

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

ОДЗ $xy \geq 0$

$y - 2x \geq 0$.

$$(y - 2x)^2 = xy \quad y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y(y - x) + 4x(x - y) = 0$$

$$(y - x)(y - 4x) = 0$$

1) $y - x = 0 \quad y = x \rightarrow 2x + x^2 = 9$.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 9 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$x_1 = -1 + \sqrt{10}$ не подходит т.к.

$$-1 + \sqrt{10} - 2(-1 + \sqrt{10}) < 0$$

$x_2 = -1 - \sqrt{10}$ не подходит т.к.

$$(-1 - \sqrt{10}) - 2(-1 - \sqrt{10}) \neq \sqrt{(-1 - \sqrt{10})(-1 - \sqrt{10})}$$

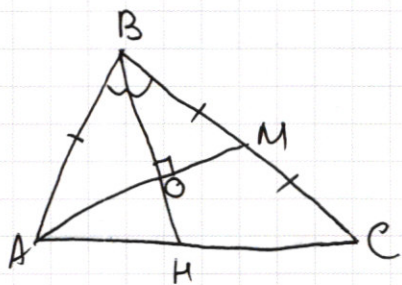
2) $y = 4x$

$8x + x^2 = 9 \quad \boxed{x_1 = 1} \quad x_2 = -9$.

$x_1 = 1$ верна вся система

$x_2 = -9 \quad -9 \cdot 4 - 2(-9) < 0$ не подходит.

Ответ: $x=1$ $y=4$.



2.

BH - биссектриса $\triangle ABC$

AM - медиана $\triangle ABC$

$\triangle ABO = \triangle BOM$ (BO общ.; $\angle ABO = \angle OBM$)

$AB = BM = x$ $y = AC$

Тогда P равен $P = x + x + x + y = 300$

(1) $y = 3(100 - x)$

(2) $y < 150$ т.к. при $y \geq 150$ $y \geq AB + BC$

Из (1) и (2) $100 - x < 50$

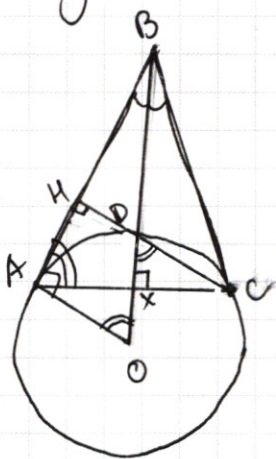
$x > 50$

Но при этом $BC < 150 \rightarrow 2x < 150$

$x < 75$

$75 > x > 50$

~~коп-во~~ коп-во $x = 24 \rightarrow 24$ треугольника соответствую-
ют условию.



4.

т.к. AB касательная то $\angle OAB = 90^\circ$,

где O - центр окружности. и

$\angle OAB = 90^\circ$

Проведем отрезок BO.

$BO \perp AC$ $AH = HC$, где x - точка пересечения AC и BO.

т.к. $AH = HC$ $\angle AOX = \angle CDX$ (как накрест. лежа.) и

$\angle AXO = \angle DXC$, то $\triangle AXO = \triangle CXD$ $AH = HC = y$

Степень точки H относительно окружности $AH^2 = HD \cdot HC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\triangle AHC \sim \triangle BAO \quad (1^*)$$

$$\frac{AH}{AO} = \frac{CH}{AB} = \frac{AC}{BO}$$

$$\triangle CDX \sim \triangle CHA.$$

$$\frac{CX}{HC} = \frac{DC}{AC} = \frac{XD}{AH}$$

$$\frac{y}{CH} = \frac{DC}{AC} = \frac{y}{2y} \quad y^2 = DC \cdot CH \quad DX \neq OX (=DX) = 6 \quad DX = 3$$

Т.к. $DC = AO = 6$, а также из $\triangle DXC$

$$DC = \sqrt{y^2 + 3^2}$$

$$y = \sqrt{27}.$$

$$AC = 2\sqrt{27}.$$

$$\frac{XD}{HA} = \frac{DC}{AC} = \frac{6}{2\sqrt{27}} \quad AH = \sqrt{27}.$$

U_3 (*)

$$\frac{CH}{AB} = \frac{AH}{AO} = \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5.

