МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$

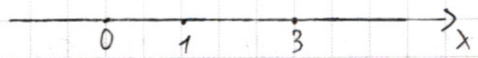
ОДЗ: $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| \neq 0$, так как стоит в знаменателе.

$|x|$ − неотрицательное из чисел $x, -x$; $|x-3|$ − неотрицательное из чисел $x-3$, $3-x$. Значит, $|x|\cdot|x-3| = (\pm x)(\pm(x-3)) = \pm x(x-3)$, при этом произведение модулей неотрицательно, значит, $|x|\cdot|x-3| =$
$= |x^2-3x|$.

Если $x^2-3x \geq 0$, то $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| = 4x(x-3)+(x-3)x = 5x(x-3) \Rightarrow$
$\Rightarrow x\neq 0,\ x\neq 3$ (при $x=0$ или $x=3$ $x^2-3x=0\geq 0$.)

Если $x^2-3x \leq 0$, то $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| = 4x(x-3) - x(x-3) = 3x(x-3) \Rightarrow$
$\Rightarrow x\neq 0,\ x\neq 3$ (при $x=0$ или $x=3$ $x^2-3x=0\leq 0$). ОДЗ: $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$

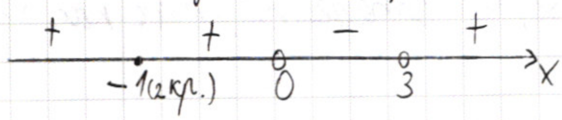
Рассмотрим подмодульные нули: 0, 1, 3.



1) Если $x<0$.

$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} = \frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$

Решим методом интервалов



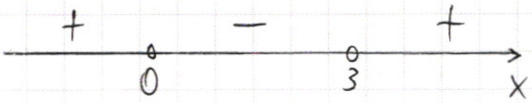
Итак, $x\in\{-1\}\cup(0;3)$. Но в рассматриваемом случае $x<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=-1$.

2) Если $0<x\leq 1$.

$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow x\in\{-1\}\cup(0;3) \Rightarrow$ в этом случае $x\in(0;1]$

3) $1 \le x < 3$.

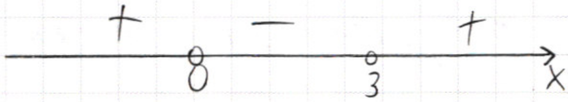
$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} = \frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)} = \frac{x^2-6x+9}{3x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \le 0.$$



Значит, $x \in (0;3)$. Но в рассматриваемом случае $1 \le x < 3 \Rightarrow$ $x \in [1;3)$.

4) $x > 3$.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \le 0.$$



Значит, $x \in (0;3)$. Но в рассматриваемом случае $x > 3$. Следовательно, в этом случае нет решений.

Итак, $x \in \{-1\} \cup (0;1] \cup [1;3)$.

Ответ: $x \in \{-1\} \cup (0;3)$.

3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$

Так как $\sqrt{xy}$ определён, то $xy \ge 0 \Rightarrow x \ge 0, y \ge 0$ или $x \le 0, y \le 0$.

Разберём эти случаи.

1) $x \ge 0$, $y \ge 0$.

$y-2x=\sqrt{xy}$

$y-x=x+\sqrt{xy}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ $\quad$ $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ определены, так как $x \ge 0, y \ge 0$.

$(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

Если $x=0, y=0$, то $2y+x^2=0 \ne 9$. Значит, $x \ne 0$ или $y \ne 0 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} \ne 0$.

$(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \quad |:(\sqrt{x}+\sqrt{y})$;

$\sqrt{y}=2\sqrt{x}$

$y=4x$.

$2y+x^2=9$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x+x^2-9=0.$

$x_1=1$, $x_2=-9$. Но в рассматриваемом случае $x\geq 0 \Rightarrow x=1$.

$x=1$, $y=4x=4$.

