МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

$4-2x-y \geq 0$

$-2x+4 \geq y$

$4-2x-y=0$

$y=-2x+4$

$+ \quad y \leq -2x+4$

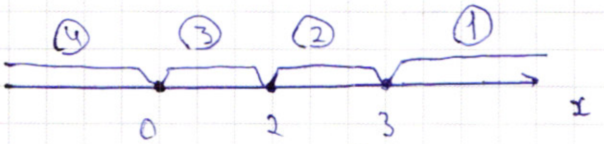
$4-2x=y$

$-2x+4=y$

$- \quad y \geq -2x+4$

№1

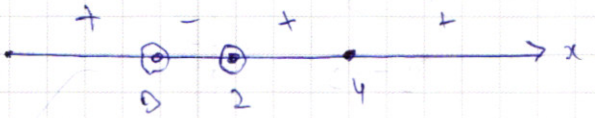
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$



① при $x \geq 3$: $\dfrac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0$$

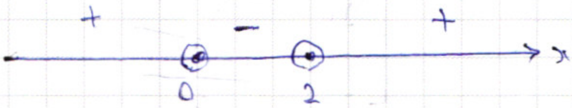


Из этого следует что при $x \geq 3$ решение 1: $x = 4$.

② при $x \in [2;3)$: $\dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{3x(x-2)} \le 0$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$$



$$\begin{cases} x \in [2;3) \\ x \in (0;2) \end{cases} \quad \varnothing$$

③ $x \in [0;2)$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(2-x)} \le 0$$

$$\cancel{\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x+2x+4x^2} \le 0}$$

$$\cancel{\frac{(x-2)^2}{6x^2-2x} \le 0}$$

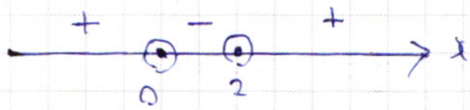
$$\cancel{\frac{(x-2)^2}{2x(3x-1)} \le 0}$$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x-x^2+2x} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-2x} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$$



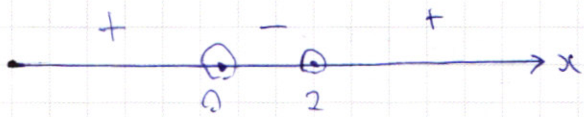
$$\begin{cases} x \in [0;2) \\ x \in (0;2) \end{cases} \Rightarrow x \in (0;2)$$

④ $\dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x\cdot(-(x-2))} \le 0$

$$\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x+x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x^2-6x} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$$



$$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (-\infty;0) \end{cases} \quad \varnothing$$

Ответ: $x \in (0;2) \cup \{4\}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \uparrow^2$$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-xy-4xy+4y^2=0$

$x(x-y)-4y(x-y)=0$

$(x-4y)(x-y)=0$

1) $x=4y$

$$\begin{cases} 4y-2y=\sqrt{4y^2} \\ 4y+y^2=5 \end{cases}$$

$2y=\sqrt{4y^2}$ - верно для всех $y\geq 0$

$y^2+4y-5=0$

$y^2+5y-y-5=0$

$y(y+5)-1(y+5)=0$

$(y-1)(y+5)=0$

1.1) $y=1 \Rightarrow x=4$

проверка: $\begin{cases} 4-2\cdot 1=\sqrt{4} \\ 4+1^2=5 \end{cases}$ - подх.

1.2) $y=-5 \Rightarrow x=-20$

$$\begin{cases} -20+10=\sqrt{100} \\ -20+25=5 \end{cases}$$ - неподх, т.к. $\sqrt{100}\neq -10$

2) $x=y$

$$\begin{cases} y-2y=\sqrt{y^2} \\ y+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y=\sqrt{y^2} \text{ - верно для всех } y\leq 0 \\ y^2+y-5=0 \end{cases}$$

$y^2+y-5=0$

$D=1+4\cdot 5=21$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

2.1) $\begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

$\frac{-1+\sqrt{21}}{2}+1-\sqrt{21}=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

неверно.

2.2) $y=x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+1+\sqrt{21}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ -

- подх.

Ответ: $(4;1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

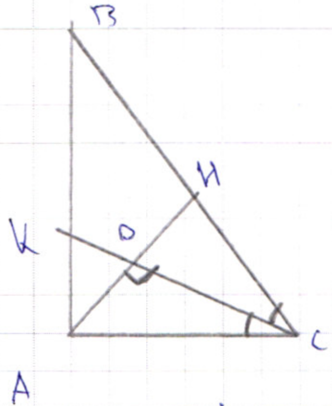
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



Рассмотрим 1 такой треугольник.

В нём, т.к. бисс-са является и бисс-ой и высотой одновременно, то 1 из сторон равняется половине другой.