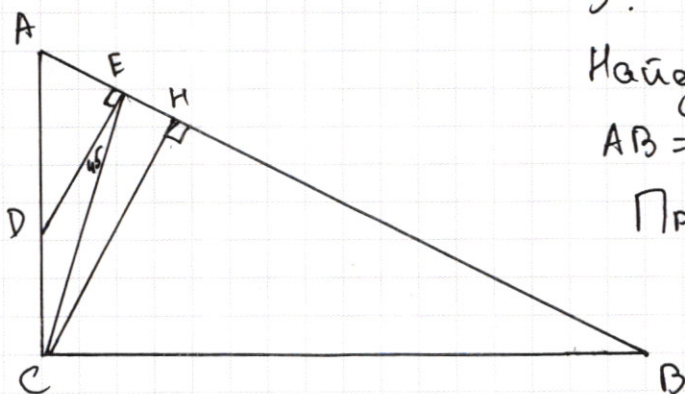
Найдём AB

$$AB = \sqrt{29 + 29 \cdot \frac{25}{4}} = \frac{29}{2}$$

Проведём высоту из т. С. к гипотенузе. (высота CH)

Т.к. $\triangle CHB \sim \triangle ACB$.

$$\frac{HB}{CB} = \frac{CB}{AB} \quad HB = \frac{29 \cdot \frac{35}{4}}{\frac{29}{2}} = \frac{25}{2}$$



$$\text{Тогда } AH = AB - HB = \frac{29}{2} - \frac{25}{2} = 2.$$

Т.к. $\angle CED = 45^\circ$, а $DE \parallel CH$, то $\angle ECH = 45^\circ$
Т.к. $\angle DEH = 90^\circ$, а $\angle DEC = 45^\circ$, то $\angle CEH = 45^\circ$

$$CH = EH$$

$$CH = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot (29 - 25)}{4}} = 5 = EH.$$

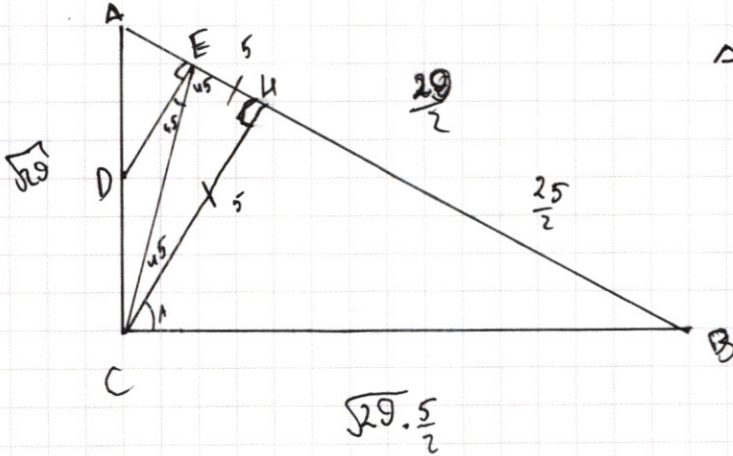
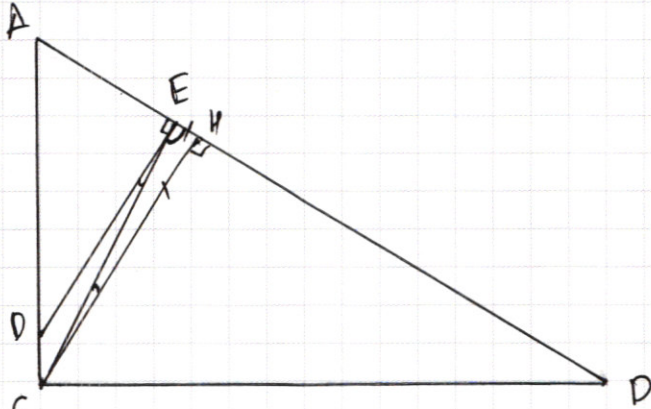
Но у нас $AE = 2 \rightarrow$ точка D или(и) точка E
не лежат на сторонах \triangle -ка ABC .

