x-3| = 3-x$, $|x-2| = 2-x$, $|x| = -x$.

$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2(3-x)}{2x^2 - 4x + (-x)(2-x)} \leq 0$, если $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq \frac{(x-2)^2}{3x^2 - 6x} \leq 0$, но в эти дроби положительны или $= 0$ и числитель, и знаменатель, в случае $x=0$ дроби не определены.

если $0 < x \leq 2$, то $|x-3| = 3-x$, $|x-2| = 2-x$, $|x| = x$;

$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2(3-x)}{2x^2 - 4x + x \cdot (2-x)} \leq 0$, если $\frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x} \leq 0$, но ~~числитель~~ и

~~числитель~~, и знаменатель, т.к. ~~x^2~~ x^2 числитель

положителен, а знаменатель отрицателен, т.к.

$(x^2 - 2x) = (x-2)x$. $x > 0$, $(x-2) < 0$. ~~т.е.~~

при $x=2$ дроби не определены. $0 < x < 2$ подходит

если $2 < x \leq 3$, то $|x-3| = 3-x$, $|x-2| = x-2$, $|x| = x$;

$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2(3-x)}{2x^2 - 4x + x(x-2)} \leq 0$ если $\frac{(x-2)^2}{3x^2 - 6x} \leq 0$. здесь положитель-

ны и знаменатель, и числитель, т.к. $3x^2 - 6x =$

$3x(x-2)$, $x > 0$, $(x-2) > 0$.

Если $x=3$, то $|x-3| = x-3$, $|x-2| = x-2$ и $|x| = x$;

$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2(x-3)}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq 0$, если $\frac{(x-4)^2}{3x^2 - 6x}$. но и чис-

литель, и знаменатель > 0 , т.к. в числителе квадрат.

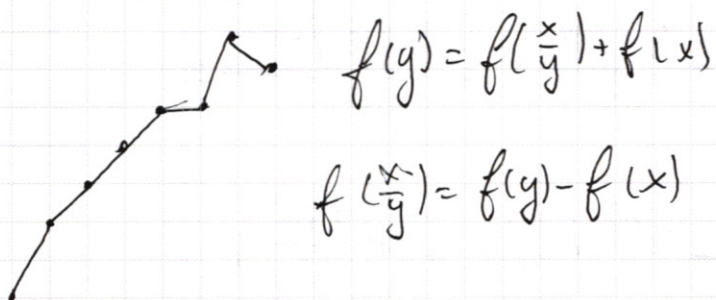
(как и в предыдущих случаях) а $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

$x > 0$, $x-2 > 0$. Ответ: $0 < x < 2$;

$f(z)$

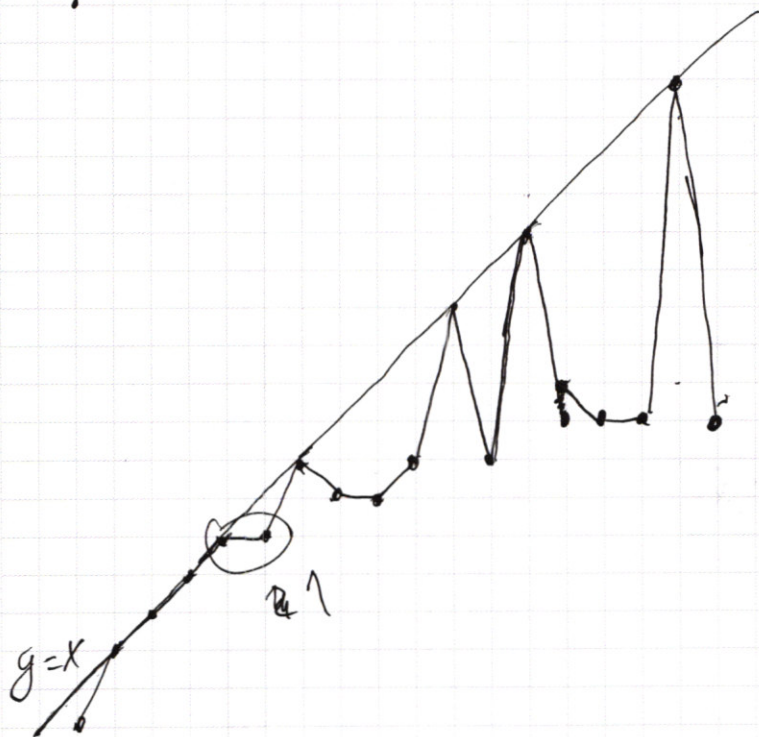
324

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8



$$f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) - f(x)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

B.

