# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32, \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла $A$ треугольника $ABC$ пересекают прямую $BC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника $AMN$, касается стороны $AB$ в точке $A$. Найдите радиус окружности, угол $ACB$ и площадь треугольника $ABN$, если известно, что $AB=\sqrt{5}$, $BM=2$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника $ABC$ касается сторон $AC$ и $AB$ в точках $E$ и $D$. Точка $Y$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $E$ на $AB$, а $X$ – вторая точка пересечения $EY$ со вписанной окружностью треугольника $ABC$. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника $AXD$ равна 5, а $2AD=3EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно $n$?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y+7x \geqslant |4y-7x|, \\ y \leqslant -3x+15, \\ x^2-10y+y^2+15 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x-10 \le -\sqrt{10-x^2}$

$\cancel{10-3x}$

$9x^2-60x+100 \ge 10-x^2$

$10x^2-60x+90 \ge 0$

$x^2-6x+9 \ge 0.$

$(x-3)^2 \ge 0.$

$\Rightarrow$ x – любое Значит, неравенства не влияют.

$4y \ge |4y-7x|-7x$

$-4y \ge 12x-60.$

$\cancel{5x-60+|4y-7x| \le 0.}$

Если $4y \ge 7x$, то $y \ge \frac{7}{4}x$

$4y-4y \ge -14x$

$-14x \le 0$ $\cancel{x \le 0}$ $x \ge 0$

Если $4y \le 7x$, $y \le \frac{7}{4}x$

$8y \ge 0$ $y \ge 0.$

$$\begin{cases} -4y \ge 12x-60 \\ 4y \ge 20-4\sqrt{10-x^2} \end{cases}$$

$12x-40-4\sqrt{10-x^2} \ge 0.$ $\le 0.$

$12x-40 \le 4\sqrt{10-x^2}$

$\cancel{144x^2}$

$(3x-10)^2 \le 10-x^2$

$9x^2-60x+100-10+x^2 \le 0.$

$10x^2-$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 - 10y + y^2 + 15 = \quad x^2 + y^2 - 10y + 25 - 10 =$