2) $x\leq 0$, $y\leq 0$.

Обозначим через $p=-x$, $q=-y$. ($p\geq 0$, $q\geq 0$).

$y-2x=2p-q$

$xy=pq \Rightarrow \sqrt{xy}=\sqrt{pq}$

$2y+x^2=p^2-2q$

Итак, теперь мы имеем эквивалентную систему

$$\begin{cases} 2p-q=\sqrt{pq} & (1) \\ p^2-2q=9. & (2) \end{cases}$$

$p-q=\sqrt{pq}-p$

$(\sqrt{p}-\sqrt{q})(\sqrt{p}+\sqrt{q})=\sqrt{p}(\sqrt{pq}-\sqrt{p})$ (3) $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ определены, так как $p\geq 0$, $q\geq 0$.

Если $\sqrt{q}=\sqrt{p}$, то $p=q$ $2p-q=p=\sqrt{pq}$ (1)

(2) $p^2-2p=9$

$p^2-2p-9=0$

$D=4+4\cdot 9=40.$

$p_1=\frac{2+2\sqrt{10}}{2}$ $p_2=\frac{2-2\sqrt{10}}{2}$

$p_1=1+\sqrt{10}$ $p_2=1-\sqrt{10}<0$, так как $\sqrt{10}>\sqrt{9}=3$.

Но $p\geq 0 \Rightarrow p=1+\sqrt{10}$.

Итак $p=q=1+\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ $x=y=-1-\sqrt{10}$. Теперь разберем случай $\sqrt{p}\neq\sqrt{q}$.

(3) $(\sqrt{p}-\sqrt{q})(\sqrt{p}+\sqrt{q})=\sqrt{p}(\sqrt{q}-\sqrt{p})$ $|:(\sqrt{p}-\sqrt{q})\neq 0$.

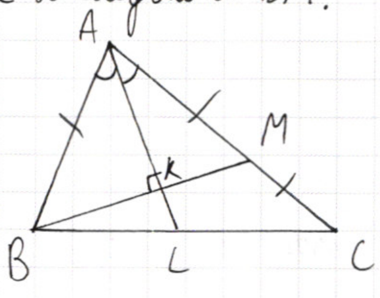
$\sqrt{p}+\sqrt{q}=-\sqrt{p}$.

$2\sqrt{p}+\sqrt{q}=0$, что возможно только если $p=q=0$, так как корень неотрицателен.

$p=q=0 \Leftrightarrow x=y=0$, но это не является решением системы по доказанному.

Ответ: $(1;4)$, $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$

2. Заметим, что перпендикулярные биссектриса и медиана не могут выходить из одной вершины, так как угол между ними не больше, чем угол между биссектрисой и сторонами, выходящими из этой вершины, то есть не больше половины угла треугольника, следовательно, меньше $90°$. Значит, биссектриса и медиана выходят из разных вершин. Пусть дан $\triangle ABC$. Без ограничения общности предположим, что перпендикулярны биссектриса AL и медиана BM.



Пусть $AL \cap BM = K$.

Так как в $\triangle ABM$ AK является биссектрисой и высотой, то $AB=AM$. Значит, в $\triangle ABC$ ~~одна от~~ $AC=2AB$. При этом все рассуждения равносильны, то есть если в $\triangle ABC$ $AC=2AB$, то биссектриса из A и медиана из B перпендикулярны.

Пусть $AB=a$. Тогда $AC=2a \Rightarrow BC=300-3a$, так как $P_{ABC}=300$ по условию. Так как мы ищем треугольники с целочисленными сторонами, кроме того положительными, то $a>0$, $300-3a>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a<100$. Значит, a может принимать 99 разных значений: 1, 2, 3 . . . 99. При этом по неравенству треугольника

$a+2a>300-3a \Rightarrow 6a>300 \Rightarrow a>50 \Leftrightarrow a\geq 51$.

