МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

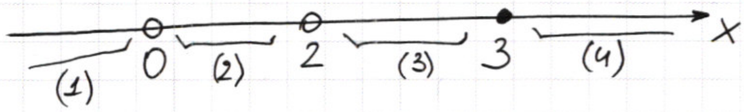
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\quad \dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0.$ $\quad$ ОДЗ: $\begin{cases} x\ne 0, \\ x\ne 2; \end{cases}$



(1) $x<0$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)} \le 0,$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0, \Rightarrow \frac{x-2}{3x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\le 0, \\ 3x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2\ge 0, \\ 3x\le 0, \end{cases} \end{array} \right. \\ \begin{cases} x\ne 0, \\ x\ne 2; \end{cases} \\ x<0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\in[0;2], \\ x\in\{\varnothing\}, \end{array} \right. \\ \begin{cases} x\ne 0, \\ x\ne 2; \end{cases} \\ x<0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in(0;2), \\ x<0; \end{cases} \Bigg| \Rightarrow x\in\{\varnothing\}.$$

(2) $0<x<2$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\le 0, \\ x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x\le 0; \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(0;2), \\ x\in[0;2]; \end{cases} \Rightarrow x\in(0;2)$$

(3) $2<x\le 3$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)} \le 0$$

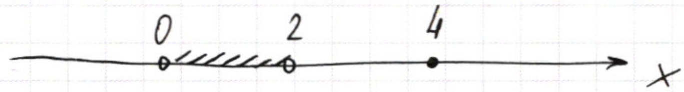
$\dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$ – Аналогично с(1) $\Rightarrow \begin{cases} 2<x\le 3, \\ x\in[0;2]; \end{cases} \Bigg| \Rightarrow x\in\{\varnothing\}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(4) ~~x≥6~~ $x > 3$:

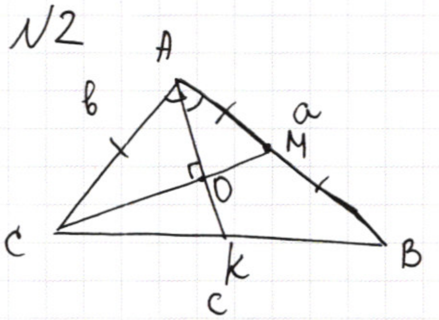
$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x\cdot(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-4)^2 \ge 0, \\ x(x-2) \le 0; \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} (x-4)^2 \le 0, \\ x(x-2) \ge 0, \end{cases}} \\ \begin{cases} (x-4)^2 = 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 2, \\ x > 3; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ \begin{cases} x \in [0;2], \\ x \ne 0, \\ x \ne 2; \end{cases} \\ x > 3; \end{array}\right. \Rightarrow x = 4$$



<u>Ответ:</u> $x \in (0;2) \cup 4$.

N2



$\triangle ABC$ удовлетворяет условиям задачи.

$CM \perp AK$, CM – медиана, AK – биссектриса $\Rightarrow$

$\Rightarrow AO$ в $\triangle AMC$ – биссектриса и высота $\Rightarrow \triangle AMC$ – равнобедренный с основанием CM

Тогда $a = 2b$

По условию $a+b+c = 600$, тогда $3b+c = 600$.

Запишем нер-во треугольника для $\triangle ABC$:

$$\begin{cases} a+b>c, \\ a+c>b, \\ b+c>a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b>c, \\ 2b+c>b, \\ b+c>2b; \end{cases}, \text{ где } a, b, c \text{ – целые положительные числа}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3b>c, \\ c>b; \end{cases} \\ 3b+c=600; \end{array}\right. \Rightarrow \quad b = 200 - \frac{1}{3}c \quad \Rightarrow \begin{cases} 600-c>c, \\ c>200-\frac{1}{3}c; \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 600 > 2c, \\ \frac{4}{3}c > 200; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 300 > c \\ c > 150 \end{cases} \Rightarrow 150 < c < 300$

$c + 3b = 600$
$\quad \vdots 3 \quad \vdots 3 \Rightarrow c \vdots 3$

Для c подходят все целые => числа в промежутке от 150 до 300, кратные 3.

Таких чисел 49 => значений c 49, а значит и значений a и b тоже 49 => Всего $\exists$ 49 треугольников, удовлетворяющих условиям задачи.

Ответ: 49.