$5900 : 4 =$

$\Rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 10.$

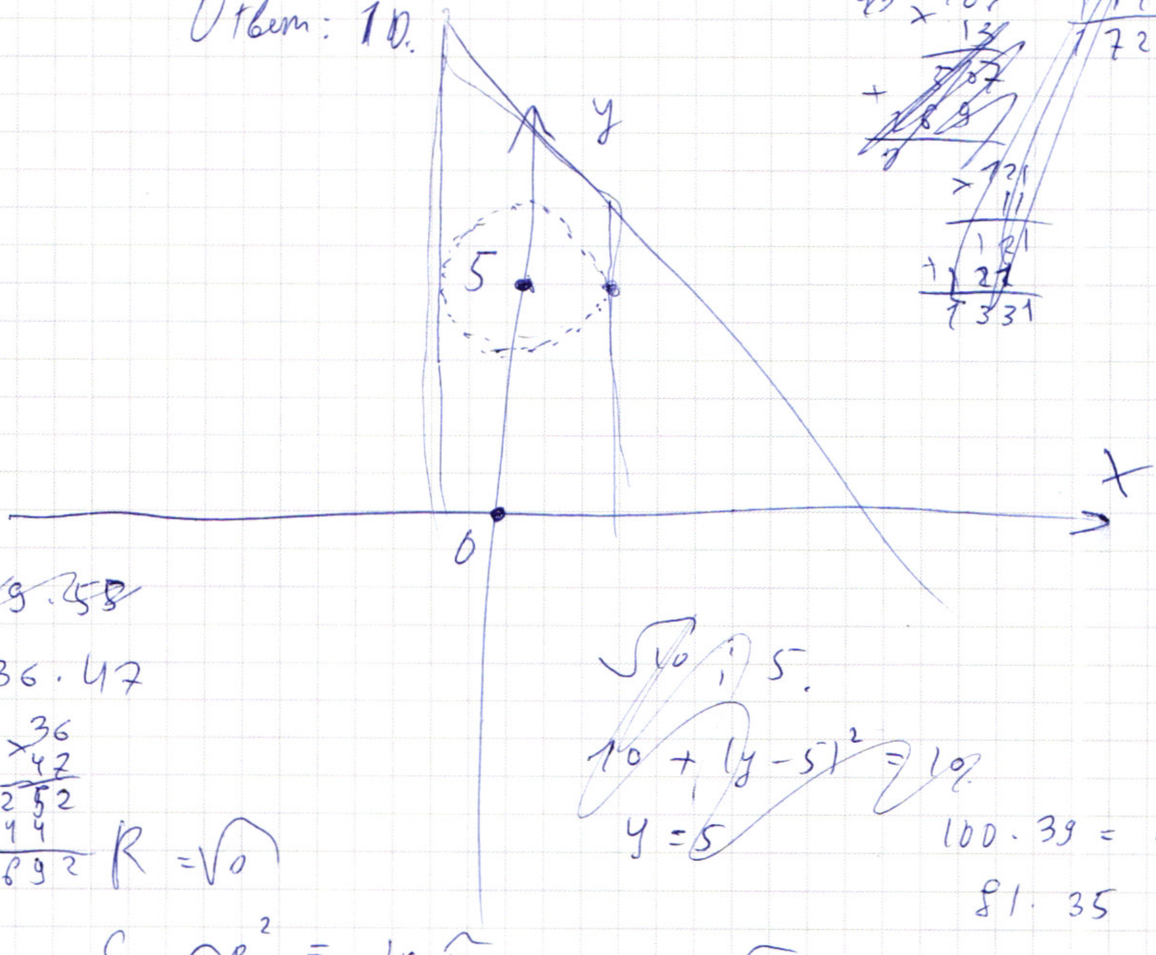
$= 1475$

Ответ: 10.

$\times 144$, $12$, $288$, $+144$, $1728$

$\times 169$, $13$, ~~507~~, $+$ ~~169~~

$\times 121$, $11$, $121$, $+121$, $1331$



~~49 · 58~~

$36 \cdot 47$

$\times 36$, $47$, $252$, $+144$, $1692$

$\sqrt{10}$ ; 5.

$10 + (y-5)^2 = 10$

$y = 5$

$100 \cdot 39 = 3900.$

$81 \cdot 35$

$R = \sqrt{10}$

$S = \pi R^2 = 10\pi.$

$-3\sqrt{10} + 15.$

$3\sqrt{10} + 15.$

$\times 81$, $35$, $405$, $+243$, $2835$

$\times 49$, $55$, $245$, $+245$, $2695$

$\frac{-3\sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 30}{2} = 15.$

$15 \cdot 2\sqrt{10} = 30\sqrt{10}.$

$n^2(6n-1)$

$4n^3 + 2n^3 - n^2$

$100 \cdot 59$

$n \cdot 2n \cdot (2n-1) =$

$= 4n^3 - 2n^2$

$8n^3 - 2n^2 = 5900$

$8n^3 - n^2 = 2950.$

$n^2(8n-1) = 2950.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$S = \frac{1}{2} \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}5 =$

$S = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot b =$

$= \frac{1}{2} \cdot tg\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot a \cdot b$

№6.

$$\begin{cases} 4y + 7x \geq |4y - 7x| \\ y \leq -3x + 15 \\ x^2 - 10y + y^2 + 15 \geq 0 \end{cases}$$

$\cancel{y/7}$

$$\begin{cases} \cancel{4y+7} \quad 4y \geq |4y - 7x| - 7x \\ 4y \leq -12x + 60 \\ 4y \geq \cancel{8}\ 20 + 4\sqrt{10 - x^2} \end{cases}$$

$-4y \geq 12x - 60$

$4y \geq 20 + 4\sqrt{10 - x^2}$

$12x - 40 + 4\sqrt{10 - x^2} \leq 0.$

$12x - 40 \leq -4\sqrt{10 - x^2}$

$\cancel{144x^2} \rightarrow \geq$ $3x - 20 \leq -\sqrt{10 - x^2}$

$$\begin{cases} 4y \geq |4y - 7x| - 7x \\ y \leq -3x + 15 \end{cases}$$

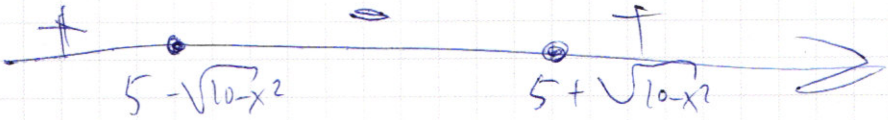
$x^2 - 10y + y^2 + 15 = 0 \quad D = 100 - 4 \cdot (15 + x^2) =$

