МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|}\le 0 \ ;(1)$$

$$x^2-6x+9-2|x-3|+1=(|x-3|-1)^2$$

Получаем:

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0 \ ;(2)$$

$(|x-3|-1)^2\ge 0$ для $\forall x\in\mathbb{R}$, и значит равносильным будет поделить (2) на нее при условии, что $(|x-3|-1)^2\ne 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ne 4\\ x\ne 2\end{array}\right.$. При $x=4$ и $x=2$ числитель в (2) равен нулю, но необходимо чтобы знаменатель дроби не равнялся нулю при $x=4$ и $x=2$:

$x=4$:

$2(16-8)+|16-8|\ne 0$, значит $\boxed{x=4}$

$x=2$:

$2(4-4)+|4-4|=0$, значит $x\ne 2$

Получаем:

$$\frac{1}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0$$

Что равносильно:

$$2(x^2-2x)+|x^2-2x|<0 \ ;(3)$$

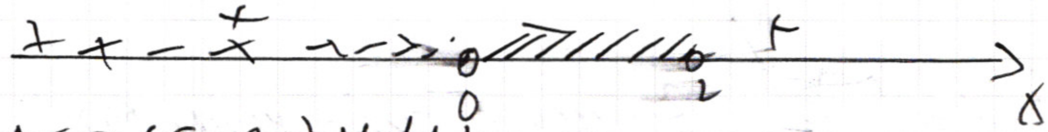
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $x^2-2x>0$ (равенство нулю ведет к тому, что неравенство (3) не выполнено, так как мы делили в (2) на ноль):

$$\begin{cases} 3(x^2-2x)<0 \\ x(x-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)<0 \\ x(x-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Если $x^2-2x<0$:

$$\begin{cases} 3(x^2-2x)<0 \\ x^2-2x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x(x-2)<0$$

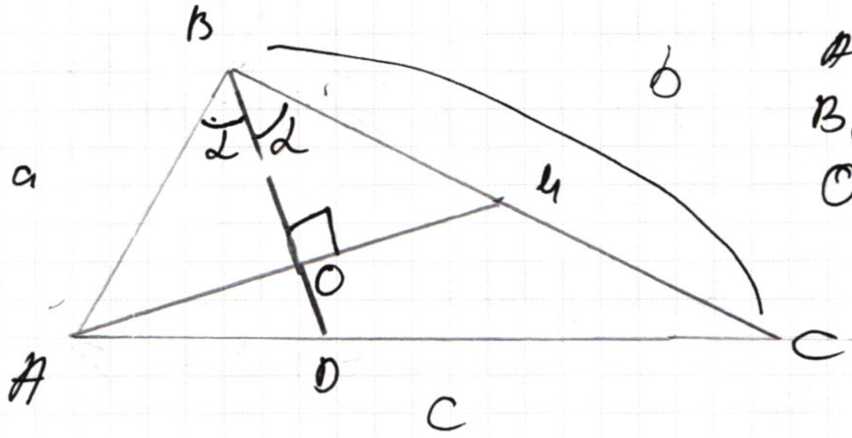


$x\in(0;2)\cup\{4\}$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

2.

$a+b+c=600$
AM – медиана
BD – биссектриса
$O = AM \cup BD$



$\triangle ABO = \triangle BOM$ ($\angle ABO = \angle OBM = \alpha$, $\angle AOB =$
$= \angle BOM = 90°$):

$AB = BM = a \Rightarrow BC = 2a = b$

Тогда:

$3a + c = 600$

$\begin{cases} a = 200-k \\ c = 0+3k \end{cases}$; $k \in \cancel{\mathbb{Z}}\ \mathbb{N}$. Заметим, что не при всех k $a, 2a, c$ образуют треугольник. Запишем неравенства треугольников в терминах ~~$k \in \mathbb{Z}$~~: $k \in \mathbb{N}$:

$\begin{cases} 3(200-k) > 3k \\ (200-k)+3k > 2(200-k) \\ 2(200-k)+3k > (200-k) \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} k<100 \\ k<50 \\ k>0 \end{cases} \Leftrightarrow}$

~~$\Leftrightarrow k \in (0;50)$~~

$\Leftrightarrow \begin{cases} k<100 \\ k>50 \\ k>0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (50;100)$. Ответ: 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy};(1) \\ x+y^2=5;(2) \end{cases}$; $x-2y\geq 0$ (по определению корня); (*)

~~(далее я буду ссылаться на условие (*), что означает, что x~~

Возведем (1) в квадрат:

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0 \quad |:y^2$

Заметим, что если $y=0$, то и $x=0$, но пара $(0;0)$ не удовлетворяет (2).

$\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+4=0$

Замена: $\frac{x}{y}=u$

$u^2-5u+4=0$

$\left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=4 \end{array}\right.$

Получим две системы:

$\begin{cases} \frac{x}{y}=1 \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y^2+y-5=0;(3) \end{cases}$

$\begin{cases} x=4y \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$y^2+4y-5=0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \text{, удовлетворяет (*)} \\ \begin{cases} x=-20 \\ y=-5 \end{cases} \text{, не удовлетворяет условию (*)} \end{array}\right.$

(3): $y^2+y-5=0$

$D=21$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Проверим $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{}$~~

Проверим пары $\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$ и $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$:

Если $x = y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, то из (1):

$$\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right) - 2\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right) = \sqrt{xy}$$

$$\underbrace{\frac{-\sqrt{21}+1}{2}}_{<0} = \sqrt{xy}$$

Значит пара $\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$ не подходит.

Проверим вторую пару на условие (*):

$\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) - 2\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}+1}{2} \geq 0$, а значит