т.к. $AC = \frac{1}{2} BC$. Обозначим AC за букву a, тогда:

$a+2a > BA$ или $3a > n$ (обозначим AB за n), аналогично

$$\left.\begin{array}{l} n+2a > a \Rightarrow n+a > 0 \\ n < 3a;\ n+a > 2a \Rightarrow n > a \end{array}\right\} \text{из нер-ству треугольника.}$$

$$\begin{cases} 3a+n = 600 \\ a < n < 3a \end{cases}$$

до $a = 100$ можно не рассматривать, т.к. не будет верно $a < n < 3a$.

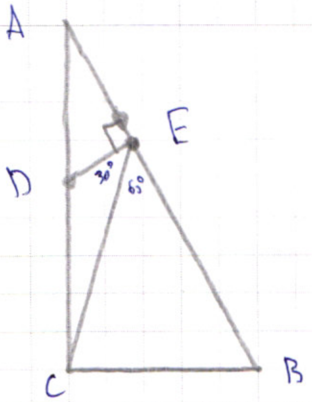
~~при $a \geq 99$: при $a \geq 101$~~:

при $a = 101$: $\left.\begin{array}{l} 303+n=600 \\ n = 297 \end{array}\right\}$ всё верно

так рассматриваем до $a = 150$: при $a = 150$: $n = 150$ и не соблюдается $a < n < 3a$.

Ответ: 49 треугольников.

№5



1) $BC = 2\,\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

По т. Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 7 + \frac{4\cdot 21}{9} = \frac{63+84}{9} = \frac{147}{9} = \frac{49}{3} \Rightarrow AB = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

по т. синусов в $\triangle CEB$: $\frac{\sin 60^\circ \cdot 3}{2\sqrt{21}} = \frac{\sin B}{EC}$

$\sin\angle B = \frac{\cancel{\sqrt{7}}\,\cancel{3}\,\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{7}}\,\cancel{7}\,\cancel{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{21}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{EC}$

$\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}EC}$

$\frac{3}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}EC} \Rightarrow EC = \frac{\sqrt{3}\cdot 4\cancel{\sqrt{7}}}{3\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

по т. косинусов в $\triangle CEB$: $BC^2 = EC^2 + EB^2 - 2EC\cdot EB\cdot\cos 60^\circ$

$\frac{4\cdot 21}{9} = \cancel{12\cdot 3}\ \frac{16\cdot 3}{9} + EB^2 - EB\cdot EC$

Пусть $EB^2 = x^2$: $x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 4 = 0$

$D = \frac{16}{9}\cdot 3 + 16 = \frac{16}{9}\cdot 3 + \frac{16}{9}\cdot 9 = \frac{16}{9}\cdot 12$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{12}}{2} \\ x_2 = \dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{12}}{2} \text{ — не подх} \end{array}\right.$ $\quad \frac{4}{3}\sqrt{12} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$EB = \cancel{7\sqrt{3}}\ \frac{\frac{12\sqrt{3}}{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AE = AB - EB = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ по II углам $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BC} =$

$= \frac{\cancel{\sqrt{7}}\cdot 3}{2\cancel{\sqrt{21}}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot DE \Rightarrow DE = AE\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{\cancel{\sqrt{3}}\cdot 2}{3\cdot\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{AED} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

AD^2 по т. Пиф. $= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$; $DC = AC - AD =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{7} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{\sqrt{7}}}{\frac{2}{3}\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2} = \frac{1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

1) $+,+,+$: $\cancel{2x}+\cancel{y}+4-\cancel{2x}-\cancel{y}>4$

$4>4$ – нев.

2) $+,+,-$ $2x+y-4+2x+y>4$

$4x+2y>8$

$2y>-4x+8$

$y>-2x+4$

3) $+,-,+$: $\cancel{2x}-y+4-\cancel{2x}-y>4$

$-2y>0$

$y<0$

4) $+,-,-$: $2x-\cancel{y}-4+2x+\cancel{y}>4$

$4x>8$

$x>2$

5) $-,+,+$: $-2x+\cancel{y}+4-2x-\cancel{y}>4$

$-4x>0$

$x<0$

6) $-,+,-$: $-\cancel{2x}+y-4+\cancel{2x}+y>4$

$2y>8$

$y>4$

7) $-,-,+$: $-2x-y+4-2x-y>4$

$-4x-2y>0$

$2y<-4x$

$y<-2x$

8) $-,-,-$: $-\cancel{2x}-\cancel{y}-4+\cancel{2x}+\cancel{y}>4$

$-4>4$ – нев.

