

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

Как раскрываются модули:

	0	2	3
$ x $	-	+	+
$ x-2 $	-	-	+
$ x-3 $	-	-	+

$$\frac{|x-3|^2 + 1 - 2|x-3|}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{|x-3| \cdot (|x-3| - 2) + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

① $x < 0$

$$\frac{(3-x)(1-x) + 1}{3x(x-2)} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (3-x)(1-x) + 1 > 0 & \text{не подходит} \\ 3x(x-2) > 0 & \text{не подходит} \end{cases}$$

② $x = 0$

$2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|$ в знаменателе 0 \Rightarrow не подходит

③ $0 < x < 2$

$$\frac{(3-x)(1-x) + 1}{x(x-2)} \leq 0 \Rightarrow (3-x)(1-x) + 1 \geq 0$$

$$3 - 3x - x + x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-2)^2 \geq 0$$

$x \in (0; 2)$ x -модель

④ $x = 2$

в числителе знаменателе 0 \Rightarrow не подходит

5

№ предположение

5) $2 < x < 3$

$$\frac{(3-x)(1-x) + 1 \leq 0 \Rightarrow (3-x)(1-x) + 1 \leq 0}{\begin{matrix} 3x > 0 \\ (x-2) > 0 \\ > 0 \end{matrix}} \Rightarrow (x-2)^2 \leq 0$$

~~$x=2$~~ $x=2$ не подх по усл.
решений нет

6) $x=3$

$\frac{1}{9} \leq 0$ - не подходит

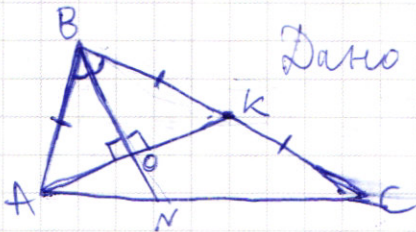
7) $x > 3$

$$\frac{(x-3)(x-5) + 1 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) + 1 \leq 0}{\begin{matrix} 3x > 0 \\ (x-5) > 0 \\ > 0 \end{matrix}} \Rightarrow x^2 - 3x - 5x + 15 + 1 \leq 0$$
$$x^2 - 8x + 16 \leq 0$$
$$(x-4)^2 \leq 0$$

$x \in \{4\}$ $x=4$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:

$$\angle ABN = \angle NBC$$

$$P_{\triangle ABC} = 600$$

$$BK = CK$$

$$\angle AOB = \angle BOK = 90^\circ$$

Решение:

$\triangle AOB$ и $\triangle BOK$;

$$\angle ABO = \angle OBK$$

$$\angle AOB = \angle BOK$$

OB — общ.

\Rightarrow по Т (у-с-у) $\triangle ABO = \triangle BOK \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = BK \Rightarrow BC = 2AB$$

т.к. 2 больше стороны в \triangle в сумме больше 3-й, составим неравенства:

$$x = AB$$

$$\begin{cases} x + 2x > 600 - 3x \\ x + 600 - 3x > 2x \\ 2x + 600 - 3x > x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 100 \\ x < 150 \\ x < 300 \end{cases} \Rightarrow 100 < x < 150$$

$$\begin{cases} x < 150 \\ x < 300 \end{cases} \Rightarrow 100 < x < 150$$

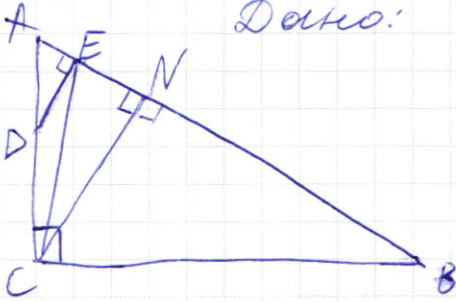
$$x < 300 \quad \text{всего } 48 \text{ разн. } x$$

Сколько различных x , столько и треугольников

Ответ: 48

N5

Дано:



$$\angle CED = 30^\circ$$

$$\angle DEA = 90^\circ \quad (DE \perp AB)$$

$$AC = \sqrt{7} \quad BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Решение:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21}{3} + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

CN - высота

$\triangle ACN \sim \triangle ABC$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle CNA = 90^\circ \\ \angle A - \text{общ} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{CN}{CB}$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AN = \frac{AC^2}{AB} = \frac{7}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{7\sqrt{3}}{7} = \sqrt{3}$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CN = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{7 \cdot \sqrt{3}} = 2$$

$\triangle CEN$:

$$\angle CEN = \angle DEB - \angle CED = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\angle CNE = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ECN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow EC = 2EN$$