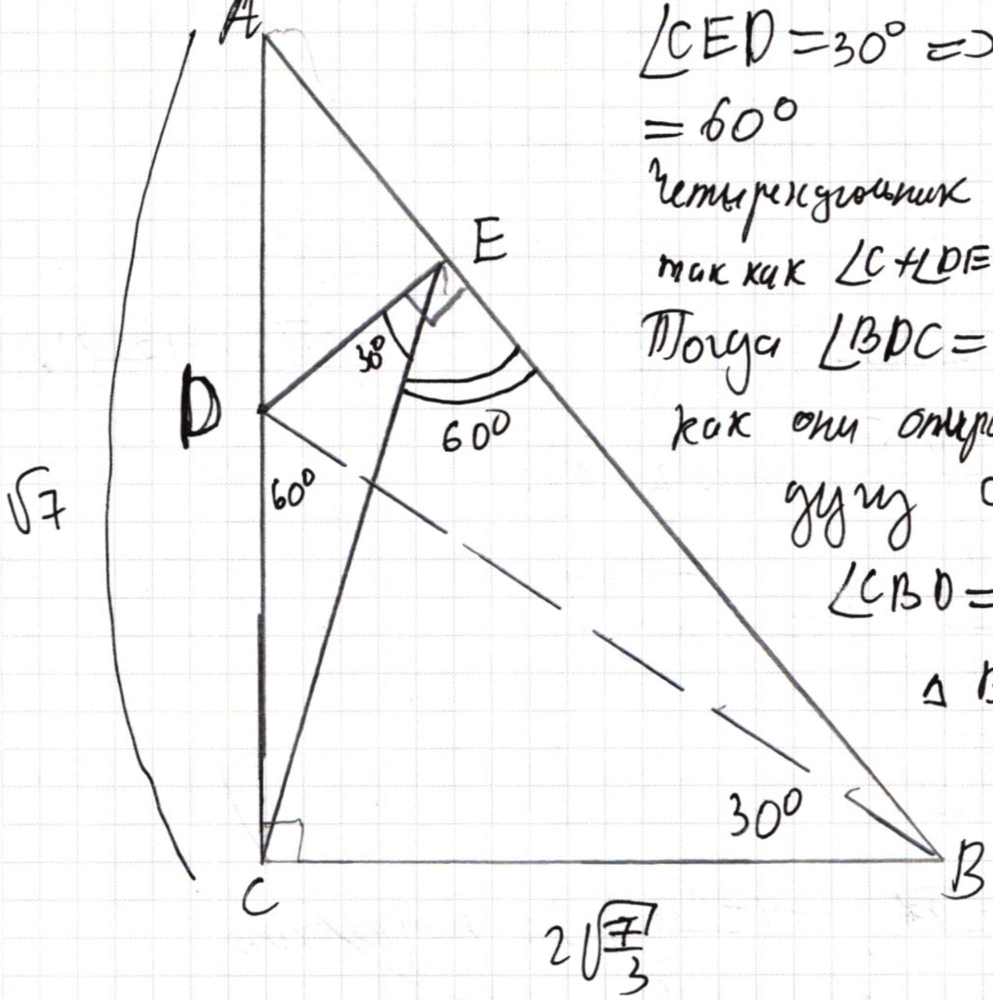
имеем ещё одно решение системы.

Ответ: $(4;1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

5.



$\angle CED = 30° \Rightarrow \angle CEB = 90° - 30° = 60°$

Четырехугольник CDEB — вписанный, так как $\angle C + \angle DEB = 180°$.

Тогда $\angle BDC = \angle BEC = 60°$, так как они опираются на одну дугу CB. Значит $\angle CBD = 30°$. В $\triangle BCD$:

$tg\, 30° = \frac{CD}{\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$CD = \frac{2}{3}\sqrt{7}$. Тогда $AD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$, а значит $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$.

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ($\angle CAB$ — общий, $\angle C = \angle AED = 90°$):

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2$$

Пифагор ($\triangle ABC$):

$AB^2 = 4 \cdot \frac{7}{3} + 7 = \frac{28}{3} + \frac{21}{3} = \frac{49}{3}$

$AD = \frac{1}{3}\sqrt{7} \Rightarrow AD^2 = \frac{7}{9}$; $\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{\left(\frac{49}{3}\right)} = \frac{1}{21}$

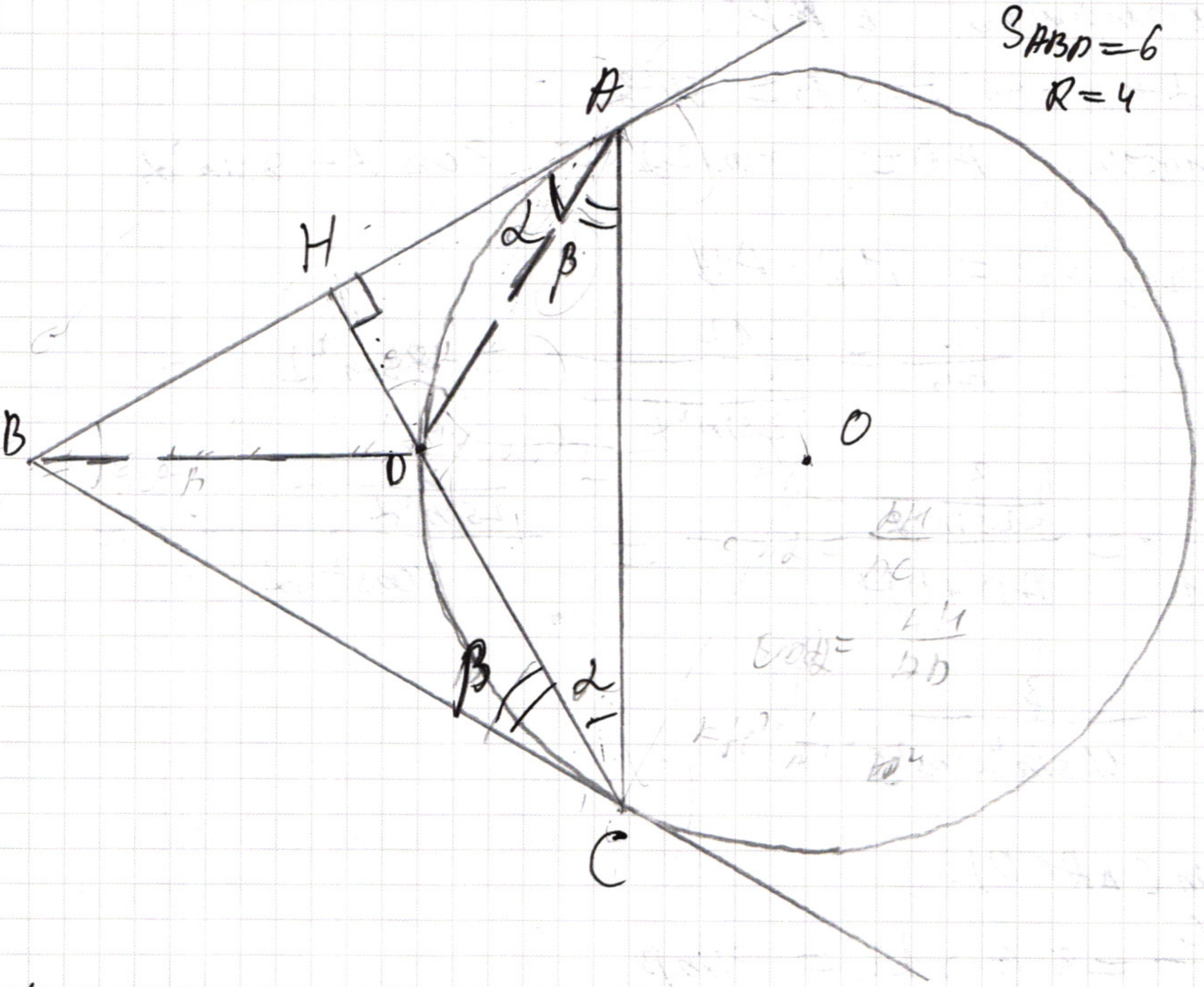
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{7} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$S_{ADE} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 S_{ABC} = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}{\frac{49}{3}}\ \frac{1}{21} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S = \frac{\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$S_{ABD} = 6$
$R = 4$