$$\triangle ACH \text{ с } \triangle AED$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{2+5}{2} = 3,5.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,5 \cdot 7 = 61,25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\triangle CHB \sim \triangle ABC$$

$$\frac{HB}{CB} = \frac{CB}{AB}$$

$$HB = \frac{\sqrt{29}^2 \cdot \frac{25}{2}}{29} = \frac{25}{2}$$

$$AH = \frac{29 \cdot 25}{4 \cdot \frac{29}{2}} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{25^2}{4} + x^2 = \frac{29 \cdot 25}{4}$$

$$\frac{(29-25)(25^2)}{4} = x^2 \quad x=5$$

$$HC = \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{29}{2}} = 5$$

$$29 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25^2}{4} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{29 \cdot 25 - 25 \cdot 25}{4}} \quad x=5$$

$$29 + \frac{29 \cdot 5}{2} = x^2$$

$$58 + \frac{58 + 58 + 29}{4} = x^2$$

$$\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{HC}{AC} = \frac{CD}{AB}$$

$$\frac{HB}{CB} = \frac{CB}{AB}$$

$$\begin{array}{r} 29 \cdot 5 \\ \times 2 \\ \hline 145 \\ + 580 \\ \hline 725 \\ + 145 \\ \hline 870 \\ + 145 \\ \hline 1015 \\ + 145 \\ \hline 1160 \\ + 145 \\ \hline 1305 \\ + 145 \\ \hline 1450 \end{array}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AH^2 = HD \cdot HC.$$

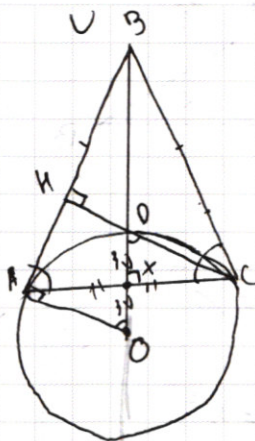
$$AB = BC = AH + HB.$$

$$AH^2 = AC^2 + HC^2$$

$$HC \cdot AB = 30$$

$$(AH + HB) \cdot HC = 30.$$

$$BE^2 = HC^2 + HB^2$$



$$\frac{H}{CH} = \frac{BD}{2 \cdot HO}$$

$$2 \cdot H^2 = \frac{CH \cdot CD}{2} = \frac{AH^2}{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot H = AH$$

Проведём BH - высоту.



$AH = AC$. т.к. $\triangle ABC$ рб

Согл. AO

Доп-ть $\triangle AOX = \triangle OXC$.

$$\frac{AO}{AH} = \frac{AB}{HC}$$

$\triangle AKC$ со $\triangle OXC$.

$$\frac{OX}{KA} = \frac{XC}{KC} = \frac{DC}{2XC}$$

$$2XC^2 = KC \cdot DC = AH^2$$

$$\sqrt{2} XC = AH.$$

$$DC = \sqrt{y^2 + 3^2}$$

$$\frac{DC}{AC} = \frac{\sqrt{y^2 + 3^2}}{2y} = \frac{3}{AH}$$

$$\frac{6y}{\sqrt{y^2 + 3^2}}$$

$$XC = \sqrt{36 - y^2} = \sqrt{27}$$

$$AH = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} = \sqrt{9 \cdot 6}$$

$$\frac{AH}{AO} = \frac{CH}{AB} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{1,5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{CH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = 30.$$

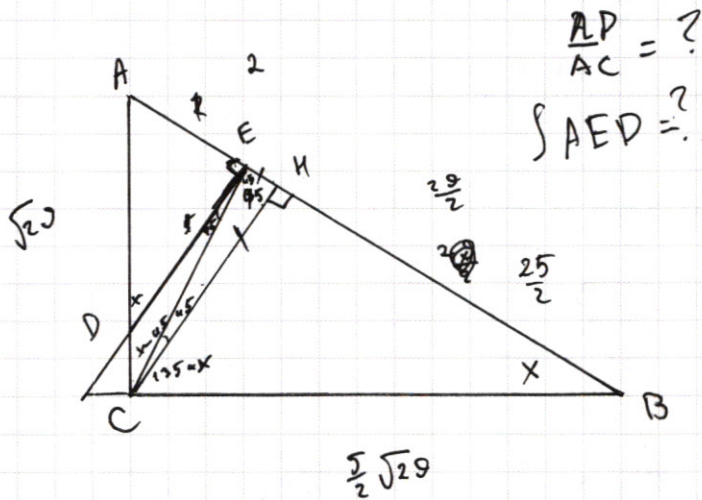
$$AB^2 = \sqrt{\dots}$$

$$CD = 6.$$

$$y = \sqrt{27}$$

$$\frac{6}{2\sqrt{27}} = \frac{3}{AH}$$

$$AH = \sqrt{27}$$



$$\frac{AD}{AC} = ?$$

$$\angle AED = ?$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 29 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 + x^2$$