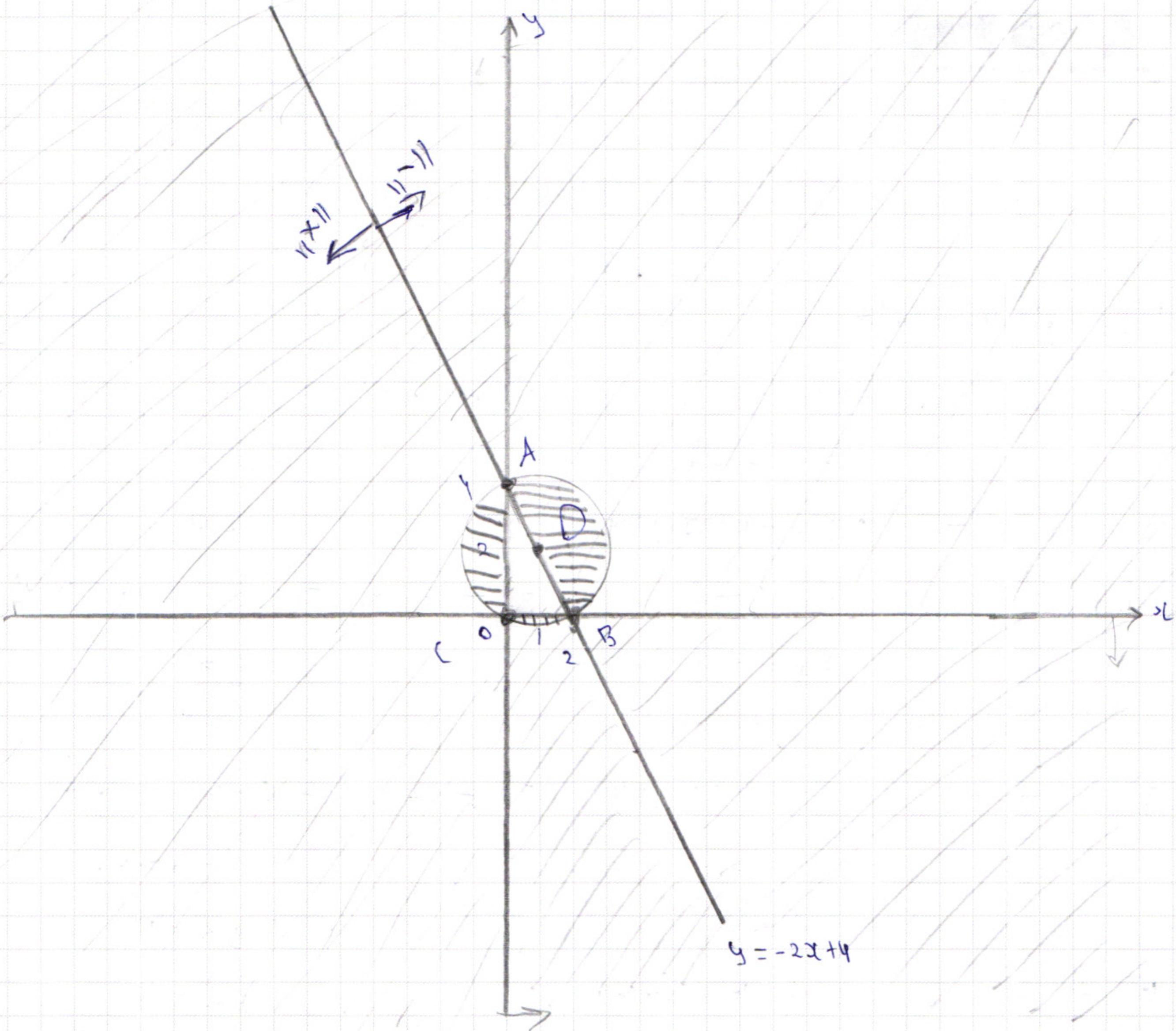
Знак „+" означает, что подмодульное выражение ≥ 0, а „–" наоборот.

$x^2-2x-4y+y^2\leq 0$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4-5\leq 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$

Окр. с центром в т. $(1,2)$ и $r=\sqrt{5}$



На графике показана область задаваемая $|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$ →

→ ~~эта~~ это вся плоскость $(x;y)$, кроме треуг. с вершинами в т-ах: $(2;0)$, $(0;0)$, $(0;4)$.