$\angle BAD = \alpha = \angle DCA$ (опираются на одну дугу)

$\angle BCD = \beta = \angle DAC$ (опираются на дугу $\breve{DC}$)

~~в $\triangle BHC$: $\angle HBC = 90° - \beta$~~

~~$T_{\sin}$ ($\triangle$~~

$2 \cdot S_{ABD} = 12 = AB \cdot AD \sin\alpha$

$T_{\sin}(\triangle ADC)$:

$AD = 8\sin\alpha$; $12 = 8AB\sin^2\alpha \Leftrightarrow \boxed{AB = \frac{3}{2\sin^2\alpha}}$

$T_{\sin}(\triangle ACD)$:

$$\frac{AD}{\sin\beta}=8$$

$AD=8\sin\beta$

В прямоугольном $\triangle AHC$:

$2\alpha+\beta=50^\circ \Leftrightarrow \beta=50^\circ-2\alpha$

Значит $AD=8\cos2\alpha=8\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha$

$2S_{ABD}=12=HD\cdot AB$

$$HD=\frac{12}{AB}=\frac{12}{\frac{3}{2\sin^2\alpha}}=8\sin^2\alpha$$

$$\frac{AB}{CH}=\frac{\left(\frac{3}{2\sin^2\alpha}\right)}{AD+DH}=\frac{\frac{3}{2\sin^2\alpha}}{8\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{3}{16\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$T_{\sin}(\triangle ACD)$:

$\frac{DC}{\sin\beta}=8 \Leftrightarrow DC=8\sin\beta$

В $\triangle AHC$: $2\alpha+\beta=50^\circ$

Значит $\sin\beta=\sin(90^\circ-2\alpha)=\cos2\alpha$

$\boxed{DC=8\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha}$

$2S_{ABD}=12=HD\cdot AB \Leftrightarrow \boxed{HD=8\sin^2\alpha}$

$$\frac{AB}{CH}=\frac{\left(\frac{3}{2\sin^2\alpha}\right)}{8\cos^2\alpha}=\frac{3}{16\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\cancel{\frac{3}{2\sin^2 2\alpha}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

$\forall a,b \in \mathbb{Q}_{>0}$; $\mathbb{Q}_{>0} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x>0\}$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

p - простые:

$f(p) = p > 0$

$1 \le x \le 18$, $1 \le y \le 18$; $f(\frac{x}{y})<0$

Заметим, что:

$f(\frac{1}{p}) = f(\frac{p}{p^2}) = f(p) + f(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}) =$

$= p + 2f(\frac{1}{p}) \Longleftrightarrow \boxed{f(\frac{1}{p}) = -p<0 \ \forall p}$

Заметим также, что $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)+f(1)$, что означает, что $f(1)=0$.

По основной теореме арифметики:

$f(c) = f(p_1\cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) = p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n$.

То есть:

$f(\prod_{i=1}^{n} p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Это означает, что $\boxed{x>1 \ f(x)>0.}$

Если $x \in [1; 18]$ и p-простое:

$f(\frac{x}{p}) = -p + \sum_{i=1}^{n} p_i$, где p_i - простые числа: $\prod_{i=1}^{n} p_i = x$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда, условие $f(\frac{1}{p})<0$ равносильно тому, чтобы
$-p+(p_1+\ldots+p_n)<0$
$(p_1+\ldots+p_n)<p$
Если, например, $p=2$, то на роль x подходит только 1:
$f(\frac{1}{2})=\cancel{f(1)+f(}-2<0$
Но вот при $x=2$:
$f(\frac{2}{2})=f(1)=0$
При $p=3$:
$x=1,\ x=2$

Если S — число пар $(x;y)\,/\,f(\frac{x}{y})<0$, то
$S\geq 1+2+3+\ldots+16=\frac{17}{2}\cdot 16=17\cdot 8=136$
Обобщим свойство $f(\frac{1}{p})=-p$ для p-простых:
$f(\frac{1}{y})=f(\frac{y}{y^2})=f(y)+2f(\frac{1}{y})\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{f(\frac{1}{y})=-f(y)}<0$ (Ранее мы показали, что при $y>1$ $f(y)>0$, а значит $f(\frac{1}{y})<0$ $\forall y>1$).
Итак, рассматривая $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ ~~положим~~ положим $x=p_1\cdot\ldots\cdot p_n$, а $y=q_1\cdot\ldots\cdot q_n$, где p_i, q_i — простые числа (не обязательно различные).
$f(\frac{x}{y})<0\Leftrightarrow(p_1+\ldots+p_n)-(q_1+\ldots+q_n)<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(p_1+\ldots+p_n)<(q_1+\ldots+q_n)\Leftarrow x<y$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдем все пары $(x;y)$: $x<y$. (S_x – кол-во „иксов''; S_y – кол-во „игреков'')

При $x=1$:

$S_y = \cancel{18} - 1 = 17$

При $x=2$:

$S_y = 16$

$\vdots$

При $x=18$:

$S_y = 0$

S – количество пар $(x;y)$ / $x<y$:

$S = 17+16+\ldots+1+0 = \frac{17+0}{2}\cdot 18 = 17\cdot 9 =$

$= 153.$

Ответ: 153

6.
$$\begin{cases} |4-2x-y| \geq 4-2|x|-|y|; (1) \\ x^2-2x-4y+y^2 \leq 0; (2) \end{cases}$$

(2):

$(x-1)^2+(y-2)^2 \leq (\sqrt5)^2$ – ~~ок~~ круг с центром $O(1;2)$ радиуса $R=\sqrt5$ (вместе с окружностью).