№3 $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5; \end{cases}$ ОДЗ: $xy \geq 0$.

$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy, \\ x + y^2 = 5; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy, \\ x + y^2 = 5; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \\ x + y^2 = 5; \end{cases}$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$ — решим отн-о x:

$D = (-5y)^2 - 4 \cdot 4y^2 = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$

$x = \frac{5y \pm \sqrt{9y^2}}{2} = \left[\begin{array}{l} x_1 = 4y, \\ x_2 = y; \end{array} \right.$

Найдём значение y из второго ур-я в системе:

1) $y^2+4y-5=0$

$$y=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\left[\begin{array}{l}y_1=1,\\ y_2=-5;\end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=4,\\ x_2=-20;\end{array}\right.$$

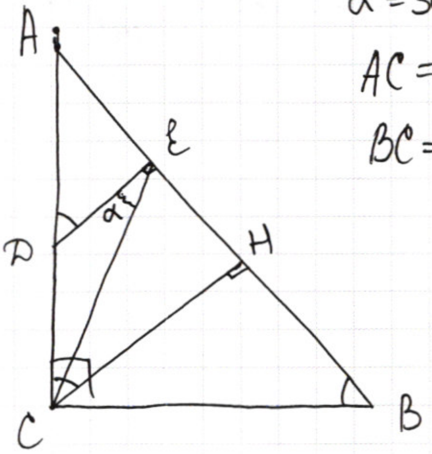
2) $y^2+y-5=0$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}=\left[\begin{array}{l}y_3=\frac{-1+\sqrt{21}}{2},\\ y_4=\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_3=\frac{-1+\sqrt{21}}{2},\\ x_4=\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\end{array}\right.$$

Все полученные произведения пар $(x;y)\geq 0 \Rightarrow$ ~~существуют~~ являются решениями системы.

__Ответ:__ $(4;1);(-20;-5);\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2};\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

№5



$\alpha=30°$

$AC=\sqrt7$,

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$;

Проведём высоту CH в $\triangle ABC$ | $\Rightarrow$
$\angle C$ – прямой

$\Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{7}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}}$.

$\cancel{\frac{CH}{AC}=\frac{BC}{AB}}$

$AB^2=AC^2+BC^2$ (по теореме Пифагора для $\triangle ABC$):

$$AB^2=7+\frac{4\cdot7}{3}=\frac{7\cdot7}{3}=\frac{49}{3}\Rightarrow AB=\sqrt{\frac{49}{3}}=\frac{7}{\sqrt3}.$$

$$\frac{AH}{AC}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{7}{\frac{7}{\sqrt3}}=\sqrt3$$

$$\frac{CH}{AC}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{\sqrt7\cdot2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{\sqrt3}}=\frac{\frac{7\cdot2}{\sqrt3}}{\frac{7}{\sqrt3}}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}DE\perp AB\\ CH\perp AB\end{array}\right|\Rightarrow DE\parallel CH\Rightarrow \angle CED=\angle ECH=30° \Big| \Rightarrow EH=CH\cdot tg\,\alpha=\frac{2}{\sqrt3}\Rightarrow$$

$\angle AHC=90°$

$$\Rightarrow AE=AH-EH=\sqrt3-\frac{2}{\sqrt3}=\frac{1}{\sqrt3}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cancel{AD^\circ}\ \angle DAE=\angle CAH\\ \angle AED=\angle AHC\end{array}\right|\Rightarrow \triangle ADE\sim\triangle ACH \Rightarrow \cancel{\frac{AE}{DE}}\ \frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD=\frac{AC\cdot AE}{AH}=\frac{\sqrt7\cdot\frac{1}{\sqrt3}}{\sqrt3}=\frac{\sqrt7}{3}\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{\frac{\sqrt7}{3}}{\sqrt7}=\frac{1}{3}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AE}{DE} = \frac{AH}{CH} = \cancel{\sqrt{3}} \Rightarrow DE = \frac{AE \cdot CH}{AH} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

$S_{ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{3} = AD : AC$; $S_{AED} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

№7

$f(p) = p$

$f(p) = f(p \cdot 1) = f(p) + f(1) = p + f(1)$ $\Big| \Rightarrow p = p + f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = 0$.

$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n) + f(\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$ $\Big| \Rightarrow$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

$f(p) = p$, где p – простое

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\Big| \Rightarrow$ ф-ция f ищет сумму простых делителей ~~числа~~ аргумента.

