

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

№ 3

① $xy \geq 0, x - 2y \geq 0$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} & \text{①} \\ x + y^2 = 5 & \text{②} \end{cases}$$

① $(x - 2y)^2 = xy$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{2} = \frac{5y \pm 3y}{2} = \{y; 4y\}$$

Представим в ②:

$$x = y$$

$$y + y^2 = 5$$

$$\Rightarrow y^2 + y - 5 = 0$$

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \text{ т.к. } y - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$$

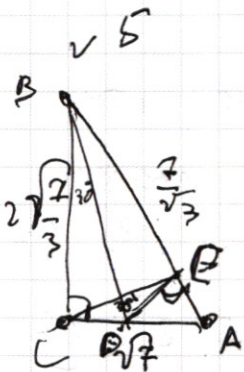
$$x = 4y$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$(y - 1)(y + 5) = 0, y \geq 0, \text{ т.к. } 4y - 2y = 2y \geq 0$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $(x = 4; y = 1); (x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2})$



Найдем гипотенузу AB:

$$AB = \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{3} + 7} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Также $\angle CBA = \angle CPE \Rightarrow \triangle CPE$ - вписан.

$$\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 30^\circ \Rightarrow CD = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Также } S_{\triangle ADE} = \frac{AE \cdot ED}{2} = \frac{BC \cdot AC}{2} \cdot \frac{DE}{BC} \cdot \frac{EA}{AC} = \frac{BC \cdot AC}{2} \cdot \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{BC \cdot AC}{2} \left(\frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB}\right)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{\text{орбиты}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{7}}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \sqrt{7} \right)^2 = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{7}{7} = \sqrt{3}$$

~ 7

Найдём \sum попар. всех натур. чисел от 1 до 16.

$$f(1) + f(2) = f(2) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 3$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 4$$

$$f(5) = 5$$

$$f(6) = f(3) + f(3) = 6$$

$$f(7) = 7$$

$$f(8) = f(4) + f(4) = 8$$

$$f(9) = f(3) + f(6) = 9$$

$$f(10) = f(2) + f(8) = 10$$

$$f(11) = 11$$

$$f(12) = f(3) + f(9) = 12$$

$$f(13) = 13$$

$$f(14) = f(2) + f(12) = 14$$

$$f(15) = f(3) + f(12) = 15$$

$$f(16) = f(8) + f(8) = 16$$

$$f(17) = 17$$

$$f(18) = f(2) + f(16) = 18$$

$f(x)$ — для натур. чисел является суммой всех простых делителей числа.

т.е. x мы можем выбрать любым числом из пары, то

если $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$, то

$f\left(\frac{7}{4}\right) < 0 \Rightarrow$ нам достаточно посчитать число

неравных друг-другу чисел.

Всего $0 - 1 \Rightarrow \frac{17 \cdot 18}{2} = 1 - 133$

$2 - 1 = 153 - 8 = 145$

$3 - 1$

$4 - 1$

$5 - 2$

$6 - 2$

$7 - 3$

$8 - 3$

$9 - 4$

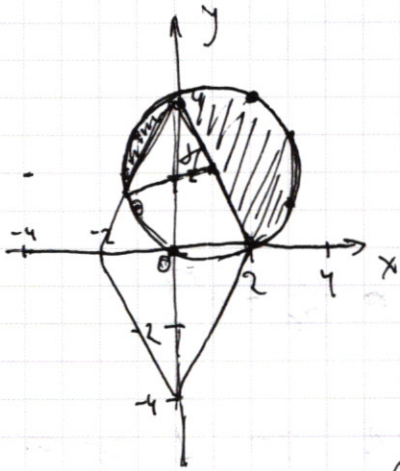
$11 - 1$

$13 - 1$

$12 - 1$

Ответ: 145

№6



$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| \geq 4 & \textcircled{1} \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

① нетрудно проверить, что
 ② выделяет всю плоскость, кроме ромба с центром в $(0; 0)$, и вершинами $(\pm 2; \pm 4)$.

Также можно подставить точки $(0; 0), (2; 0), (0; 4)$ в ②. Они подходят под равенство. Также если \leq заметить на $=$, то мы должны получить окружность, а \leq просто добавляет её внутренность. Тогда по 3-м точкам построим окружн. Нетрудно проверить, что эта окружн. описывается уравнением $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Тогда её площадь 5π .