$= \cancel{100 - 60 +}\ 100 - 60 - 4x^2 = 40 - 4x^2 = 4(10 - x^2)$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{10 - x^2}$

$y_1 = \frac{10 + 2\sqrt{10 - x^2}}{2} = 5 + \sqrt{10 - x^2}$

$y_2 = 5 - \sqrt{10 - x^2}$



черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x-3|+|x|-3 \le 0.$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3 \\ x-3+x-3 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 3-x+x-3 \le 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \\ 3-x-x-3 \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 3 \\ 0 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x = 3$

$\varnothing$

$x \in [0;3]$.

$x \in [0;1) \cup (1;3]$.

$MN^2 = MN \cdot NC +$
$+ MN \cdot CN =$
$= MN(NC + CN)$

$AM^2 = MN \cdot MC$

$AN^2 = MN \cdot CN$

$AB^2 = BM \cdot BN$

$BM \cdot BN = 5.$

$BN = 2{,}5$

$MN = 0{,}5.$

$\Rightarrow R = 0{,}25.$

$AC^2 = 0{,}25^2 \Rightarrow AC = 0{,}25 \quad a : 3.$

$S =$

$AB = \sqrt{5}$

$S = \frac{1}{2} BN \cdot AC$

$BM = 2.$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

Найти:

$R = ?$

$\angle ACB = ?$

$S_{ABN} = ?$

ANC MAC

$\frac{AN}{MA} = \frac{AC}{MC} = \frac{NC}{AC}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$