$a+300-3a>2a \Rightarrow 300>4a \Rightarrow a<75 \Leftrightarrow a\leq 74$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, a принимает только $74-50=24$ различных значения: $51, 52 \dots 74$.

Докажем, что никакие два из треугольников со сторонами $a, 2a, 300-3a$, где $51 \leq a \leq 74$ не совпали. Предположим противное. Тогда для каких-то a_1, a_2, где $51 \leq a_1 \leq 74$, $51 \leq a_2 \leq 74$ стороны $a_1, 2a_1, 300-3a_1$ в каком-то порядке равны сторонам $a_2, 2a_2, 300-3a_2$. Без ограничения общности предположим, что $a_1 < a_2$. Тогда $2a_2 > 2a_1 > a_1 \Rightarrow 2a_2$ может совпасть только с $300-3a_1$. $a_1 < a_2 < 2a_2 \Rightarrow a_1$ может совпасть только с $300-3a_2$. Итак,

$$\begin{cases} a_1 = 300-3a_2 \quad (1) \\ 2a_2 = 300-3a_1 \quad (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $a_1 - 2a_2 = 3a_1 - 3a_2$

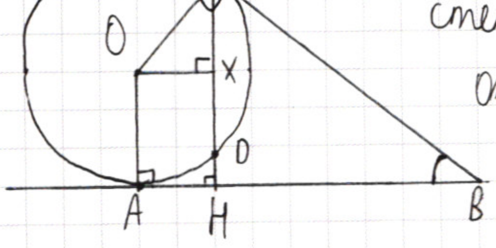
$a_2 = 2a_1$

(1) $a_1 = 300-3a_2$

$a_1 = 300 - 6a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{300}{7}$ – нецелое число.

Ответ: 24 треугольника.

4.



(1) $AH^2 = HD \cdot HC$, так как это различные записи степени точки H относительно данной в задаче окружности.

$S_{ABD} = \frac{DH \cdot AB}{2} = 15$ по условию задачи $\Rightarrow$ $DH \cdot AB = 30$ (2)

$(2):(1)$: $\frac{AB}{CH} = \frac{30}{AH^2}$. При этом $AB = BC$ как отрезки касательных $\Rightarrow$

$\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} = \frac{1}{\sin\angle HBC}$. При этом $\angle HBC = 90^\circ - \angle HCB = \angle OCH$, так как радиус OC, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной BC (аналогично, $OA \perp AB$).

Отметим точку X на CH такую, что $OX \perp CH$. Тогда $AOXH$ — прямоугольник, так как $\angle OAH = 90^\circ = \angle AHX = \angle HXO$. $\Rightarrow OX = AH$.

$$\frac{1}{\sin\angle HBC} = \frac{1}{\sin\angle OCH} = \frac{1}{\frac{OX}{OC}} = \frac{OC}{OX}.$$

Итак, $\frac{30}{AH^2} = \frac{AB}{CH} = \frac{OC}{OX} = \frac{OC}{AH} = \frac{6}{AH}$, так как радиус окружности по условию задачи 6.

$6AH^2 = 30AH \quad |:6AH \neq 0$ (AH — длина отрезка)

$AH = 5$.

$\frac{AB}{CH} = \frac{6}{AH} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{AB}{CH} = \frac{6}{5}$.

7. $f(2) = f(1\cdot 2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$.

$f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(5) = 5$, $f(7) = 7$, $f(11) = 11$, $f(13) = 13$, $f(17) = 17$, $f(19) = 19$, так как $f(p) = p$ для любого простого p.

$f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 4$.

$f(6) = f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = 5$.