(1):

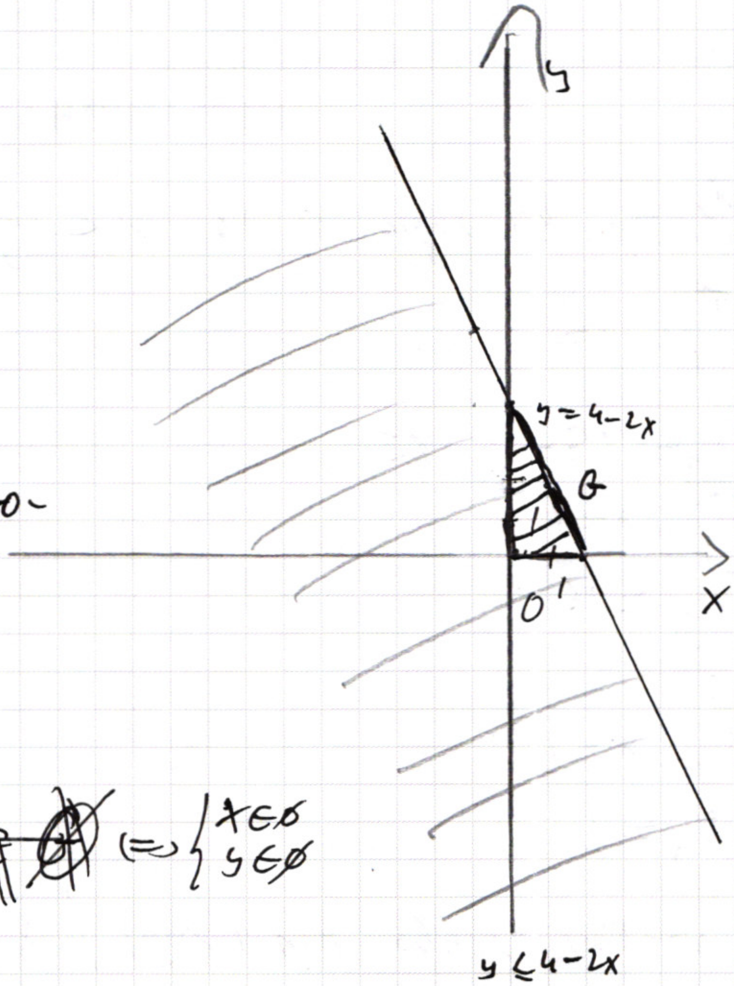
$|4-2x-y| = 4-2|x|-|y|$

Первый случай: $4-2x-y \geq 0 \iff y \leq 4-2x$

$2x+y = 2|x|+|y|$

Если $x \geq 0$ и $y \geq 0$:

$$\begin{cases} 0=0 \\ x\geq 0, y\geq 0 \\ y \leq 4-2x \end{cases}$$



На рисунке изображена область G — область, удовлетворяющая уравнению (1) при $x, y \geq 0$.

Если $x<0$ и $y<0$

$$\begin{cases} y=-2x \\ x<0 \\ y<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x<0 \\ y<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases}$$

Если $x>0$, $y<0$:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ x>0 \\ y<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases}$$

Если $x<0$, $y>0$:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x<0 \\ y>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases}$$

Второй случай: $4-2x-y < 0 \iff y > 4-2x$. (1):

$-4+2x+y = 4-2|x|-|y|$

Если $x\geq 0$ и $y\geq 0$:

$-4+2x+y = 4-2x-y$

$4x+2y=8$

$$\begin{cases} y=4-2x \\ y>4-2x \end{cases} \iff \begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Если x~~

Если $x<0$ и $y<0$:

$-4+2x+y=4+2x+y$

$-4=4$, неверно, значит $x\in\varnothing, y\in\varnothing$ при $x,y<0$

Если $x>0$ и $y<0$:

$-4+2x+y=4-2x+y$

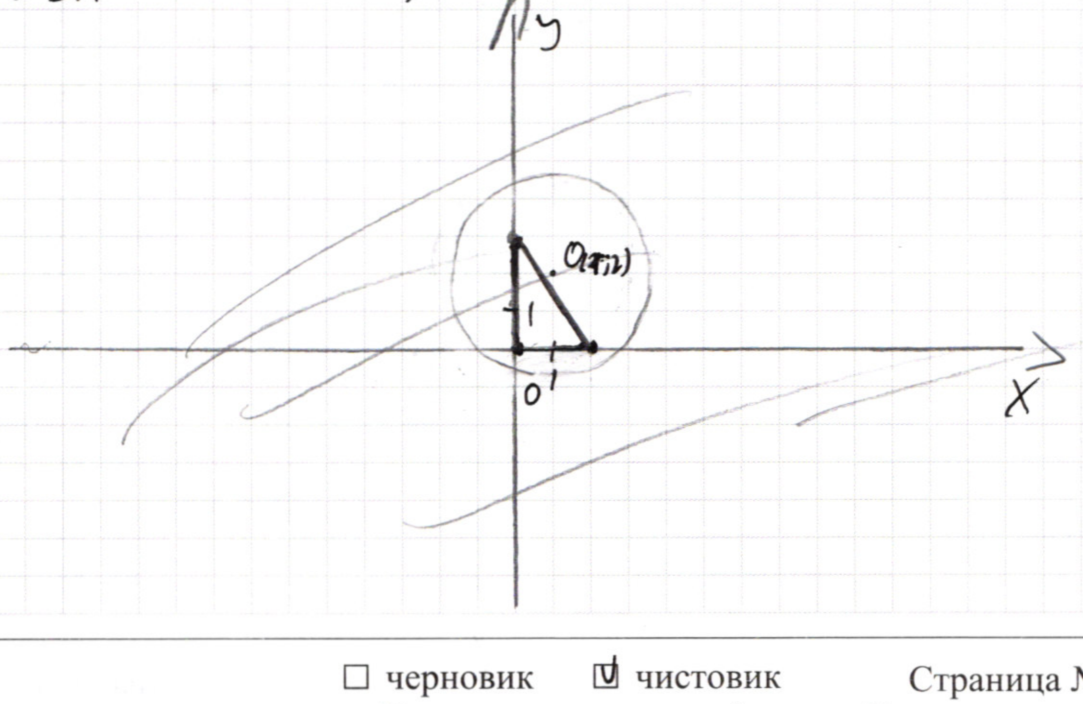
$4x=8$

$\begin{cases} x=2 \\ y<0 \\ y>4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases}$

Если $x<0$ и $y>0$:

$-4+2x+y=4+2x-y$

$\begin{cases} y=2 \\ x<0 \\ y>4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\varnothing \\ y\in\varnothing \end{cases}$