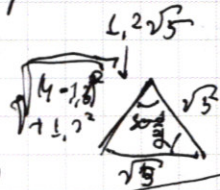
Т. пересеч. её с ромбом: $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$

$$(x-1)^2 + (2x+2)^2 = 5$$

$$5x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x = -1,2$$

$$y = 1,6$$



$$\sin \alpha = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

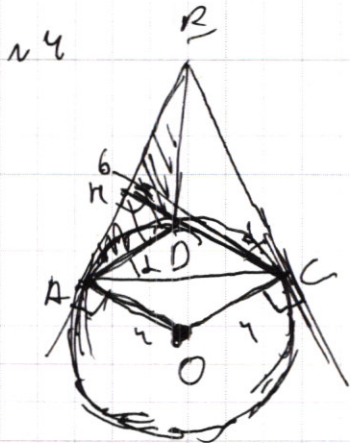
\Rightarrow посчитаем \angle пересеч. ромба и круга.

$$5\pi \left(1 - \frac{\arcsin\left(\frac{1-1,2}{2-1,6}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{360^\circ} \right) - \frac{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2}$$

$$\cdot \sin \alpha = 5\pi \left(1 - \frac{\arcsin\left(\frac{5}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{0}{5}\right)}{360^\circ} \right) - \frac{5}{2} \sin \alpha,$$

где α - угол, указ на рисунке. Его нахождение уже указано в рисунке выше.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{CH}{AB} = \frac{CH}{CB} = \sin \angle B. \text{ т.к. } BC - \text{кас.}$$

то $\angle BCH = \angle DAC = \frac{\angle ROG}{2}$

$$\frac{AB \cdot DH}{2} = G. \text{ Также } AO \parallel HC, \text{ т.к.}$$

AB - касат.

$$\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{7}$$



$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \\ x+y^2 = 5 \end{cases}$$

$$AC = \frac{AB \cdot AE}{AD}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \text{ or } \frac{2}{\sqrt{3}}$$

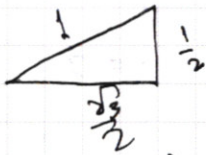
$xy \geq 0$

$$|x-2y|^2 = xy$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB \cdot AE}{AD^2}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{EA}{AD} \cdot \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD}$$



$$x = 5 - y^2$$

$$5 - y^2 - 2y = \sqrt{(5 - y^2)y}$$

$$(5 - y^2)^2 - 4(5 - y^2)y + 4y^2 = (5 - y^2)y$$

$$25 - 10y^2 + y^4 - 20y + 20y^2 + 4y^2 = 5y - y^3$$

$$25 + y^4 + 6y^2 - 20y - 5y - y^3 = 0$$

$$(2x+4y) + (4-2x-y) = 4$$

$$2x+4-2x-y = 4$$

$$x^2 - 2x = 4y + y^2$$



$$x^2 - 2x - 4y - y^2 = 0$$

$$x(x-2) + y(y-4) \leq 0$$

$$AC = \sqrt{7}$$

$$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$f(4) = 0$$

$$f(4) = 4$$

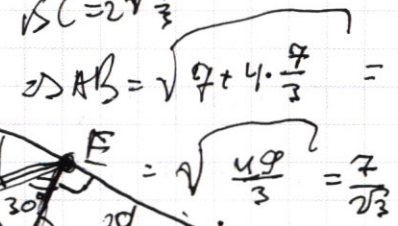
$$f(6) = 5$$

$$f(8) = 6$$

$$f(9) = 6$$

$$f(10) = 7$$

$$f(12) = 2\sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{4y}{x} + \frac{28}{x}$$

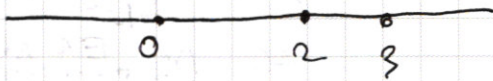


$$AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

2	$f\left(\frac{2}{17}\right) = -15$	$y^2 - 4 = 1$
3	$f\left(\frac{2}{13}\right) = -11$	$y^2 = 5$
5	$f\left(\frac{2}{11}\right) = -9$	$y = \sqrt{5}$
7	$f\left(\frac{2}{7}\right) = -5$	
11	$f\left(\frac{2}{5}\right) = -3$	
13	$f\left(\frac{2}{3}\right) = -1$	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2\sqrt{x^2 - 4x + 1} \cdot |x-2|}$$



$$x^2 - 6x + 10 - 2|x-3| \leq 0$$

$$x^2 - 6x + 10 + 2x - 6 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-2)^2 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$x < 3$$