$$AD = \frac{AE}{\cos \angle A} = \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{14}{3}}\right) \sqrt{3}}{\sqrt{7} \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{14}{3}}\right) \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{7} = \left(1 + \frac{\sqrt{14}}{3}\right) \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7} + \frac{7\sqrt{2}}{3};$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7} - \frac{7\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{7}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$x^2 + y^2$$

$$y^2 + 2y = 5 - \sqrt{xy}$$

$$y^2 + 2y = 5 - \sqrt{xy}$$

$$y^2 + 2y - 5 = -\sqrt{xy}$$

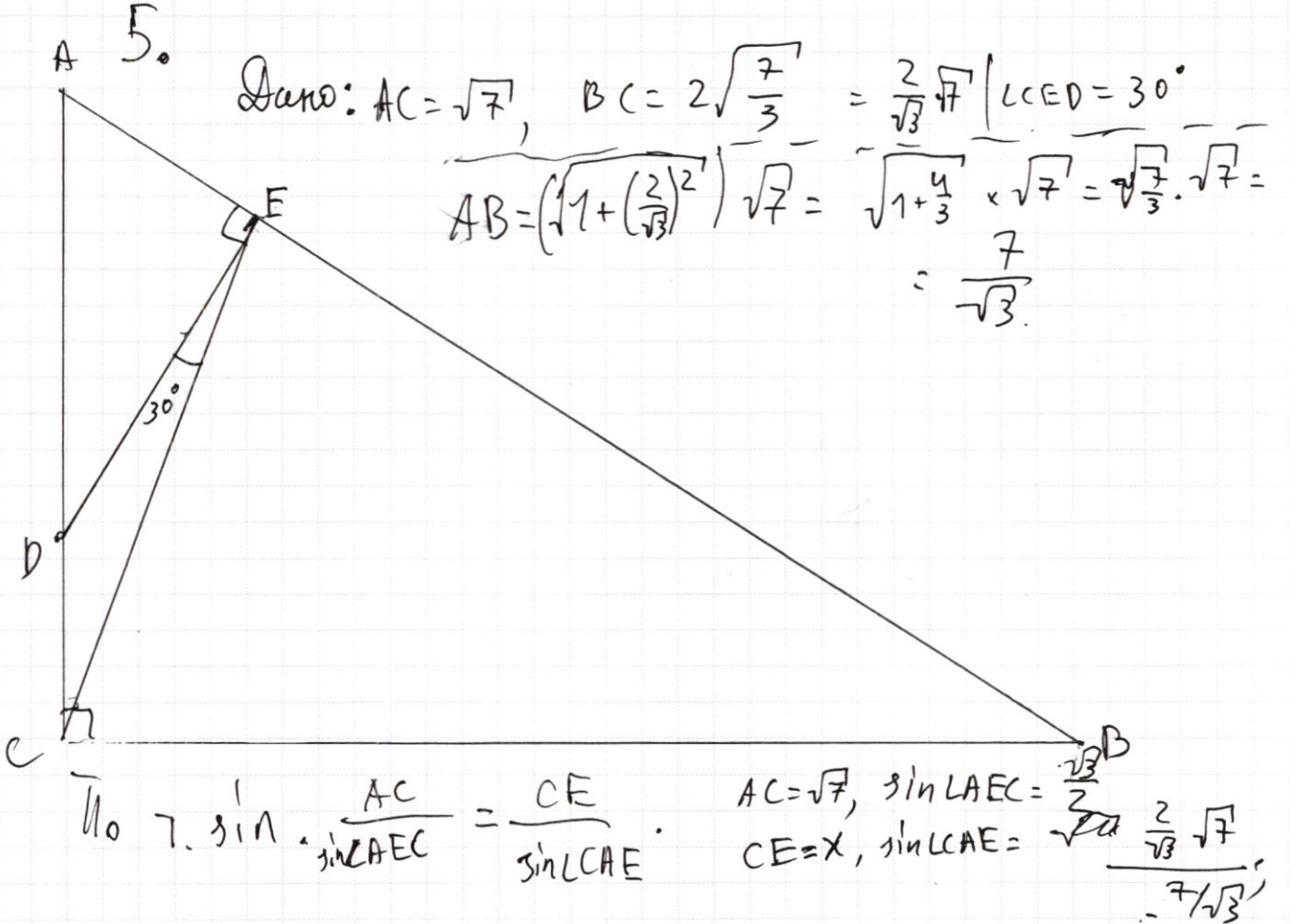
$$y^2 + 2y$$

$$x = 5 - y^2 \quad x - 2y =$$

$$\text{т } 5 - y^2 - 2y = \sqrt{y(5 - y^2)}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



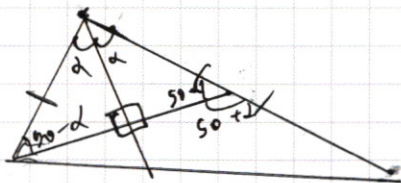
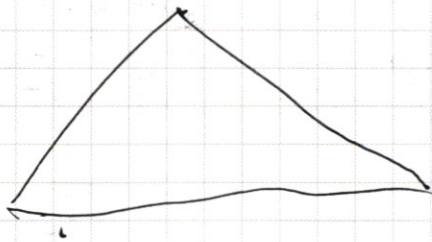
$$\frac{\sqrt{7} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{x \cdot 7}{2\sqrt{7}}; \quad x \cdot 7 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 7; \quad x = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

Пусть $AE = y$. $\cos \angle CAB = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; тогда

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = (\sqrt{7})^2 + x^2 - 2 \times \sqrt{7} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}};$$

$$\frac{16}{3} = 7 + x^2 - 2\sqrt{3}x; \quad x^2 - 2\sqrt{3}x - \frac{5}{3} = 0; \quad x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + \frac{20}{3}}}{2} =$$

$$\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{56/3}}{2} = \sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{14/3}}{1} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{14}}{\sqrt{3}}$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)