$AC = \frac{AB \cdot MC}{BM}$

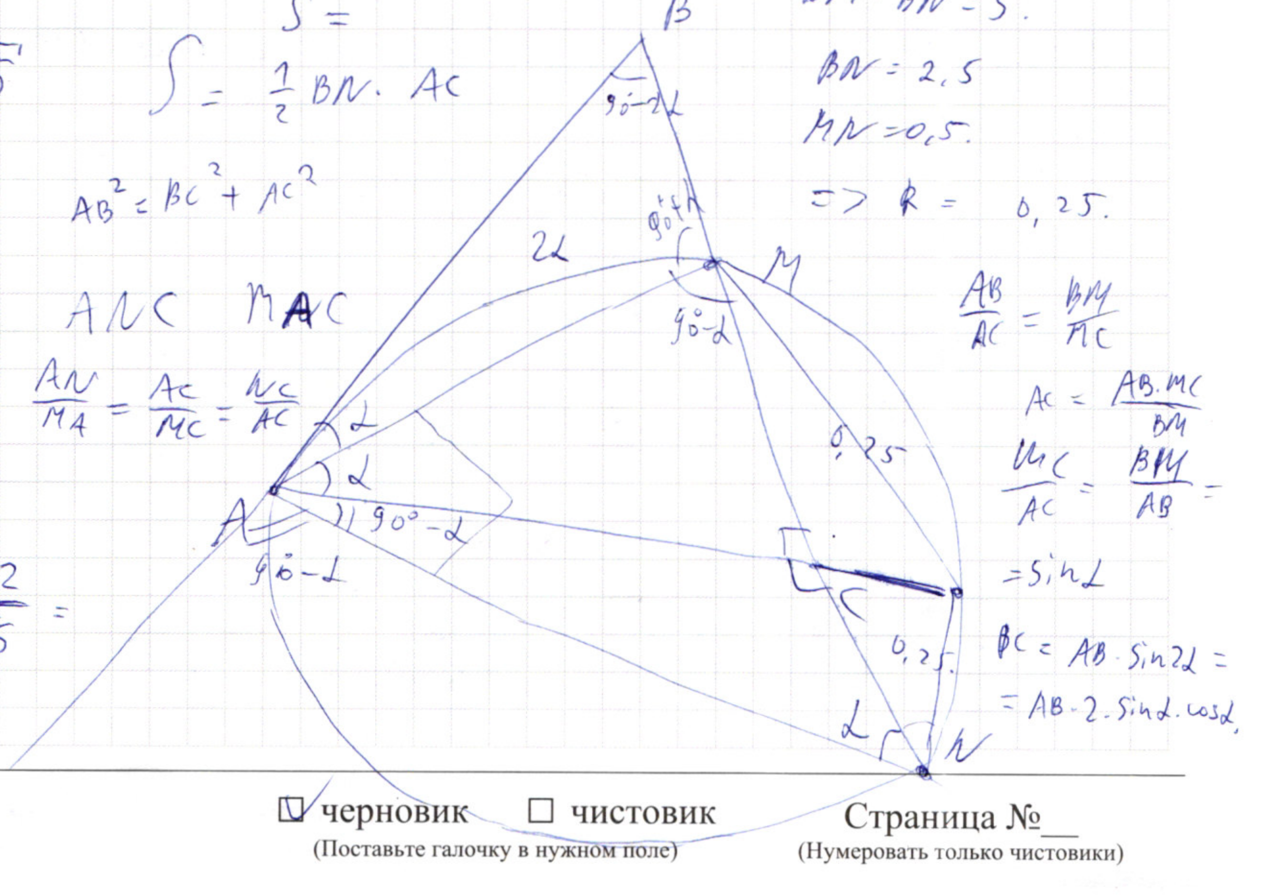
$\frac{MC}{AC} = \frac{BM}{AB} =$

$= \sin\angle$

$BC = AB \cdot \sin 2\angle =$

$= AB \cdot 2 \cdot \sin\angle \cdot \cos\angle$

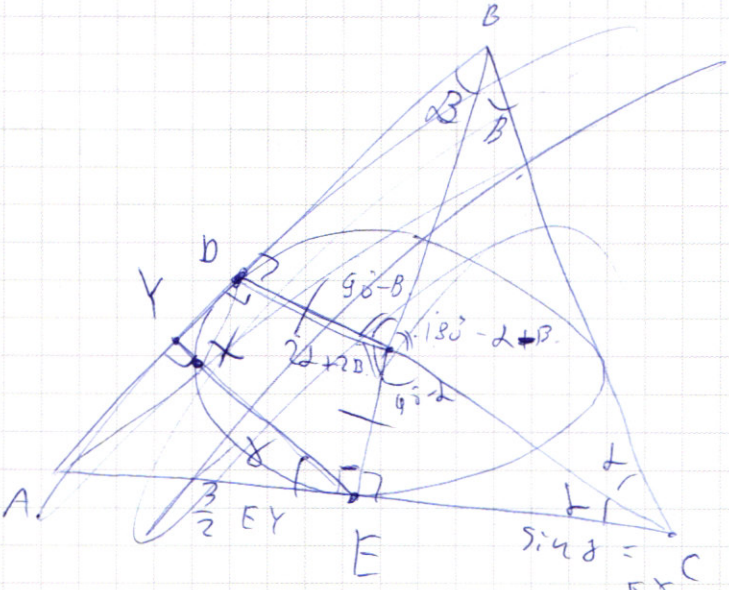
$\sin\angle = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$




☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№ 4




$S_{AXD} = 5$

$2AD = 3EY$

$R = ?$

$S_{EXD} = \frac{1}{2} XY \cdot AD \qquad AD = \frac{3}{2} EY \qquad = \frac{EY}{\frac{3}{2}EY} = \frac{2}{3}$

$S_{EXD} = \frac{1}{2} XY \cdot \frac{3}{2} EY = \frac{3}{4} XY \cdot EY = 5$

$XY \cdot EY = \frac{20}{3} \qquad AD = AE$

$90° - \alpha = B$

$tg\, B = \frac{\sin B}{\cos B} \qquad tg\, B^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\cancel{\frac{(tg^2 B + 1) \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} + \cos^2 B$

$\cancel{tg^2 B = 1}$

$\times 34$
$33$
$102$
$+ 102$

17, 
1, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 25, 29, 31, 35.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ......     578+

~~1~~, 2,     100 чисел     1, 2, 3, 4 ... 100.