☐ черновик ☑ чистовик

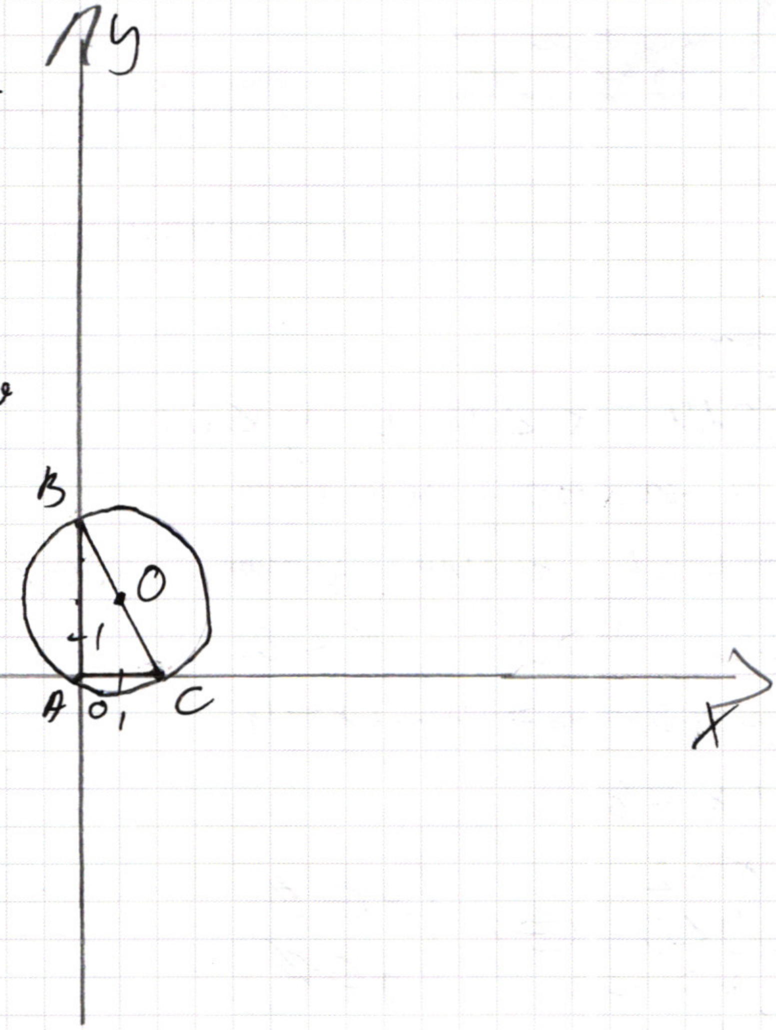
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Замечу, что $\omega: (x-1)^2+(y-2)^2=5$ проходит через $(0;0)$, $(2;0)$, $(0;4)$ и принадлежит прямой $y=4-2x$. ~~Так~~

Это значит, что ω — описанная окружность $\triangle ABC$.

S — площадь фигуры



$$S = \pi R^2 = 5\pi$$

Ответ: 5π

$|4-2x-y| \le 4+2|x|+|y|$

$(x-1)^2+(y-2)^2-5\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le(\sqrt5)^2$ — окр.

$O(1;2),\ R=\sqrt5$

$|a+b| \le |a|+|b|$

$a^2+2ab+b^2 \le a^2+2|ab|+b^2$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|=4$

$4-y=0$

$\boxed{y=4}$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ |4-2x-y|=4 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ |4-2x-y|=4 \end{array}\right.$; (1)

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 4-2x-y=0 \\ |2x|=4 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2x=0 \\ 4-2x-y=0 \\ |y|=4 \end{array}\right.$

$x=-2$

$4-2x=0$

(2):

$\left[\ y=0\right.$

$\left\{\begin{array}{l} |x|=2 \\ 4-2x-y=0 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} |x|=2 \\ 4-2x=0 \end{array}\right.$

$\boxed{x=2}$

$y\le 4-x$

$-2x=4$

$\boxed{x=-2}$

(1):

$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ 4-2x-y=-4 \end{array}\right.$

$2x=y$

$2|x|+|y|=2x+y$

$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ 2x-y=0 \end{array}\right.$

$4-2|x|-|y|=4-2x-y$

$\left\{\begin{array}{l} -2x-y=-8 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$

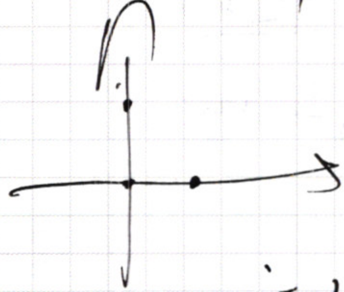
$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array}\right.$

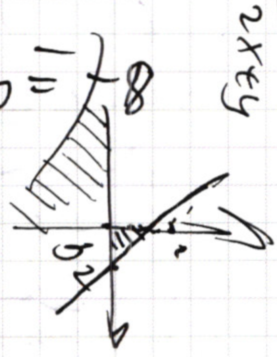
$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x\le 0 \\ (x;y) \end{array}\right.$

$y\le -2x$

$|4-2x-y| = |4-2x-y| = 4-2|x|-|y|$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

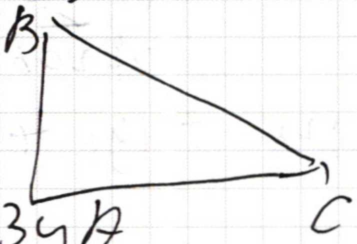
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \quad ;(1) \\ x+y^2=5 \quad ;(2) \end{cases} \quad ; \text{ОДЗ}: \cancel{x\geq 0,\ y\geq 0}$$



$(1)-(2)$:

$\cancel{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=3y$

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$(y+1)^2=6-\sqrt{xy}$

$y^2+y-5=0$

$D=1+20=21$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \\ x= \end{array}\right.$

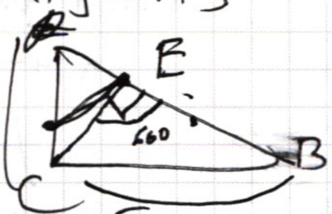
>0

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\frac{3-18+10}{18-12+3}$$

$\cancel{x^2-4xy=xy}$

$\sqrt{7}\ 0$



$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$2\sqrt{\frac{7}{3}}\ u^2-5u+4=0$

$\left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=4 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=4 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=1 \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

$4y+y^2=5$

$y^2+4y-5=0$

$y^2+5\cancel{-5}=0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=1 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x=\cancel{4}5 \\ y=\cancel{4}5 \end{cases} \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$$\begin{cases} |4-2x-y| \geq 4-2|x|-|y| \;;(1) \\ (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-5 \leq 0\;;(2) \end{cases}$$

(2):

$(x-1)^2+(y-2)^2 \leq (\sqrt{5})^2$ — круг (вместе с окружностью) с центром $Q(1;2)$ радиуса $R=\sqrt{5}$.