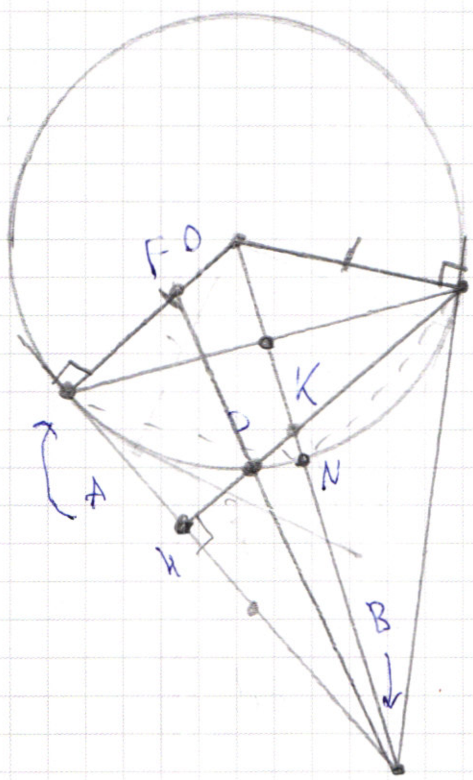
Пусть ц. окр — т. D и A, B, C — верш. треуг., тогда: $AO=OB=OC=\sqrt{5}$

Тогда можно заметить, что $S_ф = S_{окр} - S_Δ$, т.е. $S_ф = \pi r^2 - \frac{2 \cdot 4}{2} =$

$= 5\pi - 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) $OA = OC = r$.

2) $AB = BC$, как кас., пров. к. окр. из 1 точки – т. B

3) $\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ$ =>

=> $\angle AOB = \angle COB$ и $\angle ABO = \angle OBC$.

4) $\angle AON = \angle CON$ => $\cup AN = \cup NC$

5) $\angle ABO = \frac{1}{2} \cup AN$ как угол между кас. и хорд. => $\angle ABO = \frac{1}{2} \angle AOB$ => => $\angle ABO = 30^\circ$; $\angle AOB = 60^\circ$, т.к. $\angle AOB + \angle ABO = 90^\circ$.

6) => $AO = \frac{1}{2} AB$, как катет, лежащий против угла в 30° => => $AB = 8$ => т.к. $S_{ADB} = 6$, то $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH = 6$ => $DH = \frac{12}{8} = 1{,}5$

~~Из подобия △BFA и △BDA следует, что~~ $\cancel{\frac{BH}{AB} = \frac{3}{16} \Rightarrow BH = \frac{3}{16} AB = BH = \frac{3}{16} \cdot 8 = 1{,}5}$

~~И из подобия △AOB и CHB по II углам следует, что~~ $\cancel{\frac{AB}{CH} = \frac{OA}{BH}} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow CH = \frac{AB \cdot BH}{OA} = \frac{8 \cdot 1{,}5}{4} = 3} \Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{8}{3}$

7) ~~△BFA ∼ △BDH по II углам~~ $\cancel{\Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{DH}{A}}$

+) ~~$AB^2 = 64 = (4+NB)NB$, заменим $NB = x$, тогда $x(x+4) = 64$~~

~~$x^2 + 4x - 64 = 0$~~

~~$D = 16 + 4 \cdot 64 = 4 \cdot 68 = 4 \cdot 4 \cdot 7 = 16 \cdot 7 \Rightarrow NB = \frac{-4 + 4\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{7} - 2$~~

~~$\sin 30^\circ =$~~

7) $\sin 30^\circ = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}$

$OB = 8 \Rightarrow NB = 4 \Rightarrow AN = ON = NB = NC$

$AB = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64-36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ по т. Пифагора.

из подобия $\triangle AOB$ и $\triangle CHB$: $\frac{AB}{CH} = \frac{OA}{BH} \Rightarrow CH = \frac{AB \cdot BH}{OA} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 1{,}5}{4_2} =$

$= \frac{3\sqrt{7}}{4}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} \cdot 4 = \frac{8}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик

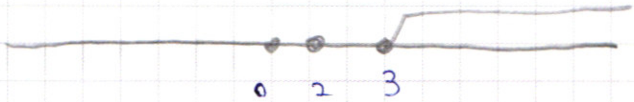
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$

$x^2-6x+10=$
$=x^2$

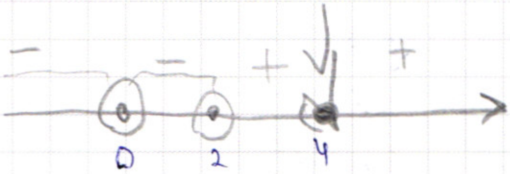


$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0$$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0$$

$2x^2-4x+x(x-2)=$
$=2x^2-4x\cdot x^2+2x$



$x=4$

$-y$

$4-2x-y \ge 0$

$-y \ge 2x-4$

$y \le -2x+4$

$16-24+10-2=0$
$32-16+8$

$x \ge 0$
$y \ge 0$
$4-2x-y \ge 0$

$\cancel{2x+y+4-2x-y>4}$

$4>4-\cancel{0}$

$x \le 0$
$y \ge 0$
$4-2x-y \ge 0$

$-2x+y+4-2x-y>4$

$-4x>0$

$x<0$

$2x^2-4x-x(x-2)=2x^2-4x-x^2+2x=$
$=x^2-2x$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$x \le 0$
$y \le 0$