$1 \cdot 34 \cdot 33,\ 17 = 17^2 \cdot 2.$     $17^2 \cdot 2 + 34 \cdot 33 +$

$+ 17 \cdot 33.$

$1 \cdot 17 \cdot 33 + \quad 1 \cdot 34 \cdot 33 = 34 \cdot 33.$

☑ черновик ☐ чистовик     Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)     (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$$

$$BC = \sqrt5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt5} \cdot \frac{\sqrt5}{5} = \frac{20}{5\cdot\sqrt5} = \frac{4}{\sqrt5}$$

$$MC = \frac{4}{\sqrt5} - 2$$

$$\frac{AC}{MC} = tg\,(90^\circ-\alpha)$$

$$AC = MC \cdot tg\,(90^\circ-\alpha) = MC \cdot \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)} =$$

$$= MC \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt5}{5} \cdot \frac{\sqrt5}{2} = \frac{4-2\sqrt5}{\sqrt5} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{4}{2\sqrt5} - 1 = \frac{2}{\sqrt5} - 1$$

$$S_{ABN} = \left(\frac{2}{\sqrt5} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 = \left(\frac{1}{\sqrt5} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2{,}5 =$$

$$= \frac{2-\sqrt5}{2\sqrt5} \cdot 2{,}5 = \frac{2-\sqrt5}{2\sqrt5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2\sqrt5-5}{10} \cdot \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt5-5}{4} = \frac{\sqrt5}{2} - \frac{5}{4}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3)\le 0.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\ge 0.\\ |x-3|+|x|-3\le 0.\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{(x-1)^2+9-6}{|x-1|}\le 0\\ |x-3|+|x|-3\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

~~$|x-3|+|x|-3\le 0$~~

~~$x-3\ge 0$~~

$$\frac{(x-1)^2+9-6(1-x)}{1-x}\ge 0.$$

$$\frac{x^2-2x+1+9-6+6x}{1-x}\ge 0.$$

$$x^2+4x+4\ge 0$$

$$(x+2)^2\ge 0. \quad x - \text{любое}$$

$$\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\ge 0.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ \frac{(x-1)^2+9-6(x-1)}{x-1}\ge 0.\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ \frac{(x-1)^2+9-6(1-x)}{1-x}\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$x\ne 1$

$$\frac{x^2-2x+1+9-6x+6}{x-1}\ge 0.$$

$$\frac{x^2-8x+16}{x-1}\ge 0 \iff x^2-8x+16\ge 0.$$

$$(x-4)^2\ge 0$$

$x$ – любое.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32 \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23 \end{cases}$$

$x-4y=9$

$x=9+4y$

$x+\sqrt{(x-4y)(x+4y)}=32$

$x+\sqrt{9(x+4y)}=32$

$x+3\sqrt{x+4y}$

$9+4y+3\sqrt{9+4y+4y}=32$

$23-4y=3\sqrt{9+8y}$  ОДЗ: $9+8y\geq 0$

при $23-4y\geq 0$ можно  $8y\geq -9$

возводить в квадрат.  $y\geq -\frac{9}{8}$

$23\geq 4y$

$y\leq\frac{23}{4}$

$(23-4y)^2=9\cdot(9+8y)$

$529-184y+16y^2=81+72y$

$16y^2-256y+448=0$

$y^2-16y+28=0$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=14;\ x_1=65\ \times \\ y_2=2;\ x_2=17. \end{array}\right.$$

$65+\sqrt{65^2-16\cdot 14^2}=32.$

$\Rightarrow 65+\sqrt{(65-4\cdot 14)(65+4\cdot 14)}=32$

$17+15=32.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32 & (1) \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23 & (2) \end{cases} \quad (1)-(2) \Rightarrow \quad x-4y=9, \quad x=9+4y$$

Преобразуем первое уравнение (1):

$x+\sqrt{x^2-16y^2}=32$

$x+\sqrt{(x-4y)(x+4y)}=32$ т.к. $x-4y=9$

$x+3\sqrt{x+4y}=32$ т.к. $x=9+4y$

$9+4y+\cancel{3\sqrt{x+4y}}+3\sqrt{9+8y}=32.$

$3\sqrt{9+8y}=23-4y$ ОДЗ для подкоренного выражения: $9+8y\geq 0.$

$8y\geq -9$

$y\geq -\frac{9}{8}$

Чтобы можно было возвести в квадрат обе части уравнения, надо, чтобы обе части были одного знака. Левая часть всегда положительна, а для правой должно выполнятся неравенство: $23-4y\geq 0.$ $23\geq 4y$ $y\leq \frac{23}{4}$

Возведём в квадрат, а затем, найдя корни, проверим входят ли они в ОДЗ и удовлетворяют ли они неравенству.