пусть $EN = x$:

$$(2x)^2 = x^2 + 2^2$$

$$4x^2 = x^2 + 4$$

$$3x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолжение

* $\triangle AED$:

$$AE = AN - EN = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

* * $\triangle AED$ и $\triangle ACN$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle AED = 90^\circ = \angle ANC \\ \angle A - \text{общий} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACN \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{CN}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AN} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{ED}{CN} = \frac{AE}{AN} \Rightarrow ED = \frac{CN \cdot AE}{AN} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$S_{\triangle AED} = \frac{AE \cdot ED}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: $AD:AC = 1:3$, $S_{\triangle AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{N 3} \\ \sqrt{xy} \geq 0 \\ x - 2y \geq 0 \\ (x - 2y)^2 = xy \end{matrix} \quad \begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq 2y \\ x^2 - 4xy + 4y^2 - xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy - 4xy + 4y^2 &= 0 \\ x(x - y) - 4y(x - y) &= 0 \\ (x - y)(x - 4y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \quad \textcircled{1} \\ x = 4y \quad \textcircled{2} \\ xy \geq 0 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

~~① $x = y$~~

$$\begin{aligned} y + y^2 &= 5 \\ y^2 + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

по Т Виетта:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -1 \\ y_1 y_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = -5 \\ y_2 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -5 \\ y_2 = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{не подходит} \\ \uparrow \\ y^2 \geq 0 \\ y \geq 2y \\ y \leq 0 \end{matrix}$$

~~$y_1 = -3, x_1 = -3$ $(-3, -3)$~~

② $x = 4y$

$$\begin{aligned} 4y + y^2 &= 5 \\ y^2 + 4y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

по Т Виетта:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -4 \\ y_1 y_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= -5 \end{aligned}$$

√3 предположение

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -5 \\ \cancel{4y^2 \geq 0} \\ 4y^2 \geq 0 \\ 2y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -5 \text{ - не подходит} \\ 4y^2 \geq 0 \\ \cancel{y \geq 0} \end{cases}$$

$$y_1 = 1 \quad x_1 = 4 \quad (4; 1)$$

~~Ответ: (-3; -3) и (4; 1)~~

① $x = y$

$$y + y^2 = 5$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ y^2 \geq 0 \\ y \geq 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \text{ - не подходит} \\ y^2 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \quad \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \right)$$

Ответ: $(4; 1); \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{|x-3|^2 + 1 - 2|x-3|}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{|x-3|(|x-3|-2) + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$|x-3|(|x-3|-2) + 1 < 0$$

$$|x-3|(|x-3|-2) < -1$$

$$2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| > 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{-1 - \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{2} + \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} + 1}{2} =$$

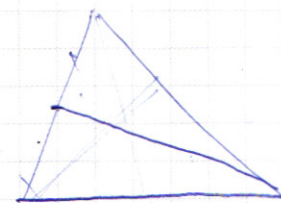
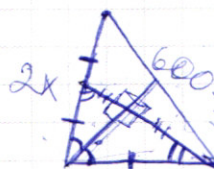
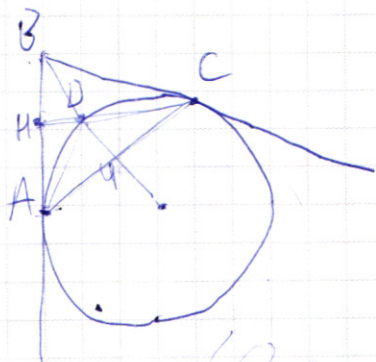
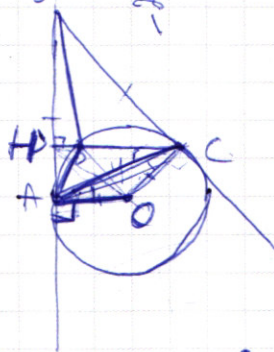
$$\frac{3 + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{2}$$

$$\frac{5}{2} = 2.5$$

$$V = 4$$

$$S_{ABD} = 6$$

$$AB : CH = ?$$



$$3x \leq 600 - 3x$$

$$x \leq 100$$

$$2x + 600 - 3x > x$$

$$2x < 600$$

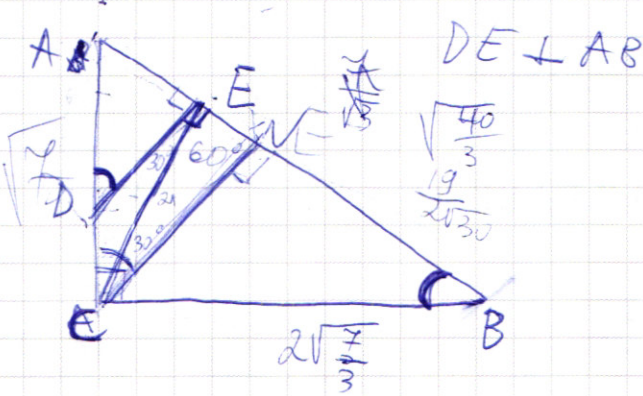
$$x < 300$$

$$100 < x < 150$$

$$x + 600 - 3x > 2x$$

$$4x < 600$$

$$x < 150$$



$$\frac{AD}{AC} = ?$$

$$\angle AED = ?$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

$$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \quad AC = \sqrt{7}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BN}$$