$x^2-2x-4y+y^2 \le 0$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4-5 \le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2 \le 5$

$-\ +\ +$

$+ \quad + \quad +$
$+ \quad + \quad -$
$+ \quad - \quad +$
$+ \quad - \quad -$

$\frac{\sin B}{EC}=\frac{\sin 30}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}$

$EC=\frac{\sin B\cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{0{,}5}=4\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}=4\cdot 1=4$

$\sin B=\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

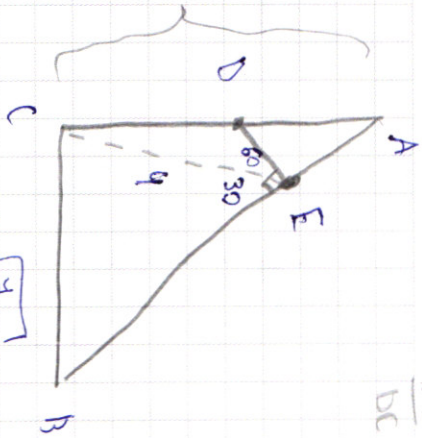
$\sin A=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

$AB=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

$7+4\cdot\frac{7}{3}=\frac{28}{3}+7=\frac{28}{3}+\frac{21}{3}=\frac{49}{3}$

$AB^2=7+4\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{9}+\frac{63}{9}=$

$2\sqrt{\frac{7}{3}}$



$\frac{AD}{DC}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$y^2=5-x$

$\cancel{x^2-5x+4y^2=5}$

$\cancel{x^2-5x+4(5-x)=5}$

$\underbrace{x^2-5xy+4y^2=0}$

$y^2=t$

$\sqrt{xy}=m$

$x=\frac{m^2}{\sqrt{t}}$

$\frac{x-2y=\sqrt{xy}}{x+y^2=5}$ −

$-2y-y^2=\sqrt{xy}-5$

$\sqrt{xy}+2y=5-y^2$

$x-2y=\sqrt{xy}$

$x=5-y^2$

$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

$y^2+2y-5=-$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$x^2-xy-4xy+4y^2=0$

$x(x-y)-4y(x-y)=0$

$(x-4y)(x-y)=0$

1) $x=4y$ 2) $x=y$

$\begin{cases} 4y-2y=\sqrt{4y^2} \\ 4y+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2y=2y \\ y^2+4y-5=0 \end{cases} \Rightarrow y^2+5y-y-5=0$

$y(y+5)-1(y+5)=0$

$(y-1)(y+5)=0$

$\left[\begin{array}{ll} y=1 & x=4 \\ y=-5 & x=-20 \end{array}\right.$

$\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

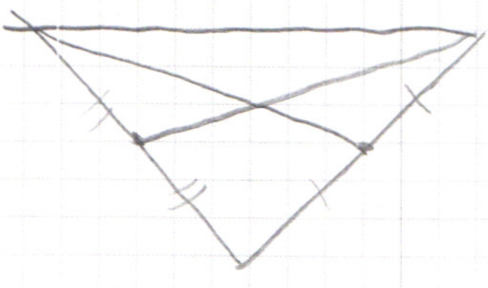
149 × 2 = 298

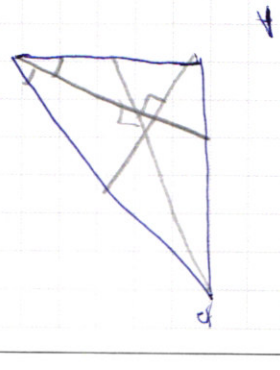
149 × 3 = 447

600 − 447 = 153

149 149 153

149 298 153





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

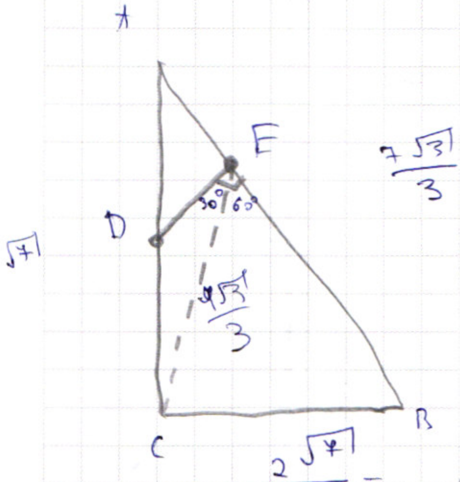
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AB^2 = 7 + \frac{4}{9}\cdot 21 = 7 + \frac{84}{9} = \frac{63+84}{9} = \frac{147}{9} = \frac{3\cdot 49}{9} = \frac{49}{3}$