Значит, найдем все пары натуральных чисел $(x; y)$ такие, что $f(y) > f(x)$.

$f(1) = 0$	$f(5) = 5$	$f(9) = f(3^2) = 6$	$f(13) = 13$
$f(2) = 2$	$f(6) = f(2 \cdot 3) = 5$	$f(10) = f(2 \cdot 5) = 7$	$f(14) = f(2 \cdot 7) = 9$
$f(3) = 3$	$f(7) = 7$	$f(11) = 11$	$f(15) = f(5 \cdot 3) = 8$
$f(4) = f(2 \cdot 2) = 4$	$f(8) = f(2^3) = 6$	$f(12) = f(2^2 \cdot 3) = 7$	$f(16) = f(2^4) = 8$

$f(17)=17$

$f(18)=f(2\cdot 3^2)=8$

Найдем кол-во ~~подходящих~~ пар $(x;y)$, таких, что $f(x)<f(y)$:

$f(y)=17 \Rightarrow \exists 17$ ~~значений~~ пар, удовлетворяющих условию

$f(y)=13 \Rightarrow 16$ пар

$f(y)=11 \Rightarrow 15$ пар

$f(y)=9 \Rightarrow 14$ пар

$f(y)=8 \Rightarrow 11\cdot 3=33$ пары

$f(y)=7 \Rightarrow 8\cdot 3=24$ пары

$f(y)=6 \Rightarrow 6\cdot 2=12$ пар

$f(y)=5 \Rightarrow 4\cdot 2=8$ пар

$f(y)=3 \Rightarrow 2$ пары

$f(y)=2 \Rightarrow 1$ пара

$f(y)=1 \Rightarrow 0$ пар, в сумме 132 пары $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Значит всего существует 132 пары натуральных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условиям задачи.

Ответ: ~~130 пар~~. 132 пары

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(\frac{1}{n}) = \cancel{-1/f}$ ~~(по лемме)~~

$-f(n)$ (по лемме)

$f(\frac{16}{4}) = f(16) + f(\frac{1}{4}) =$

$\cancel{f(2\cdot1)}$ $f(p\cdot1) = f(p) + f(1) = p + f(1) = f(p) = p \Rightarrow$

$f(16) - f(4) =$

$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n) + f(\frac{1}{n}) = 0$ $f(1) = 0$.

$f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$.

$f(\frac{1}{n}) = -f(n)$.

Найти: кол-во пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \le x \le 18$; $1 \le y \le 18$ и $f(x) - f(y) < 0$ $f(x) < f(y)$

$\Sigma(1)$: $f(1) = 0$

$f(2) = 2$

Сумма делителей у больше суммы простых делителей x

1	0
2	2
3	3
4	4
5	5
6	5
7	7
8	6
9	6
10	7
11	11
12	7
13	13
14	9
15	8
16	8
17	17
18	8

y 1) $y = 17 \Rightarrow x$ – любое число $\ne 17$ (17 вариантов) x

13 $\Rightarrow$ 16 вариантов x

11 $\Rightarrow$ 15 вариантов x

9 $\Rightarrow$ 14 вариантов

8 $\Rightarrow$ 11·3 вариантов

7 $\Rightarrow$ 8·3 вар

6 $\Rightarrow$ 8·2 вар

5 $\Rightarrow$ 4·2 вар

3 $\Rightarrow$ 2 вар

2 $\Rightarrow$ 1 вар

$62 + 5 - 7 + 11 =$
$= 73 + 57 =$
$= 70 + 60 = 130$

$\Sigma_{\text{вариантов}} = 130$

Ответ: 130 пар.