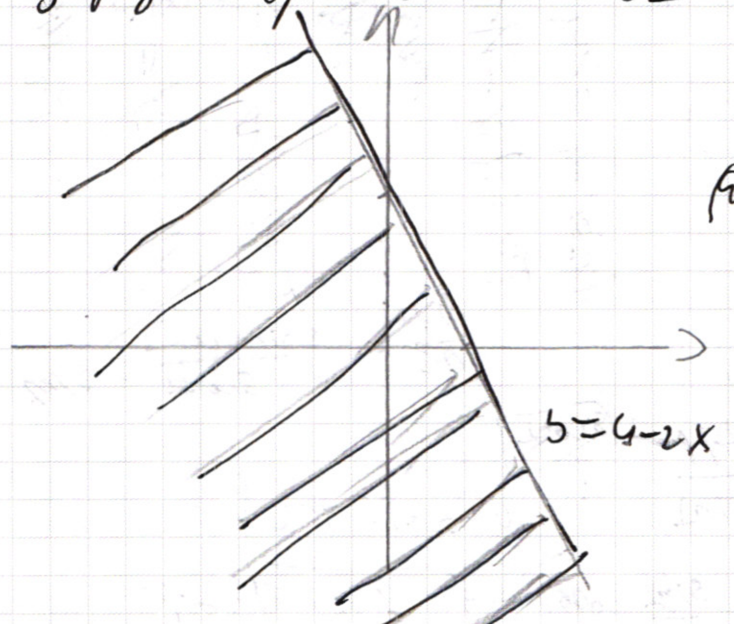
(1):

$|4-2x-y| \geq 4-2|x|-|y|$

Если $4-2x-y \geq 0 \iff y \leq 4-2x$:

$4-2x-y > 4-2|x|-|y|$

Изобразим нерав-нство $y \leq 4-2x$:



Если $x \geq 0$ и $y \geq 0$:

$\begin{cases} 4-2x-y > 4-2x-y \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0>0, \text{ неверно} \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varnothing \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Если $x<0$ и $y<0$:

$\begin{cases} 4-2x-y > 4+2x+y \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -2x \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{y < -2x}$

Если $x>0$, $y<0$:

$\begin{cases} 4-2x-y > 4-2x+y \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y > y \\ y < 4-2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow y<0$

Если $x<0$, $y>0$:

$\begin{cases} 4-2x+y > 4+2x-y \\ y \leq 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ y < 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow x<0$

Значит:

$\cancel{y \leq 4-2x}$

$f(a)+f(b)=f(a)+f(b)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=0$

$f\left(\frac{7}{4}\right)<0$

$a>b$, $b>0$

$AB = \frac{AC\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$\frac{AC\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\frac{12}{5} = \frac{7}{5}$

$AB = AB\cos\alpha + AC\sin\alpha$

$\boxed{h = AB \cdot AD \sin\alpha}$

$\frac{AD}{\sin\alpha} = 8$

$\sin\beta =$

$= \cos(2\alpha)$

$\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - 1$

$= 8AB\sin^2\alpha$

$\frac{12}{8} = AB\sin^2\alpha$

$\frac{3}{2} = AB\sin^2\alpha$

$\frac{AH}{\sin\alpha}$

$AH = AB\sin\alpha$

$BH = BC\sin\beta$

$AB = \frac{3}{2\sin^2\alpha}$

$\frac{CD}{\sin\beta} = 8$

$\boxed{CD = 8\sin\beta}$

$AD = AB \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{8}{\sin^2\alpha}$

$\frac{AH}{AC} = \frac{8\sin\alpha\cos\alpha}{8\cos\alpha} = \sin\alpha$

$\frac{AH}{\sin\alpha} = 8\cos\alpha$

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta$

$\frac{8\cos^2\alpha - 8\sin^2\alpha}{8\sin^2\alpha}$

$AC = \frac{\sin\alpha}{AH}$

$\boxed{AH = 8\cos\alpha\sin\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f: \mathbb{Q}_{>0} \to X$ $f(\frac{1}{5}) = f(\frac{5}{25}) = 5 + f(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}) = 5 + 2f(\frac{1}{5})$

$f(\frac{2}{9}) = f(2) + f(\frac{1}{9}) =$

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_{>0}$:

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(\frac{p}{p^2}) = = 2 + f(\frac{1}{9}) =$

$\forall p$ - простое:

$f(p) = p$ $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ $- p < 0$ $= f(p \cdot \frac{1}{p})$ $\cancel{f(\frac{x}{2}) = f(\frac{1}{2}) + f(x)}$

$= 2 + f(\frac{1}{pk}) =$

$\begin{cases} 1 \le x \le 18 \\ 1 \le y \le 18 \end{cases}$: $f(\frac{x}{y}) < 0$

$= 2 + f(\frac{1}{p}) + f(\frac{1}{k})$

$(1;1)$: $f(\frac{1}{p}) = -p$

$= \cancel{f(\frac{2}{p})} +$

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(\frac{\alpha}{p}) =$

$= f(\alpha) - p$

$13 + f(\frac{6}{25}) =$

$\forall$ $y \in [1; 18]$:

$f(\frac{13}{5}) = =$

$f(\frac{1}{y}) = \cancel{f(1) + f(\frac{1}{y})}$

$= f(13) + 5 =$

$= 54$

$13 + f(\frac{1}{5}) =$

$f(13) + f(\frac{1}{5}) = \cancel{13 + 5 + f(\frac{1}{25})} =$

$=$

$=$

$f(2) = 2$ Пусть тогда $f(\frac{p}{q}) = f(p) + f(q) = p + f(q)$ $\cancel{f(2\cdot 3)} < 0$

$f(3) = 3$

$f(5) = 5$ $\sum_{i=1}^{n} p_i$

$f(7) = 7$

$f(\frac{17}{4}) = f(17) + f(\frac{1}{4}) = 17 + f(\frac{1}{4}) = p$

$= 2 + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) =$

$= f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{x}{y}) =$ $f(\frac{1}{p}) = -p$ $\boxed{p = 2}$ $\forall x \ge 2$: $f(\frac{1}{x}) < 0$ $2 + f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = -2$

$f(\frac{x}{7}) = f(\frac{x}{3\cdot 5}) = f(x) + f(\frac{1}{3\cdot 5}) = f(\frac{7}{15}) = 7 +$

$f(\frac{1}{5}) = -3 + 2 \cdot 0 = -5$ $f(\frac{2}{5}) = -3$ $f(\frac{1}{7}) + f(\frac{1}{7}) = -3 - 5$

$f(\frac{4}{5}) = -1 - 3 + 2 + 2 = 4$ $f(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow x < p$

$f(7) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{5}) = 7 - 3 - 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{p\cdot\alpha}\right) = f\left(\frac{18}{7}\right) =$

$= -7 + f(18) = 3\cdot 3\cdot 2$

$= f\left(\frac{1}{p}\right) + \quad = -7 + \frac{2+3+3}{8} > 0$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{p}{p^2}\right) = p + f\left(\frac{1}{p^2}\right) =$

$= p + 2f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -p < 0$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -p < 0 \quad \forall p \in \mathbb{Q}_{>0}$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -p < 0$

$= f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{x'}{y'}\right) =$

$= -p + f(x') + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{2}{p}\right) = f(2) - p = 2 - p < 0 \quad f(x) = -p + f(x')$

$f\left(\frac{3}{p}\right) = 3 - p < 0 \quad \Big| \; f\left(\frac{\alpha}{p}\right) = \quad x'\cdot p = x$