$9(9+8y)=529-184y+16y^2$

$16y^2-256y+448=0.$

$y^2-16y+28=0$

$\left[\begin{array}{l} y_1 = 14 \quad \text{не удовлетворяет второму условию — правая часть ур-ия отрицательна.} \\ y_2 = 2 \quad \text{удовлетворяет всем условиям.} \end{array}\right.$

Значит, решение системы: $\begin{cases} x = 17 \\ y = 2 \end{cases}$ $(17;2)$

Ответ: $(17;2)$

№1

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)\left(|x-3|+|x|-3\right)\le 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6 \ge 0 \\ |x-3|+|x|-3 \le 0 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} \frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6 \le 0 \\ |x-3|+|x|-3 \ge 0 \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

Решим первую систему из совокупности.

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6 \ge 0 & (1) \\ |x-3|+|x|-3 \le 0 & (2) \end{cases}$$

$x \ne 1$ — ОДЗ в первом.

(1) решим это неравенство.

$$\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6 \ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \frac{(x-1)^2+9}{x-1}-6 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ \frac{(x-1)^2+9}{1-x}-6 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{x^2-2x+1+9-6x+6}{x-1} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ \dfrac{x^2-2x+1+9+6x-6}{1-x} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{(x-4)^2}{x-1} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ \dfrac{(x+2)^2}{1-x} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x\neq 1, \ x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x\neq 1 \quad x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty).$$

После того, как мы получили такой результат, становится очевидно, что вторая система из совокупности не имеет решений, т.к. в ней первое неравенство не имеет решений.

Значит, нет смысла решать его.

Теперь решим второе неравенство нашей системы:

$$|x-3|+|x|-3 \leq 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 3 \\ x-3+x-3 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\leq x<3 \\ 3-x+x-3 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ 3-x-x-3 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < 3 \\ 0 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x \in [0;\ 3) \\ \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow x \in [0; 3].$$

Значит, решением всего неравенства является система:

$$\begin{cases} x \in [0; 3] \\ x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 1) \cup (1; 3]$$

Ответ: $x \in [0; 1) \cup (1; 3]$.

№3.

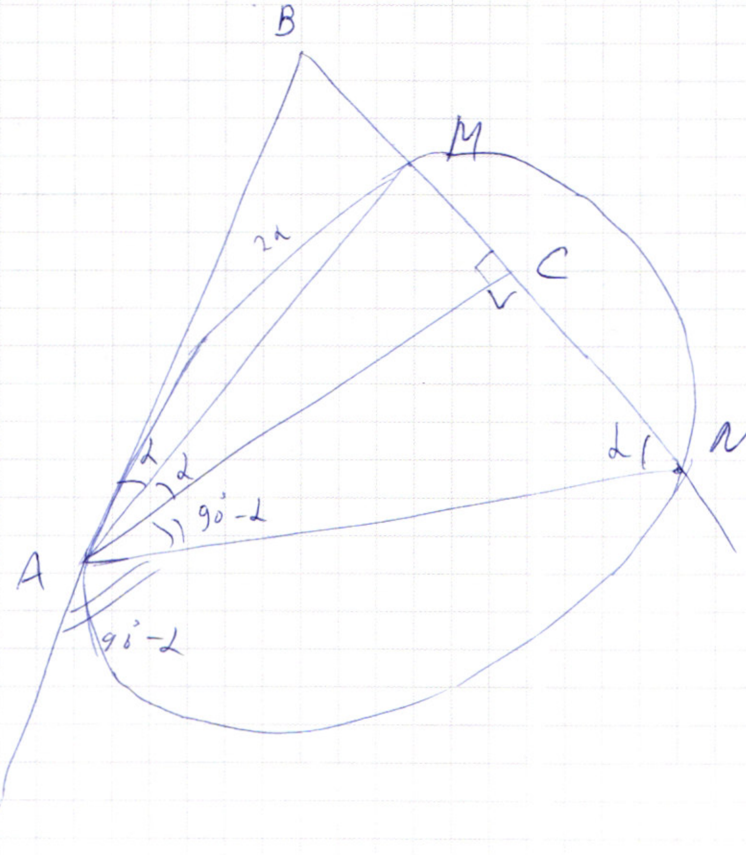
Дано: $\Delta ABC$.