$AB = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3}}{7\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\frac{\sin 60\cdot 3}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot EC}$

$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot EC}$

$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$

$\frac{AE}{AC^2} = \frac{AD}{AB\cdot AC}$

$\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{7}}EC}$

$\cancel{\sin A} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\operatorname{tg} A = \frac{2\sqrt{21}}{3\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{3} = \frac{DE}{AE}$

$\cancel{\sqrt{21}}EC\cdot 3 = 4\cancel{\sqrt{21}}\cdot\sqrt{3}$

$EC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{7\cdot 3}{7\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\cancel{\frac{AE}{BC}} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\cancel{\frac{CH}{BC}}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AB\cdot AE}{AC^2}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{BC}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC\,ED}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{AE}{AC\,ED} = \frac{1}{BC}$ $\quad \frac{AE}{ED} = \frac{AC}{BC}$

x $\quad AE = \frac{\sqrt{3}x}{2}$

$AE = \frac{\sqrt{3}}{2}ED$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} =$

$\frac{3x}{7\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{7}}$

x

$\cancel{\frac{AH}{AC} = \frac{CH}{BC}}$

$21x =$

$S = \frac{AE\cdot DE}{2}$

$4\cdot 21 - 4\cdot 12 = \sqrt{\frac{4\cdot 9}{9}} = 2$

$\sqrt{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

100

$a = 200$

$a = 150$

$S_{AED} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} ED^2$

$S_{ABC} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot \sqrt{7}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{7\sqrt{3}} = \frac{3}{28} ED^2 =$

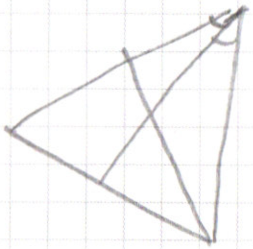
$k^2 = \frac{ED}{\frac{2\sqrt{21}}{3}} = \frac{3ED}{2\sqrt{21}} = \frac{9ED^2}{84}$

$n > 3$

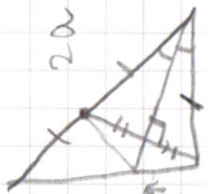
$a\ 3a > 5$

$a + n > 2a$

$n \in (a, 3a)$



2a



3

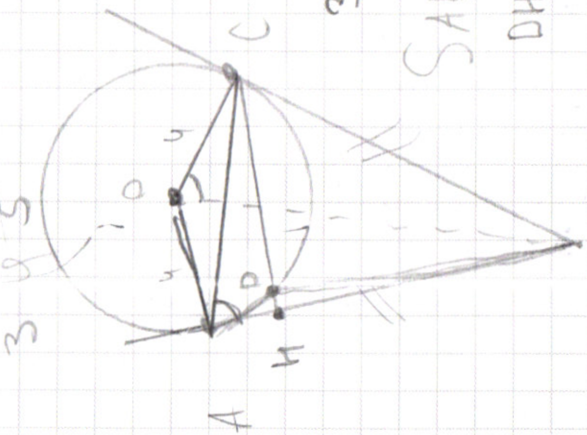
$S_{ABD} = 6$

$DH \cdot \frac{1}{2} AB = 6$

$DH \cdot AB = 12$

1 2 3

$P_\Delta = 600 \Rightarrow a + b + c = 600$



$n \in [a+1; 3a)$

$n \in [a+1, 3a-1]$

46 47 $\frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot \sqrt{7} = \frac{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{14}{3}\sqrt{3}$

$\frac{AD}{AB}$

$\frac{ED}{AD} = \frac{BC}{AB}$

a 2a

$3a + n = 600$

$a < n < 3a$

$\begin{cases} a + 2a + n = 600 \\ a < n < 3a \end{cases}$

$3a + n = 600$

$\sin B = \frac{\frac{2}{3}}{2\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

$\frac{FM}{FB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$a + n > 2a$

$n > a$

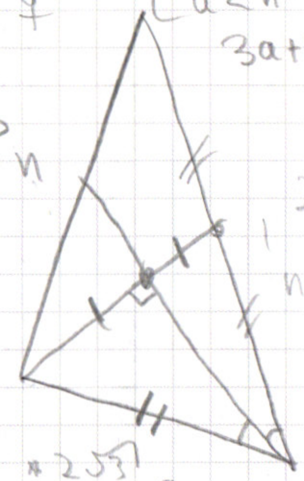
$\frac{2}{FM} = \frac{BH}{\frac{2\sqrt{21}}{3}}$