$f(8) = f(2\cdot 4) = f(2) + f(4) = 6$

$f(9) = f(3\cdot 3) = f(3) + f(3) = 6$

$f(10) = f(2\cdot 5) = f(2) + f(5) = 7$

$f(12) = f(3\cdot 4) = f(3) + f(4) = 7$

$f(14) = f(2\cdot 7) = f(2) + f(7) = 9$

$f(15) = f(3\cdot 5) = f(3) + f(5) = 8$

$f(16) = f(2\cdot 8) = f(2) + f(8) = 8$

$f(18) = f(2\cdot 9) = f(2) + f(9) = 8$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x})$
$\overset{\shortparallel}{0}$

Значит, $f(x) = -f(\frac{1}{x})$ для любого $x>0, x\in Q$

$f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y}) = f(x)-f(y)$.

Нам необходимо найти количество пар x, y, где $3\le x\le 19$, $3\le y\le 19$,
$f(\frac{x}{y})<0 \iff f(x)-f(y)<0 \iff f(x)<f(y)$.

Среди значений $f(x)$, где $3\le x\le 19$ есть одна 3, ~~две~~ одна 4, две 5, две 6 три 7, три 8, одна 9, одна 11, одна 13, одна 17, одна 19.
Аналогично среди значений $f(y)$, где $3\le y\le 19$.

Если $f(x)=3$, то есть 16 вариантов y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=4$, то есть 15 вариантов y таких, что $f(x)<f(y)$.
Если $f(x)=5$ (в двух случаях), то есть 13 вариантов y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=6$ (в двух случаях), то есть 11 вариантов y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=7$ (в трёх случаях), то есть 8 вариантов y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=8$ (в трёх случаях, то есть 5 вариантов y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=9$, то есть 4 варианта y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=11$, то есть 3 варианта y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=13$, то есть 2 варианта y таких, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=17$, то есть 1 вариант y, что $f(x)<f(y)$
Если $f(x)=19$, то $f(x)\ge f(y)$ при любом y.

Итак, искомых пар $16+15+2\cdot13+2\cdot11+3\cdot8+3\cdot5+4+3+2+1=$
$=16+10+15+15+26+22+24=40+40+48=128$.

Ответ: 128 пар.

6. Докажем вспомогательную лемму: $|a|+|b|\ge|a+b|$, причем равенство достигается только, когда a и b одного знака или ~~одно из~~ хотя бы одно из них 0.
Доказательство: если $a\ge0$, $b\ge0$ $|a|+|b|=a+b=|a+b|$. Если $a\le0$, $b\le0$ $|a|+|b|=-a-b=$ $=|a+b|$.
Если $a\ge0$, $b\le0$, $|a|+|b|=a-b$. $|a+b|=\begin{cases}a+b, \text{ если } a+b\ge0\\ -a-b, \text{ если } a+b\le0\end{cases}$

Если $a+b\ge0$ $\quad a-b>a+b$, так как $b\le0$, то есть $|a|+|b|>|a+b|$
Если $a+b\le0$ $\quad a-b\ge-a-b$, так как $2a\ge0$, то есть $|a|+|b|=|a+b|$, если $a=0$ и $|a|+|b|>|a+b|$

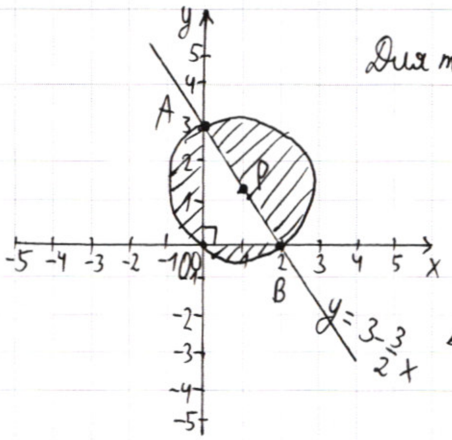
в остальных случаях. Аналогично, если $b \geq 0$, $a < 0$.
Лемма доказана.

$|3x|+|2y|+|6-3x-2y| \geq$ ~~$|3x|+|2y|+$~~ $|3x+2y|+|6-3x-2y| \geq |6|=6$, причем равенство достигается в случае, когда $3x$ и $2y$ одного знака или хотя бы одно из них 0, и когда $6-3x-2y$ и $3x+2y$ одного знака или одно из них равно 0.