$$x^2 - 8x + 16 \leq 0$$

$$(x-4)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\cup x \geq 3$$

$$x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

$$(x-2)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x=2$$

$$\cup x < 3$$

$$2x^2 - 4x + |x||x-2| > 0$$

$$2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18 - 12 + 3 = 9 > 0 \cup$$

$$2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 8 - 8 + 0 = 0 \neq 0 \times$$

$$2x^2 - 4x + |x||x-2| \leq 0$$

$$2x^2 - 4x + (-x)(-x+2) \leq 0$$

$$2x^2 - 4x + x^2 - 2x \leq 0$$

$$3x^2 - 6x \leq 0$$

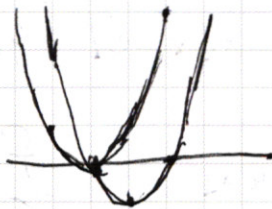
$$x^2 - 2x \leq 0$$

$$\boxed{x \in (0; 2)}$$

$$x^2 \geq 2x$$

$$x \in (0; 2) \neq 0$$

$$\boxed{x < 0}$$



$$2x^2 - 4x + x^2 - 2x < 0$$

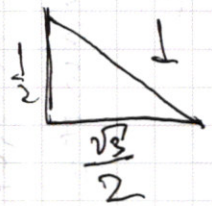
$$3x^2 - 6x < 0$$

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

$$x \geq 2$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \sqrt{7}$$



$$2x^2 - 4x + x(2-x) < 0$$

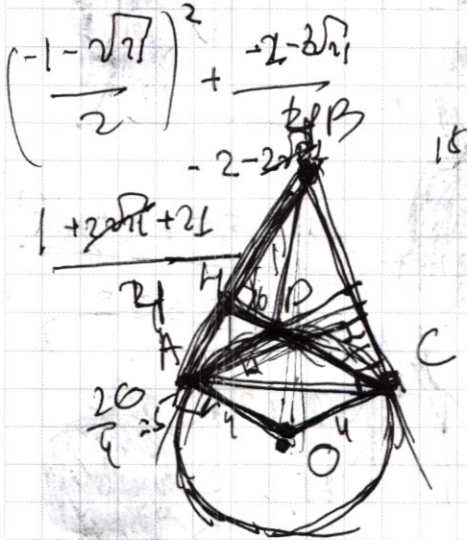
$$x^2 - 2x < 0$$

$$x^2 < 2x$$

$$x < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{x \in (0; 2)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(1) = 0$	0	17	+16	15	+14	+12	· 2
$f(2) = 2$	2		$5+y$	$4+y$	$3+y$	$2+y$	$1+y$
$f(3) = 3$	3		$10 \cdot 2$	$7 \cdot 3$	$4 \cdot 3$	$3 \cdot 2$	$2 \cdot 1$
$f(4) = 4$	4		$3+2+1 = 30$				
$f(5) = 25$	5		$= 17 + 16 + 15 + 14 + 12 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 145$				
$f(6) = 5$	5		$17 \cdot 9 = 153$				
$f(7) = 7$	6		$x - 2y = \sqrt{xy}$				
$f(8) = 8$	6		$x + y^2 = 5$				
$f(9) = 6$	7		$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$				
$f(10) = 7$	8		$x^2 - 5yx + 4y^2 = 0$				
$f(11) = 11$	8		$x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{2}$				
$f(12) = 7$	8		$x = \frac{5y \pm 3y}{2} = \{y; 4y\}$				
$f(13) = 13$	8						
$f(14) = 9$	9						
$f(15) = 8$	11						
$f(16) = 8$	13						
$f(17) = 17$	17						
$f(18) = 8$	17						

$$2y = \sqrt{4y^2} = |2y|$$

$$y = 0$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = y$$

$$y - 2y = \sqrt{y^2}$$

$$-y = |y|$$

$$y \in (-\infty; 0]$$

$$y + y^2 = 5$$

$$\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$y < 0 \Rightarrow$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