$3a > 4$

$n < 3a$

$2a + n > a$

$n > 0$



$\frac{\frac{AE}{AD}}{\frac{14}{3}\sqrt{3}} = \frac{0,5}{DC}$

$\frac{AE}{ED} = \frac{2\sqrt{3}}{3DC} a$

$3DC = \frac{2\sqrt{3}ED}{AE}$

$DC = \frac{2\sqrt{3}ED}{3AE} =$

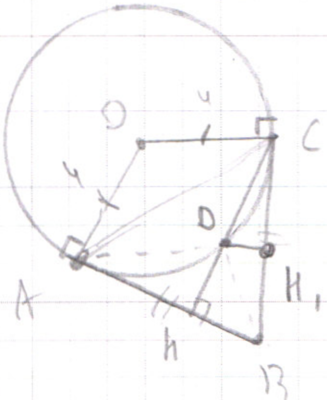
$AD =$

$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2}$

$\sqrt{7} - \sqrt{AE^2 + DE^2}$

5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$BC \cdot DH_1 = 12$

$BC \cdot \frac{12}{AB} = 12$

$S_{ABD} = 6$

$CD = AD = 4$

$AB \cdot DH = 12$

$AB = \frac{12}{DH}$

$\triangle DAB \sim \triangle ABC$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\frac{4 \cdot 21}{9} = \frac{16 \cdot 3}{9} + c^2 - bc$

$c^2 - bc = \frac{84-48}{9} = \frac{36}{9} = 4$

$c^2 - bc$

$c^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}c - 4 = 0$

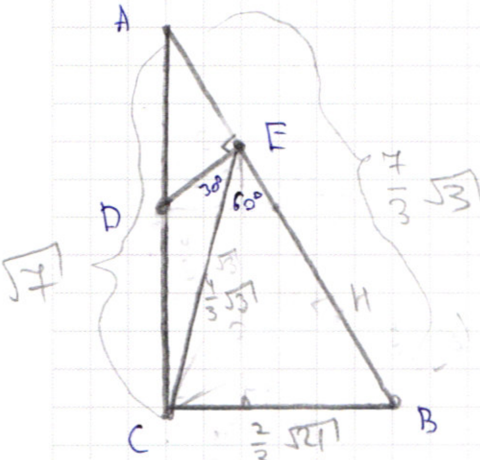
$2\sqrt{3}$

$D = \frac{16}{9} \cdot 3 + 16 =$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



$AC=\sqrt{7}$, $\angle CED = 30°$; $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$.

1) $BC = 2\frac{\sqrt7}{\sqrt3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$; $AB^2 = AC^2+BC^2 = 7 + \frac{4\cdot 21}{9} = \frac{63+84}{9} = \frac{147}{9} = \frac{3\cdot 49}{9} = \frac{49}{3}$ по

т. Пифагора $\Rightarrow AB = \frac{7}{\sqrt3} = \frac{7\sqrt3}{3}$

$\angle CEB = 60°$ $(90°-30°)$

$\sin\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt7\cdot\cancel{3}\sqrt3}{\sqrt7\cdot\cancel{7}\sqrt3} = \sqrt{\frac37}$

по т. синусов: $\frac{\sin 60°}{BC} = \frac{\sin\angle B}{CE} \Rightarrow \frac{\sqrt3}{2BC} = \frac{\sqrt{\frac37}}{CE} \Rightarrow$

$\Rightarrow CE = \sqrt{\frac37}\cdot\frac{2\cdot\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{\sqrt7}\cdot\frac{4\sqrt{21}}{3\sqrt3} = \frac43\sqrt3$

$\Delta AED \sim \Delta ACB$ по II углам $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC}$

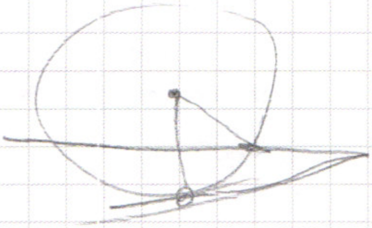
$\cancel{\frac{AE}{EC}}$ 7 $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt7\cdot 3}{2\sqrt{21}} = \frac{3}{2\sqrt3} = \frac{3\sqrt3}{6} = \frac{\sqrt3}{2} \Rightarrow$

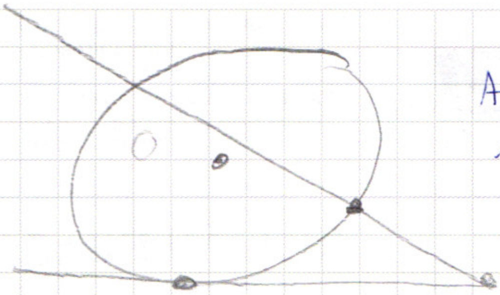
~~$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$; пусть $AD=x$, AE тогда~~ $\Rightarrow AE = \frac{\sqrt3\cdot ED}{2}$