Если $x<0, y<0$, то $3x+2y<0$, $6-3x-2y>0$.
~~Если $x=0, y<0$~~ Если $x=0, y<0$ $3x+2y<0$, $6-3x-2y>0$
Если $x<0, y=0$ $3x+2y<0$ $6-3x-2y>0$.
Во всех этих случаях $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$.

Если $x=0, y=0$ – будет равенство

~~Если~~ Значит, равенство будет достигаться только когда $x \geq 0, y \geq 0$, (а значит, $3x+2y>0$, так как случай $x=y=0$ разобран $\Rightarrow 6-3x-2y \geq 0$).



Для точки ~~ниже~~ $M(x;y)$ ниже AB $6-3x-2y>0$

$y=3-\frac{3}{2}x$
$2y=6-3x$
$3x+2y-6=0$.

Отметим точки $A(0;3)$, $B(2;0)$, $O(0;0)$

В таком случае, первому уравнению системы не удовлетворяют только точки $\triangle ABO$.

$x^2-2x+y^2-3y \leq 0 \quad |+3{,}25$.

$(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2 \leq 1+1{,}5^2$.

Отметим точку $P(1;\frac{3}{2})$.

Тогда точки, удовлетворяющие второму неравенству, лежат внутри круга с центром $(1;\frac{3}{2})$ радиуса $\sqrt{1+1{,}5^2}$.

При этом P лежит на AB, так как $\frac{3}{2}=3-\frac{3}{2}\cdot 1$.

Кроме того P – середина AB, так как ~~$P\in A$~~ $AP=\underbrace{\sqrt{1^2+1{,}5^2}}_{}$ $= PB = PC$ как медиана в прямоугольном треугольнике ABO. ($AP=\sqrt{(1-0)^2+(\frac{3}{2}-3)^2}$, $PB=\sqrt{(2-1)^2+(\frac{3}{2}-0)^2}$) То есть ~~круг~~ окружность $(P;\sqrt{1+1{,}5^2})$ – описанная окружность $\triangle ABO$.

Заштрихованная часть плоскости является решением системы.

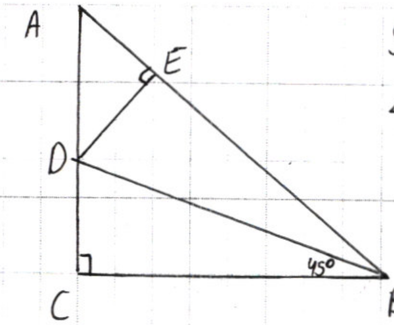
Площадь этой фигуры $S_{кр}-S_{\triangle AOB}=\pi(\sqrt{1+1{,}5^2})^2-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3{,}25\pi-3$.

Ответ: ~~$S=3{,}25\pi-3$~~ $S=3{,}25\pi-3$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

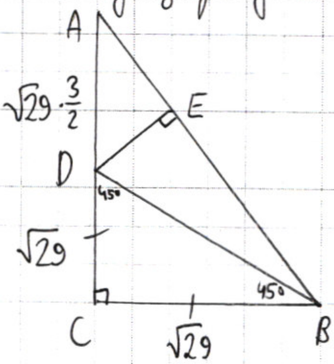
5.



Я считаю, что в условии опечатка. Докажу это:
$\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow DEBC$ – вписанный $\Rightarrow \angle CED = \angle CBD$, так как точки B и E лежат в одной полуплоскости относительно DC.

$\angle CED = 45^\circ$ по условию $\Rightarrow \angle CBD = 45^\circ \Rightarrow \angle CDB = 45^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow CD = CB$. Значит, $AC > CD = CB$. Но AC по условию задачи $AC = \sqrt{29} < \sqrt{29}\cdot\frac{5}{2} = CB$, так как $\sqrt{29}\left(\frac{5}{2} - 1\right) > 0$.