$= -p + f(\alpha)$

$f\left(\frac{8}{7}\right) = -7 + f(4\cdot 2) = \quad f(x') + p - p + f(x')$

$= -7 + 2 + 2 + 2 = -1 < 0$

$f\left(\frac{\alpha}{p}\right) = -p + f(\alpha) = \quad f\left(\frac{1}{p}\right) = -p$

$\alpha \neq p \quad = -p + f(p_1 p_2) = \quad f\left(\frac{\alpha}{p}\right) = = f(\alpha) - p =$

$= -p + p_1 + f(p_2)$

$= p_1 + p_2 + \dots + p_n - p$

$f(y) + 2\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - f(y) = (p_1 + \dots + p_n) - (q_1 + \dots + q_m)$

$f\left(\frac{p}{y}\right) = p + f\left(\frac{1}{y}\right) = p + f(y) + 2f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -p$

$AB = \frac{3}{2\sin^2\alpha}$; $AD = 8\sin^2\alpha$; $CD = 8\cos 2\alpha$

$\frac{\left(\frac{3}{2\sin^2\alpha}\right)}{8(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)} = \frac{BH\sin\alpha + AH\sin\beta}{8\sin\alpha +}$ $= \frac{3}{16\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)} = \frac{3}{16(}$

$\frac{c}{\sin\alpha} = 8$

$c = 8\sin\alpha$

$\frac{AB}{CH} = 1$ $\frac{a}{b+c}$

$S_{ABD} = 6$

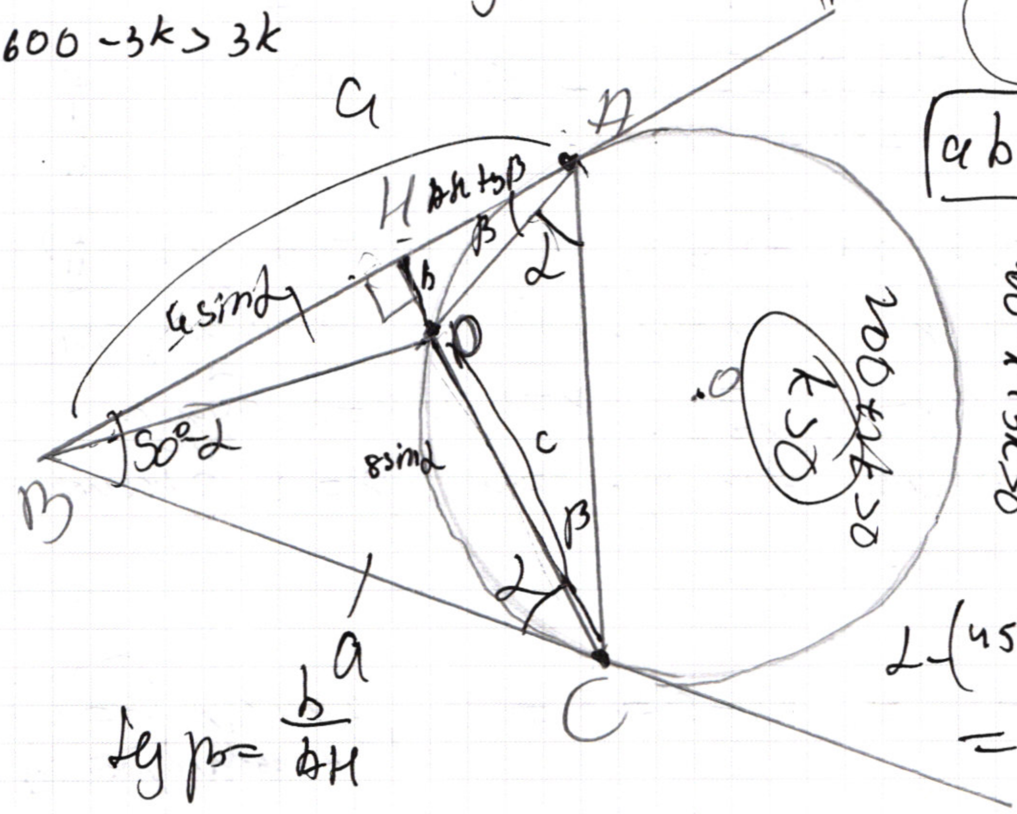
$r = 4$

$ab = 12$

$3(200-k) > 3k$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{AH}$

$600 - 3k > 3k$

$2 \cdot 500 - 300 =$



$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{AH}$

$\alpha - \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2}\alpha - 45^\circ$

$\sin\alpha = \frac{BH}{a}$ $\frac{c}{\sin\alpha} = 8$ $\sin\alpha = \frac{c}{8}$

$\frac{\frac{3}{2\sin^2\alpha}}{8\cos^2\alpha} =$ $\boxed{c = 8\sin\alpha}$

$= \frac{3}{16\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$ $\sin\alpha = \frac{BH}{a} = 8$ $2\alpha C = 8BH.$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\frac{c}{8}}{\cos^2\alpha} = \frac{BH}{a}$

$\frac{3\pi}{8}$

$200 - k < k$

$200 < 2k$

$k < 100$

$200 - k + 3k > 0$

$200 - k > -3k$

$200 + 2k > 0$

$k > 0$

$200 - (k-1) < 3k$

$200 < 4k$

$k > 50$

$200 > k > 1$

$\cos\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\cdot 15$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|} \le 0 \ ;(1)$$

$$x^2-6x+10-2|x-3| = (|x-3|-1)^2$$

$$(1) \iff \frac{(|x-3|-1)^2}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \le 0 \ ;(2)$$

$(|x-3|-1)^2 \ge 0$ для $\forall x \in R$, а значит (2) можно поделить на $(|x-3|-1)^2$ при условии, что $(|x-3|-1)^2 \ne 0 \iff \left[\begin{array}{l} x \ne 4 \\ x \ne 2 \end{array}\right.$. $x=4$ и $x=2$ будут решениями неравенства, если при $x=4$ и $x=2$ знаменатель не равен нулю:

$x=4$:

$2(16-8)+|16-8| = 16-8 = 8 \ne 0$, значит $\boxed{x=4}$ ~~не удовлетворяет (1)~~

$x=2$:

$2(4-4)+|4-4| = 0$, значит $x \ne 2$

$$(2) \iff \frac{1}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \le 0$$

Что равносильно:

$2(x^2-2x)+|x^2-2x| < 0$ (строгий знак $<$.)