$AM$, $AN$ - биссектрисы

$BM = 2$, $AB = \sqrt{5}$.

Найти:

$R = ?$, $\angle ACB = ?$, $S_{ABN} = ?$



# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение:

Пусть $\angle BAM = \angle MAC = \alpha$ – AM - биссектриса.

тогда $\angle BAC = 2\alpha$. $\angle CAS = 180° - 2\alpha$, $\angle CAN = \angle NAS = 90° - \alpha$. $\angle MAN$ – прямой $\angle MAN = 90°$.

Радиус окружности описанной около прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, т.к. центр такой окружности лежит в середине гипотенузы. MN - гипотенуза.

AB - касательная. $AB^2 = BM \cdot BN$ – свойство секущей и касательной из одной точки $MN = BN - BM$

$BN = \frac{AB^2}{BM} = \frac{5}{2} = 2.5$ $MN = 2,5 - 2 = 0,5$

$R = 0,5\ MN = 0,25.$ т.к. AB – касательная $\cup AM = 2\alpha$;

т.к. есть теорема об угле между касательной и хордой

$\cup AM = 2 \cdot \angle BAM = 2\alpha$, $\angle MNA = \frac{1}{2} \cancel{\cup BAM}\ \cup AM = \alpha$.

Значит, $\angle ACN = 90°$, следовательно $\angle ACB = 90°$.

$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$ – свойство биссектрисы

$\frac{AC}{MC} = \frac{AB}{BM}$ $\frac{AC}{MC} = tg\,(90° - \alpha)$ $AC = MC \cdot tg\,(90° - \alpha)$

$S_{ABN} = \frac{1}{2} AC \cdot BN$ $tg\,(90° - \alpha) = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)}$

Ответ: 0,25; 90°.

№ 6

$$\begin{cases} 4y+7x \geq |4y-7x| \\ y \leq -3x+15 \\ x^2-10y+y^2+15 \geq 0. \end{cases}$$

$-5900 \,|\, 12$

Решим последнее неравенство относительно $y$.

$x^2-10y+y^2+15=0$ $\quad D = 100 - 60 - 4x^2 = 40 - 4x^2$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{10-x^2}$ $\quad y_1 = \dfrac{10+2\sqrt{10-x^2}}{2} = 5+\sqrt{10-x^2}$

$y_2 = 5-\sqrt{10-x^2}$

$+ \quad 5-\sqrt{10-x^2} \quad - \quad 5+\sqrt{10-x^2} \quad + \quad y$

$y \in (-\infty; 5-\sqrt{10-x^2}] \cup$

$\cup [5+\sqrt{10-x^2}; \infty)$

Подставим первое решение в систему:

$$\begin{cases} 4y+7x \geq |4y-7x| \\ y \leq -3x+15 \quad \cdot(-1) \\ y \geq 5+\sqrt{10-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y+7x \geq |4y-7x| \\ -y \geq 3x-15 \\ y \geq 5+\sqrt{10-x^2} \end{cases} +$$

$3x-10+\sqrt{10-x^2} \leq 0$

$3x-10 \leq -\sqrt{10-x^2}$ $\quad$ при $x < \frac{10}{3}$

$9x^2-60x+100 \geq 10-x^2$

$10x^2-60x+90 \geq 0.$ $\quad x^2-6x+9 \geq 0.$

$(x-3)^2 \geq 0.$ $\quad$ ОДЗ $\sqrt{10-x^2}$ : $10-x^2 \geq 0.$

$x^2 \leq 10$

$|x| \leq \sqrt{10}$

$\Rightarrow x \leq \sqrt{10};\ x \geq -\sqrt{10}$

то есть $x$ может варьироваться только в этих пределах.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Первым мы можем выбрать три вида числа: делящееся на 2, на 3, или ни на одно из этого не делящееся. Пусть мы выбрали число делящееся на 3. У нас $6n$ чисел. Выбираем число делящееся на 2, но не дел. на 3. таких чисел: $6n : 3 : 2 = 2n$. Выбираем число не делящееся на 2 и на 3: $6n - n - 3n = 2n$. Число делящееся на 3, но не дел. на 3 можно выбрать: $6n : 3 = 2n$. Получается $4n^3$ троек.