Решу задачу в случае, когда $AC = \frac{\sqrt{29}\cdot 5}{2}$, $BC = \sqrt{29}$.



$CD = CB = \sqrt{29}$

$AD = AC - CD = \sqrt{29}\cdot\frac{5}{2} - \sqrt{29} = \sqrt{29}\cdot\frac{3}{2}$.

$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{29}\cdot\frac{3}{2}}{\sqrt{29}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} = 0,6$.

По теореме Пифагора $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 29\left(1 + \frac{25}{4}\right) = \frac{29^2}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \frac{29}{2}$, так как AB- длина отрезка $\Rightarrow AB > 0$.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по двум углам $\angle DAE = \angle BAC$, $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$. $\frac{AD}{AB}$ – коэффициент подобия.

Значит, $S_{\triangle ADE} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 S_{\triangle ABC} = \left(\frac{\sqrt{29}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{29}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} AC\cdot BC = \cancel{\frac{9}{29\cdot 2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{29}} = \frac{9\cdot\cancel{\sqrt{29}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cancel{\sqrt{29}}}{\cancel{29}\cdot 2} =$

$= \frac{45}{4} = 11,25$.

Ответ: $\frac{AD}{AC} = 0,6$; $S_{\triangle ADE} = 11,25$.

$|a-b| \geq |a|-|b|$

$6-3x-2y=0$

$\frac{6-3x}{2}=y \quad y=3-\frac{3}{2}x$

$f(6)=f(2)+f(3)=5.$ $|3x|+|2y|$

$f(2)=f(1)+f(2)$

$f(1)=0.$

$f(2)=2.$

$f(\frac{1}{2})+f(2)=0.$

$f(\frac{1}{x})+f(x)=0.$

$f(\frac{1}{3})=-3$

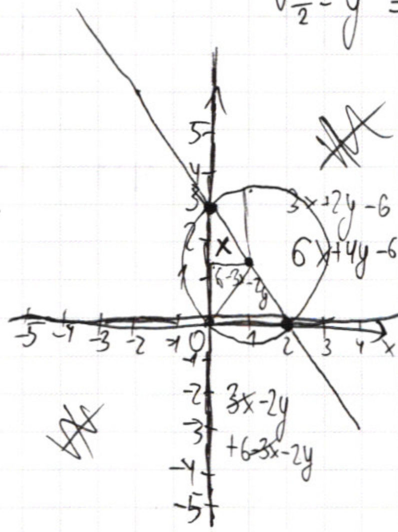
$3x+2y>6$

$3x+2y-6$

$6x+4y-6>6$

$3x-2y$

$+6-3x-2y$



$f(3)=3.$
$f(4)=4.$
$f(5)=5.$
$f(6)=5.$
$f(7)=7.$
$f(8)=6.$
$f(9)=6.$
$f(10)=7.$
$f(11)=11.$
$f(12)=7.$
$f(13)=13.$
$f(14)=9.$
$f(15)=8.$
$f(16)=8.$
$f(17)=17.$
$f(18)=8.$
$f(19)=19.$

17 чисел

3 4 5 6 7 8 9 11 13 17 19

5 6 7 8

7 8

$\frac{\sqrt{13}}{2} > \sqrt{18^2+1}$

$\frac{169}{4} > 325$

$6-4y$

$(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2 \leq 3,25$

17

$\sqrt{1+1,5^2} = \sqrt{1,8^2+10,1}$

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0.$

$16+15+2\cdot 13+2\cdot 11+3\cdot 8+3\cdot 5+4+3+2+1$

$325 = 13\cdot 25$

$\underbrace{31+26+22+24}+15+10=$

$=80+48=128.$

$\times \frac{18}{18}$, 144, 18, 324

3 — 3
4 — 4
5 — 5
5 — 5
6 — 6
6 — 6
7 — 7
7 — 7
7 — 7
8 — 8
8 — 8
8 — 8
9 — 9
11 — 11
13 — 13
17 — 17
19 — 19