$17 + 16 + 15 + 14 = 62$

$38 \to 52 \to 85 \to 109 \to 121 \to$
$\to 129 \to 132$

$33 + 15 + 14 = 48 + 14 = 62 + 33 = 95 + 24 = 109 + 20 + 3 = 132$

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0; \end{cases}$$

$x, y > 0$:

~~$2x + y + 4 - 2x - y > 4$~~ x

~~$x, y < 0$~~

~~$-2x = 2y$~~

$2x + y + |4 - 2x - y| > 4$

$|4 - 2x - y| > 4 - 2x - y \longrightarrow < 0$

$4 - 2x - y < 0 \Rightarrow 2x + y > 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

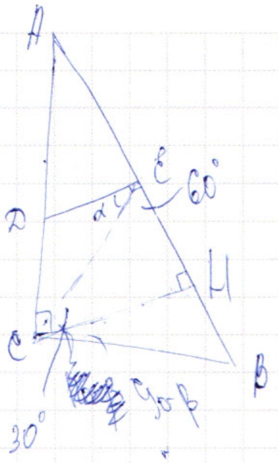
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AC=\sqrt7$

$BC=2\sqrt{\frac73}$ — для вычислений

$\angle CED=\alpha=30°$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad BC=\frac{AC}{\cos\alpha}$

$\cancel{\frac{AD}{DE}=\frac{AB}{BC}}$ $\quad \frac{AE}{DE}=\frac{AC}{BC}=\cos\alpha$

$\frac{AE}{DE}=\cos\alpha$

$\frac{AD}{AC}$

$AE=DE\cos\alpha$

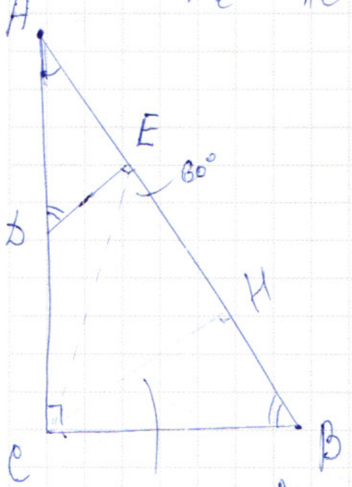
$AB^2=7+4\cdot\frac73=\frac{49}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=\frac{7}{\sqrt3}$

$AD=DE(1+\cos^2\alpha)$

$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{\frac{7}{\sqrt3}}{\sqrt7}=\sqrt{\frac73}$

$\cancel{\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BE}}\cos\alpha\cdot\frac{DE}{AC}$



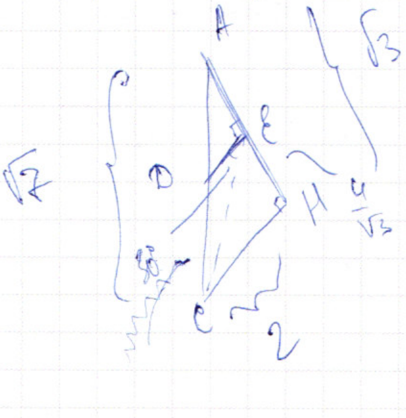
$\frac{AC}{CH}=\frac{AB}{BC}$

$CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{\sqrt7\cdot2\sqrt{\frac73}\cdot\sqrt3}{7}=$

$CH=\frac{2}{\sqrt3}$

$\frac{AH}{AC}=\frac{AC}{AB}$

$AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{7}{\frac{7}{\sqrt3}}=\sqrt3$



$2=\frac{\sqrt3}{2}EH\Rightarrow EH=\frac{4}{\sqrt3}$

$2=f(2)=f(xy)+f\left(\frac1y\right)=$

$f(2)=f\left(5\cdot\frac15\cdot2\right)=$

$=f(2)+f(5)+f\left(\frac15\right)=$

$=2+5+f\left(\frac15\right)=$

$2\Rightarrow$

$\Rightarrow 5+f\left(\frac15\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac15\right)=-5\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac1n\right)=-n$

т.к. $f\left(pn\cdot\frac1n\right)=f(p)+f(n)+f\left(\frac1n\right)=$

$=f(p)=p=$

$=p+n+f\left(\frac1n\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac1n\right)=-n$

QED

$\frac{x}{y}<1$

$y>x$

$\frac23=2\cdot\frac13=$

$=f(2)+f\left(\frac13\right)$

$f\left(\frac pq\right)=p-q$

$p,q\in\mathbb P$

$\frac47=\frac{2\cdot2}{7}=\frac{2+2}{7}\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac47\right)=2+2-7-$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

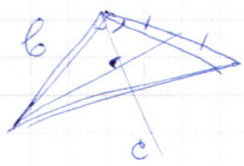
$f(n) = \sum p_i$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \quad 2;9$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2+2 = 4$

$f(12) = f(4) + f(3) = 4+3 = 7$

$\cancel{f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(4 \cdot \frac{1}{16}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{16}\right)}$