~~$AD = \sqrt{AE^2+DE^2} = \sqrt{\frac34 ED^2 + ED^2} = \frac{\sqrt7 ED}{2}$~~

$\frac{\frac{\sqrt7}{2}ED\cdot 3}{7\sqrt3} = ED$

$f(a\cdot b) = f(a) + f(b)$

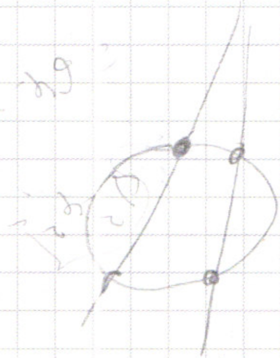


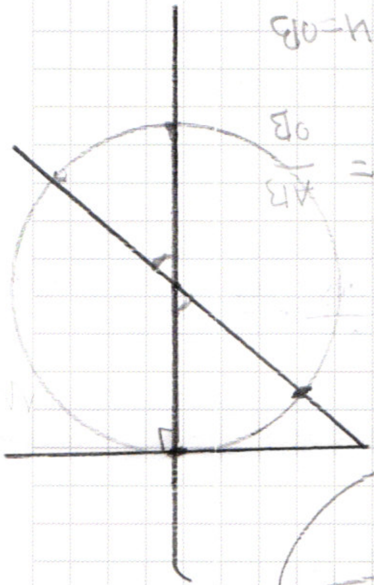


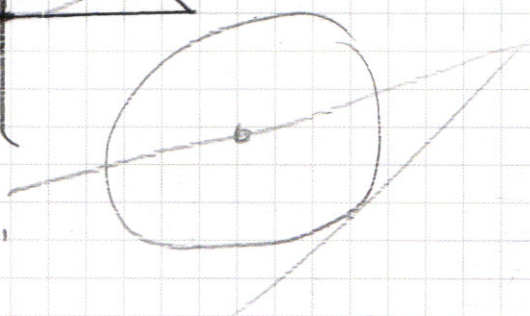
$AB \cdot DH = 12$

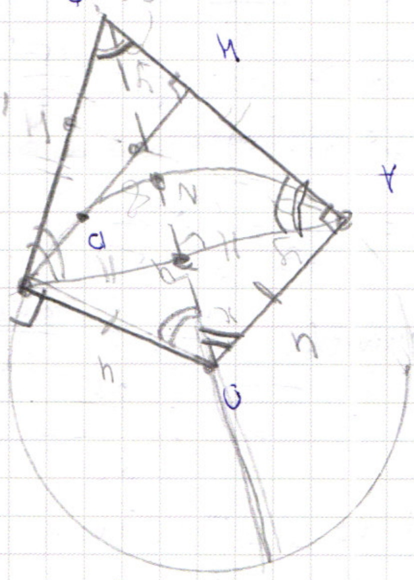
$AB = 8$

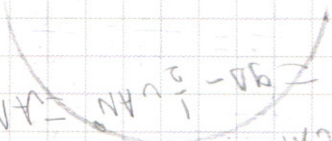
$DH = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

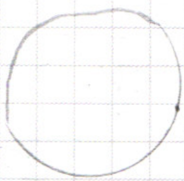


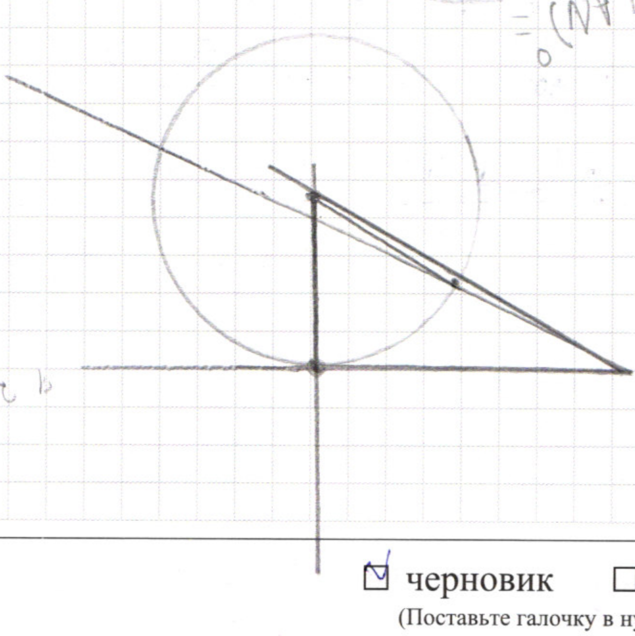












☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)