$2+4+4+9+9+5=$

$=33.$

$+\frac{17}{17}$, 119, 17, 289

264

132

$|a|+|b| \geq |a+b|$

$a^2+2ab+b^2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

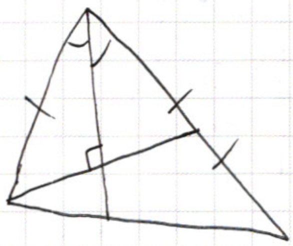
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

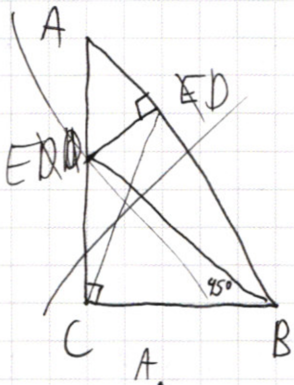
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$a \quad 2a$

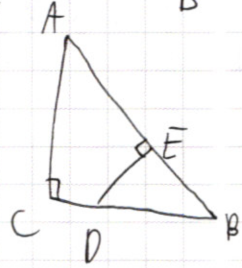


$\cancel{a \leq 2a \leq 300}$

≤ 100

$a \leq 300-3a$

$a \leq 75.$



$1 \quad 2 \quad 297$

$2 \quad 4 \quad 294$

$99 \quad 198 \quad 3$

$a < 2a \quad 300-3a$

$a_1 \quad 2a_1 \quad 300-3a_1$

$2a_1 - a = 3a_1 - 3a$

$2a = a_1$

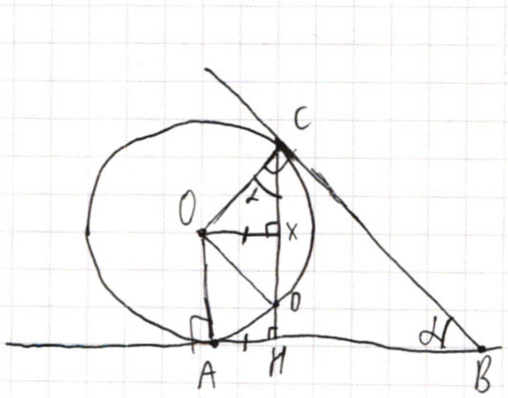
$2a_1 = 300-3a$

$a = 300-3a_1$

$a_1 = 2a$

$300 = 7a$

$OX^2 = DH \cdot DH + DH \cdot 2CX =$



$AH^2 = DH \cdot CH$

$30 = DH \cdot AB$

$\frac{AB}{CH} = \frac{30}{AH^2} = \frac{30}{OX^2} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{OX}{6}} = \frac{6}{OX}$

$\frac{30}{5^2} = \frac{6}{5}.$

$6OX^2 = 30OX$

$OX = 5.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

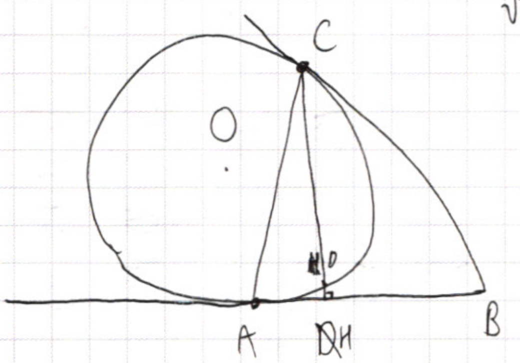
(Нумеровать только чистовики)