$\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$

$3b + c = 600$

$\{b, c\} \in \mathbb{Z}_+$

$a, b, c > 0$

$\begin{cases} a + b > c, \\ b + c > a, \\ a + c > b; \end{cases}$

$\begin{cases} 3b > c \\ b + c > 2b, \\ 2b + c > b; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b > c, \\ c > b, \\ b + c > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 3b + c = 600, \\ 3b > c, \\ c > b; \end{cases}$

$\begin{cases} 600 - c > c, \\ c > 200 - \frac{1}{3}c; \end{cases}$

$\begin{cases} 600 > 2c, \\ \frac{4}{3}c > 200; \end{cases}$

$\begin{cases} 300 > c, \\ c > 150; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \in (150; 300), \\ c \vdots 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3b > c > b \\ c > b \end{cases}$

34455 $\quad$ 21/31 $\quad$ ~~299~~

55

$\underbrace{150, 153, \ldots 300}$

$51 - 2 = 49 \Rightarrow 49$ троек.

Ответ: 49.

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \\ x + y^2 = 5; \end{cases}$

$x: \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{2} = \frac{5y \pm 3y}{2} = \left[\begin{array}{l} x_1 = 4y, \\ x_2 = y; \end{array}\right.$

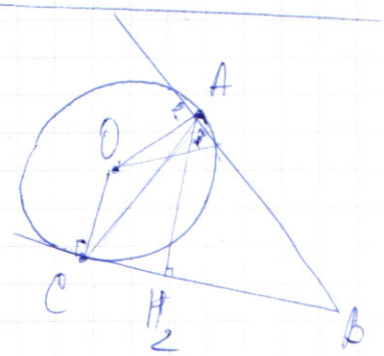
1) $4y + y^2 = 5$

$y^2 + 4y - 5 = 0$

$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \left[\begin{array}{l} y_1 = -12, \\ y_1 = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = -48, \\ x_2 = 4; \end{array}\right.$

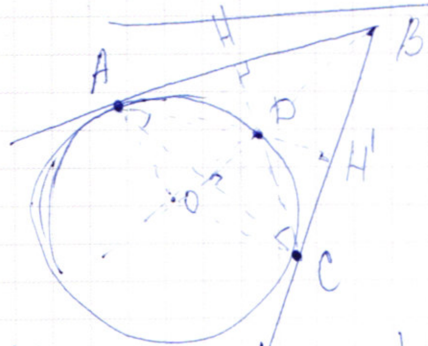
2) $y^2 + y - 5 = 0$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} = \left[\begin{array}{l} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}, \\ y_2 = -\frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2. \end{array}\right.$



$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = S_{ABC}$



$S_{ABD} = 6$

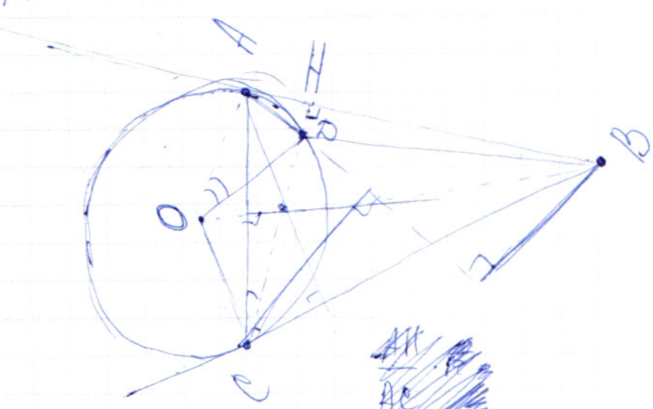
$r = H$

$\frac{AH'}{AB} - ?$

$AB \cdot DH = 12$

$S_{ACB} = S_{ABD} + S_{ADC}$

$\frac{AB}{CH} - ? \quad \frac{BC}{CH}$



$\frac{AH}{BC}$

$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x(x-2) + y(y-4) \le 0, \\ |2x| - 4 + |y| + |4 - 2x - y| > 0; \end{cases}$

$\frac{1}{2} CH \cdot AC \cdot \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CH \quad CD \cdot AC \cdot \frac{AH}{AC} = CD \cdot AH$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy}=5-2y-y^2$