$$BN = \frac{BC^2}{AB}$$

$$BN = \frac{19}{3}$$

$$\sqrt{16 \frac{1}{3}}$$

$$\frac{19}{3} = \frac{19\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{19}{\sqrt{120}} = \frac{19}{2\sqrt{30}}$$

$$\frac{AN}{CN} = \frac{CN}{CB}$$

$$AN = \frac{CN^2}{CB}$$

$$= \frac{19}{\sqrt{120}} = \frac{19}{2\sqrt{30}}$$

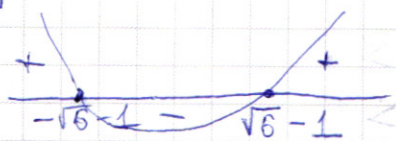
$$x = y$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 4y^2 &= 0 \\ (x-2y)^2 &= 0 \\ x-2y &= 0 \\ x &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{xy + 20y} \\ x &= 5 - y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y + y &= 2 \\ y^2 + y - 5 &= 0 \\ y_1 &= -1 \\ y_2 &= 5 \end{aligned}$$



$$\sqrt{xy + 20y} = 5 - y^2$$

$$-y^2 - 2y + 5 \geq 0$$

$$y^2 + 2y - 5 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 = -2$$

$$x_1 x_2 = -5$$

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= 2\sqrt{6} \\ D &= 4 + 20 = 24 \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AB}{CH} = ?$

$AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$\frac{AN}{AC} = \frac{AC}{AB} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AN = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{AE}{AN} = \frac{AC}{AB}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{BN}{BC}$

$BN = \frac{(2\sqrt{7})^2}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{28}{\sqrt{3}}$

$\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$

$CN = \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$AB^2 = 4 \cdot \frac{7}{3} + 7 = \frac{28}{3} + 7 = \frac{49}{3}$

$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

+4

$$\frac{1-6+10-2(-2)}{2-4+1 \cdot (-1)}$$

$$\frac{9}{-3} = -3$$

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+1+(x-2)}$$

$$4 \cdot \frac{AB}{2} \cdot 2 = 4 \cdot AB$$

$$AB : CN = ?$$

$$\frac{360 - 90 - 2 \cdot 45}{2} = -135$$

0 2 3



$$S_{\triangle ABD} = 6$$

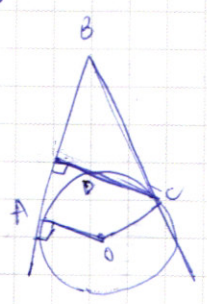
$$\frac{AB \cdot HD}{2} = 6$$

$$AB \cdot DN = 12$$

$$\frac{AB \cdot OA}{2}$$

$$\frac{HD}{OA} = \frac{180 - 2 \cdot 45}{2}$$

0 2 3
+ + +
+ + +
+ + +



$$\frac{(3-x)(1-x)+1}{x(x-2)+x(-2+x)}$$

$$2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = CN$$

$$\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

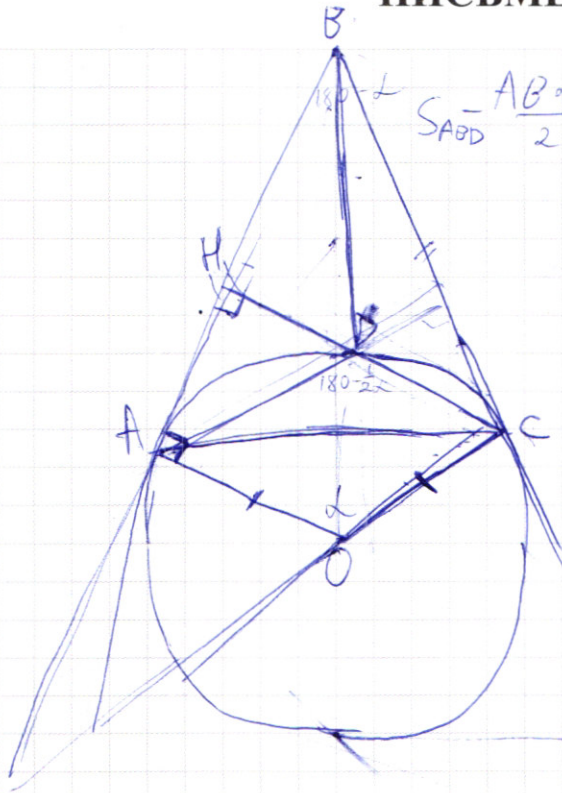
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{AN}$$

$$-2x+x^2$$

$$-(2x-x^2)$$

$$x(x-2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot HD}{2} = 6$$

$$HD \cdot AB = 12$$

$$\frac{AB}{CH} = ?$$

$$CO = AO = 4$$

$$\frac{AB \cdot CH}{2} = S_{ABC}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{CH}{HD}$$



$$\frac{AD \cdot CD \cdot AC}{16}$$

$$x^2 - 6x + 10$$

$$\textcircled{1} \frac{(3-x)(1-x) + 1}{3x(x-2)} \leq 0$$

$$x \leq 0$$

$\textcircled{2}$