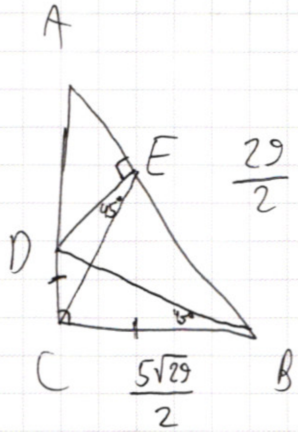
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

$1+\sqrt{10}$ $\quad -2-\cancel{2\sqrt{10}}+1+10+\cancel{2\sqrt{10}}=9$

$\sqrt{29}$





$\frac{29}{2}$

$\frac{5\sqrt{29}}{2}$

$$29\left(1+\frac{25}{4}\right)=\frac{29^2}{4}$$

1.

$4x^2-12x+|x^2-3x|=0$

$4(x^2-3x)+|x^2-3x|$ $\quad x\neq 0,\ x\neq 3.$

$y-2x=\sqrt{xy}$ $\quad y-x=\sqrt{xy}+x$

$2y+x^2=9$

$2y-4x=2\sqrt{xy}$

$2y+x^2=9$

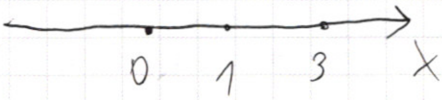
$$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\left(\frac{9-x^2}{2}\right)}$$

$x^2+4x=9-2\sqrt{xy}$

$$9-x^2-4x=2\sqrt{x\left(\frac{9-x^2}{2}\right)}$$

$y^2+4x^2-4xy=xy$

$\cancel{8}2y+4x^2=36$



$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+\cancel{(3x+1)}x(3-x)}$$

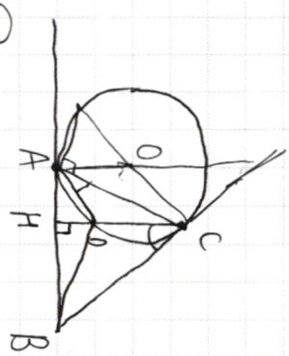
$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)} \le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x^2-9x} \le 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x} \le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \le 0$$

(0; 1)



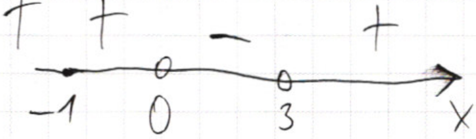
$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \le 0$$

$AB \cdot HD = 30$

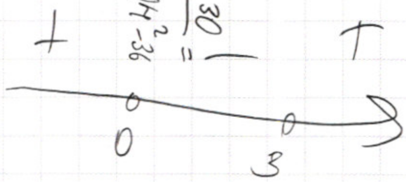
$AH^2 = HD \cdot HC$

$\frac{HC}{AB} = \frac{30}{AH^2} = \frac{30}{AH^2 - 36} = 1$

-1 (0;3) HD < 0.



1

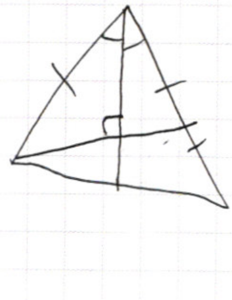


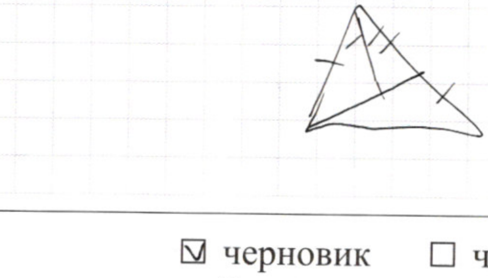
$$\frac{x^2-2x+5}{4x^2-12x+} = \frac{4}{4-12+2} = -\frac{4}{6}$$

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)} = \frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0.$$

$\frac{x-3}{x} \le 0.$ ~~x≤0, при~~ $x \in (1;3).$

$$\frac{(x-3)^2}{4x^2-12x+x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{5x^2-15x} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}.$$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)