Аналогично размышляем для случая, когда сначала выбрали число делящееся на 2: можно выбрать чисел делящихся на 3: $n$. Делящихся ни на что: $2n$. И можно выбрать чисел делящихся на 2: $2n$. $4n^3$ троек.

Для третьего случая $4n^3$ троек. Однако тройки повторяются, поэтому всего вариантов троек $4n^3$.

Ещё есть случаи, когда одно число исполняет два рола: делится на 2 и на 3. Способов выбрать такое число $n$. Чисел не делящихся ни на два, ни на три $2n$.

тогда $2n \cdot (2n-1) \cdot n$ способов.

$2n(2n-1) \cdot n = 2n^2(2n-1) = 4n^3 - 2n^2$ троек

половина троек уходит из-за повторений и остается

$2n^3 - n^2$ и ур-ие

$6n^3 - n^2 = 5900$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$y = -3x+15$ — прямая, пересекает обе прямые $x = \sqrt{10}$ и $x = -\sqrt{10}$.

Найдём в каких точках.

$y = 3\sqrt{10} + 15$ и $y = -3\sqrt{10}+15$

Все точки ограниченные прямыми $y = -3x+15$, $x = \sqrt{10}$; $x = -\sqrt{10}$; $y = 0$. Удовлетворяют системе.

Стоит заметить, что $x^2 - 10y + y^2 + 15$ — уравнение окружности.

$x^2 - 10y + y^2 + 15 = x^2 + (y-5)^2 - 10$.

Если перейти к нашем неравенство, то $x^2 + (y-5)^2 \geq 10$

Значит, этому неравенству удовлетворяют все точки вне окружности. радиус этой окружности $\sqrt{10}$, а её площадь — $10\pi$. Прямая $y = 3x+15$ не имеет с окружностью общих точек, а $x = \sqrt{10}$; $x = -\sqrt{10}$ являются касательными к ней. Значит, площадь фигуры, ограниченной ~~этой~~ точками является прямоугольная трапеция с вырезанной окружностью. Найдём площадь трапеции:

$S_{трап} = m \cdot h$ $m$ — средняя линия, $h$ — высота

$h = 2\sqrt{10}$; $m = \frac{-3\sqrt{10}+15+3\sqrt{10}+15}{2} = 15$.

$S_{трап} = 2\sqrt{10} \cdot 15 = 30\sqrt{10}$ => площадь фигуры

$S_{ф} = S_{трап} - S_{круг} = 30\sqrt{10} - 10\pi = 10(3\sqrt{10} - \pi)$

Ответ: $10(3\sqrt{10} - \pi)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n^2(6n-1)=5900$ решая данное уравнение получаем

$n=10$ $(100\cdot 59=5900)$.

Значит, $n=10$.

Ответ: 10.

№ 7

Очевидно, что степень 10 не превышает 6, и она больше ~~10~~ 2. Пусть эти степени десятки $10^3$ и $10^4$. Тогда у шестизначного числа сумма ~~последних трех~~ числа из последних трёх цифр и числа из 4 последних цифр равна 1356.

$a, b, c, d$ — цифры. $\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{abcd}=$

$=100b+10c+d+1000a+100b+20c+d=$

$=1000a+200b+20c+2d=1356$

$500a+100b+10c+d=678$

$a=1$ и тогда $\overline{bcd}=178$

$b=1$ $c=7$ $d=8$

Нашли одно число. И второе если $a=0$.

Пусть степени десяток $10^4$ и $10^5$.

$\overline{abcd}+\overline{nabcd}=1356$

$1000a+100b+10c+d+10000n+1000a+100b+10c+d=1356$

$10000n+2000a+200b+20c+2d=1356$

~~10000n~~ $5000n+1000a+100b+10c+d=678$

$n=0$, $a=0$, $b=6$, $c=7$, $d=8$ еще одно

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

число.

$10^5$ и $10^6$:

~~1000~~ $50000e + 10000h + 1000a + 100b + 10c + d = 678$

такого числа составить не получится

т.к. $e \neq 0$.

Значит, ответ: 3 числа.

Ответ: 3 числа.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)