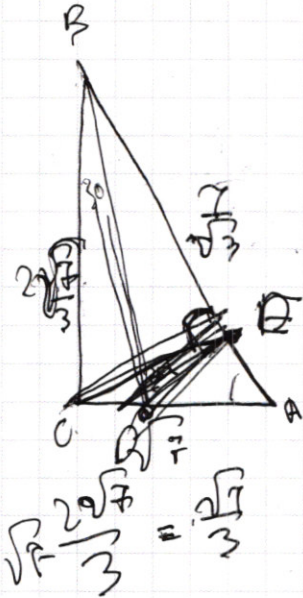
$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{18 \cdot 17}{2} =$$

$$23 \cdot 17 - 1 - 1 - 3 - 3$$

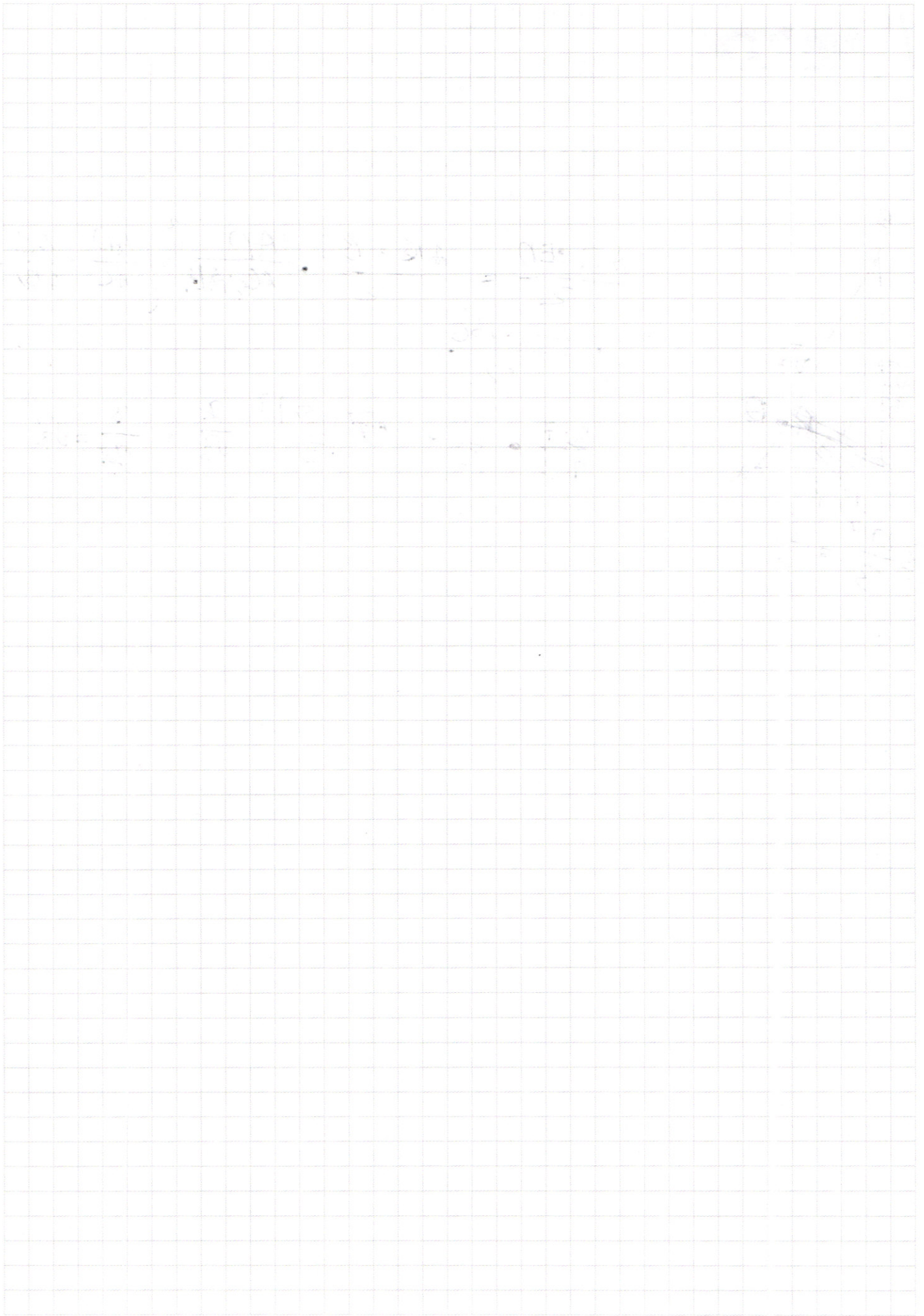
$$9 \cdot 17 = 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AE \cdot ED}{2} = \frac{AE \cdot BC}{2} \cdot \left(\frac{AD}{AC \cdot AB} \right)^2 = \left(\frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} \right)^2 \cdot \frac{AE \cdot BC}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 7}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{7} \right)^2 = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{7} = \sqrt{3}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)