$xy=(5-2y-y^2)^2$

$25-25y-14y^2+5y^3+y^4=0$

$x=5-y^2$

$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}$

$(5-y^2-2y)^2=(5-y^2)y=5y-y^3$

$(5-2y-y^2)^2=25-10y-5y^2-10y-4y^2+2y^3-5y^2+2y^3+y^4=$

$=25-20y-14y^2+4y^3+y^4$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

0, 2, 3; (1), (2), (3), 4

(1) $$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x(x-2)+x(x-2)}\le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x(x-2)\cdot 3}\le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)\cdot 3}\le 0 \qquad \frac{x-2}{3x}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x-2\le 0, \\ 3x\ge 0, \end{cases} \begin{cases} x-2\ge 0, \\ 3x\le 0, \end{cases}\right. \Rightarrow$$

$x\le 0$

$$\left[\begin{cases} x\le 2, \\ x\ge 0, \end{cases} \begin{cases} x\ge 2, \\ x\le 0; \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases} x\in[0;2] \\ x\le 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$x\le 0$

$\Rightarrow x=0$

ОДЗ: $x\ne 0$, $x\ne 2$

(2) $x\in[0;2]$:
$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x(x-2)-x(x-2)}\le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x(x-2)}\le 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;2], \\ x\in[0;2] \\ x\ne 0, \\ x\ne 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(0;2)$.

(3) $x\in[2;3]$:
$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{3x(x-2)}\le 0$$

$$\frac{x-2}{3x}\le 0 \Rightarrow x\in[0;2]$$

(4) $$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{3x(x-2)}\le 0 \qquad \frac{x^2-8x+16}{3x(x-2)}\le 0 \qquad \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x(x-2)\le 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in[0;2]\cup 4$

Ответ: $x\in(0;2)\cup 4$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 003
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0. \end{cases}$$

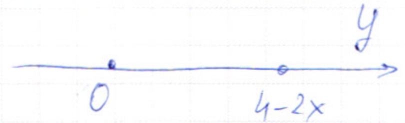
$|y| + |4-2x-y| > 4 - |2x|$ $\qquad$ $2x \ge 0$:

$|y| + |4-2x-y| > 4-2x$

$|y| + |t-y| > t$

~~$y \ge 0$:~~

~~$y+$~~



$x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0$

$y^2 - 4y \le 2x - x^2$

$\cancel{y(y-4) \le x(2-x)}$

$y^2 - 4y - 2x + x^2 = 0$

$D = \cancel{4+4x^2+8x}\ 16 - 4x^2 + 8x$

$4x^2 - 8x - 16 \quad |:4$

$x^2 - 2x - 4$

$\sqrt{D} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

$(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

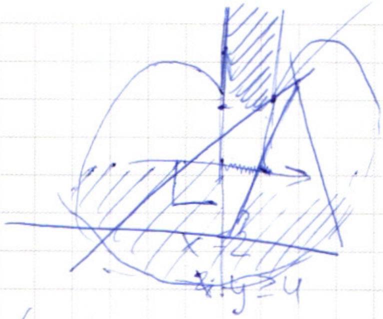
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0; \end{cases}$$

$y > 0$: $2x+y > 4$

$x(2x-2) + y(y-4) \le 0$

$x(x-2) \le (4-y)y$



$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \\ |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4, \end{cases}$$

$|4-2x-y| > 4-2x-y \iff 2x+y-4 > 4-2x-y$

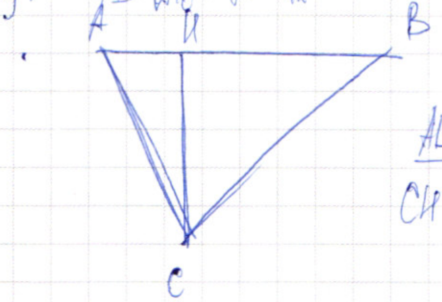
$4x+2y-8>0 \; |:2$

$2x+y>4$

$(4-2x-y)^2 = 16 - \cancel{8x} - \cancel{4y} - \cancel{8x} + \cancel{4x^2} + 2xy - 4y + 2xy + y^2 = 16 - 16x - 8y + 4x^2 - 8y + 4xy + y^2$

$\underbrace{}_{(2x-4)^2}$

$y: \; 4 \pm \sqrt{16 + 8x - 4x^2}$



$\frac{AB}{CH} - ?$