Если $x(x-2) \ge 0 \iff x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$:

$$\frac{1}{x(x-2)} \le 0 \iff \begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty) \end{cases} \iff \cancel{x \in \varnothing}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{\cancel{2(x-1)^2}\quad 2(x^2-2x)+|x^2-2x|}$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{\cancel{2(x-1)^2+|(x-1)^2-1|-1}}$$

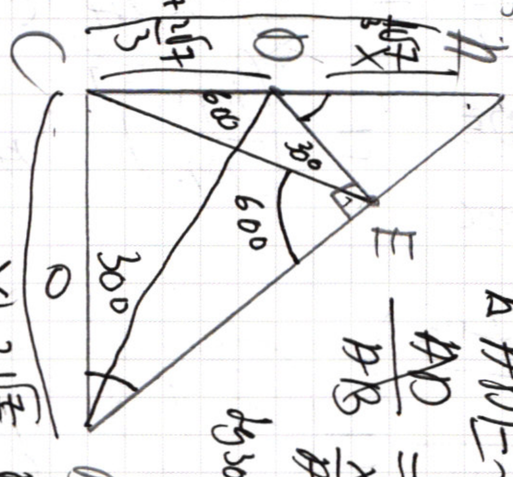
$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<$

$2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|$

$\cancel{(x(x-2)}$

$(\sqrt{4}x-2|^2+2\frac{\sqrt2}{2}|x|\,|x-2|$

$(\sqrt2|x-2|+|x|)^2$



$\frac{\sqrt7\cdot2\sqrt7}{3}$

$\frac{4\sqrt7}{x}$

$2(x^2-2x)+|x^2-2x|$

$\triangle ADE\sim\triangle ABC:$

$\frac{AD}{AB}=\frac{x}{AB}=$

$tg\,30°=\frac{DC}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{1}{\sqrt3}$

$\frac{DC}{2\sqrt7}=1$

$DC=2\sqrt7$

$\frac{(|x-3|-1)^2}{}$

$tg\,30°=\frac{DC}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{1}{\sqrt3}$

$DC=\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt3}=2\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt7$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$a = 150$
$2a = 300$
$c = 150$

$a = 100$
$2a = 200$
$c = 300$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

$$\frac{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{5}} = 21$$

$$\frac{\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)}{\frac{\sqrt{7}}{5}} = 2$$

$51, 52, 53, \dots, 55$

$600 - 3k > 3k$
$6k < 600$

$3 \cdot 155 > 3$
$155 + 3 > 2(155)$

$200 - k < 3k$
$200 < 4k$
$k < 50$

$400 - 2k + 3k > 200 - k$
$400 - k > 200 - k$

$200 + 2k > 400 - 2k$
$4k > 200$
$2k > 100$
$k > 50$

черновик чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0 \quad |i(x\ldots)$$

$|x-3|=1$

$$\left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2x^2-4x+|x||x-2|} \le 0$$

$$2x^2-4x+|x||x-2| \le 0$$

Случай #:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x\ge 2}$$

$$2x^2-4x+x^2-2x<0$$

$$\begin{cases} -6x<0 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x\ge 2}$$

$P=600$

$3a>c$

$a>\frac{c}{3}$

$a+b+c=600$

$3a+c=600$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=200-k \\ c=0+3k \end{cases} \\ a>\frac{c}{3} \end{array}\right.$$

~~$k=200$~~

$k\ne$

$a=199$

$c=3$

~~$4-2=2$~~

~~$-100+2\cdot 5=5$~~

~~$4+1=5$~~

~~$-10+a$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

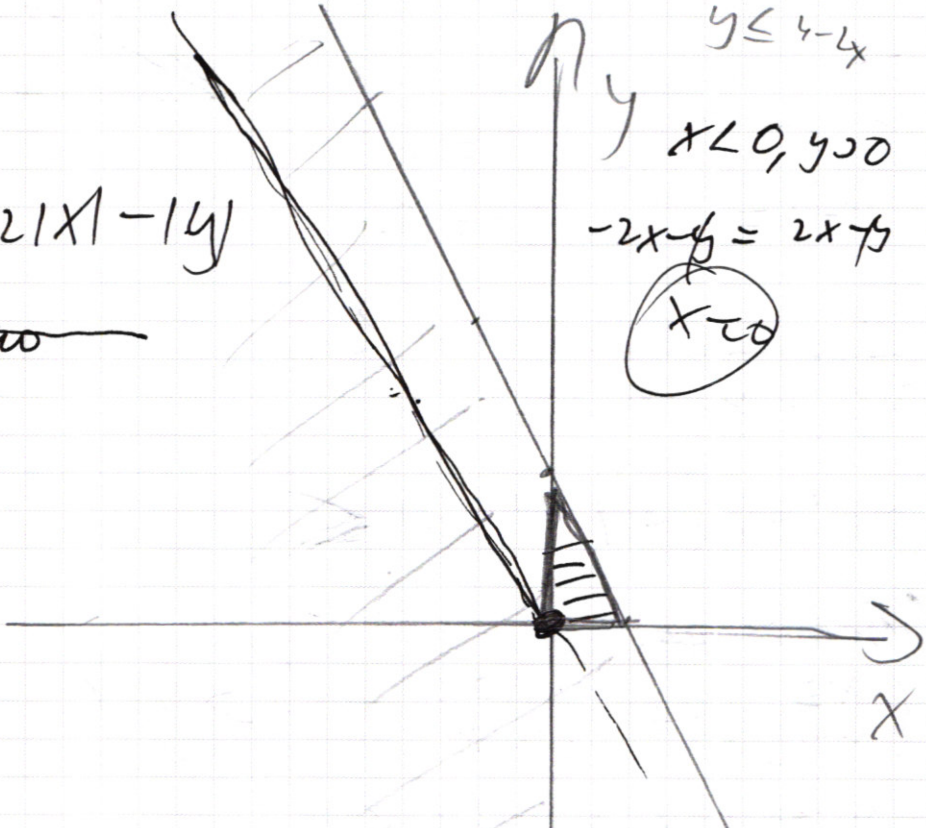
(Нумеровать только чистовики)

$|2x|+|y|+|4-2x-y| \geq 4$

$\cancel{0 \geq 4-4}$

$|4-2x-y| \geq 4-|2x|-|y|$

$$\left[\begin{array}{l} 4-2x-y = 4-2|x|-|y| \;; (1) \quad 4-2x-y \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y \leq 4-2x \\ 4-2x-y = 2|x|+|y|-4 \end{array}\right.$$



(1):

$-2x-y = -2|x|-|y|$

~~Если $(x;y)>0$ верно~~

$\begin{cases} x, y > 0 \\ y \leq 4-2x \end{cases}$

$\begin{cases} x, y < 0 \\ \boxed{y=-2x} \end{cases}$

$\cancel{4-2x-y=}$

$(x;y)<0$

$\begin{cases} y \leq 4-2x \\ y = -2x \end{cases}$

$-2x-y = 2x+y$

$4x=-2y$

$\boxed{y=-2x}$

$\cancel{-2x \leq 4-2x}$

$\cancel{0 \leq 4}$

$-2x-y = -2x+y$; $-y=y$