$$29 \cdot 25 - 25 \cdot 25 = x^2$$

$$(29 - 25) \cdot 25 = x^2 \quad x = 5$$

$$2HB = 25 \quad HB = \frac{25}{2}$$

$$\frac{25}{2} HB = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \sqrt{29}$$

$$\frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{HB}{\frac{5}{2}\sqrt{29}}$$

$$\frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$29 \cdot \frac{5}{2} = HB = \frac{29}{2}$$

$$\sin B = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \frac{5}{\sqrt{29}} = \cos \beta$$

$$(\sqrt{29})^2 + \left(\frac{5}{2}\sqrt{29}\right)^2 = x^2$$

$$29 + \frac{25}{4} \cdot 29 = x^2$$

$$\left(\frac{29}{4}\right) \cdot 29 = x^2 \quad x = \frac{29}{2}$$

$$\frac{\sqrt{29} \cdot 2}{29} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{DE}{5\sqrt{29}} = \frac{AD}{\frac{29}{2}}$$

$$\frac{DE}{AD} = \frac{5\sqrt{29} \cdot x}{2 \cdot 29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin(A) = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad \begin{matrix} DE = 5x \\ AD = \sqrt{29}x \end{matrix}$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{2}{5} = \frac{2x}{5x}$$

$$\frac{DE}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad DE = 5 \quad AE = \sin B \cdot \sqrt{29} = \frac{\sqrt{29}}{29} \cdot 2 \cdot \sqrt{29} = 2$$

$$S = AE \cdot DE \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}^2$$

$$(2x)^2 + (5x)^2 = (\sqrt{29}x)^2$$

$$\frac{AE}{AD+DC} = \frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB}$$

$$AD^2 = AE^2 + DE^2$$

$$\frac{AE}{\sqrt{29}} =$$

$$\angle EHC = \angle CH$$

$$\frac{29}{2} \cdot AE = AD^2 + AD \cdot DC$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & y^2 - 4xy + 4x^2 = xy & y^2 + 4x^2 = 5xy \\ 2y^2 + x^2 = 9 & 2y + x^2 = 9 & (3-x)/(3+x) = 2y \end{cases}$$

$$y(y-x) + 4x(x-y) = 0$$

$$(y-x)(y-4x) = 0$$

1) $y = x$

$$y^2 + 2y - 9 = 0 \quad y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 9 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-9)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10} = \sqrt{\quad} \quad -1 + \sqrt{10}$$

$$(-1 + \sqrt{10})(-1 + \sqrt{10})$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{1}$$

$$-1 + \sqrt{10} - 2(-1 + \sqrt{10}) = \sqrt{(-1 + \sqrt{10})^2} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{9}{1}$$

$$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10}$$

$$(-1 + \sqrt{10})(-1 - \sqrt{10}) = 1 + \sqrt{10} - \sqrt{10} - 10$$

$$y^2 + 2y - 9 = 0$$

$$x \cdot y \neq 0$$

$$-1 - \sqrt{10} - (2)(-1 - \sqrt{10}) = 1 + \sqrt{10}$$

$$(-1 + \sqrt{10})(-1 + \sqrt{10}) = 1 - 2\sqrt{10} + 10 = 11 - 2\sqrt{10}$$

$$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10} = 1 - \sqrt{10}$$

2) $y = 4x$

$$2 \cdot 16x + x^2 = 9 \quad x^2 + 8x - 9 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 9 \cdot 4}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$-1 - \sqrt{10} = -1 - \sqrt{10} + 2 + 2\sqrt{10}$$

$$y = 4 \begin{cases} x_1 = 1 & \text{Верно} \\ x_2 = -9 & \text{Не верно} \end{cases}$$

$$y = -36$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x|(x-3)} \leq 0$$

$$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \leq 4x^2 - 12x + |x|(x-3)$$

$$|x|(x-3) - 4|x-1| \leq 3x^2 - 10x - 5.$$

$$3x^2 - 10x - 5 \geq 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 600}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{700}}{6} = \frac{10 \pm 4\sqrt{175}}{6}$$

✓ 2

$$a_{\max} = 149. (b \neq 150 \text{ } c \neq 1)$$

$$a_{\min} = 1. (a \neq 149.)$$

$$2x + x + y = 300.$$

$$3x + y = 300.$$

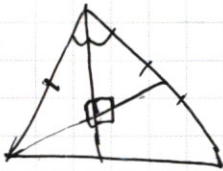
$$y = 3(100 - x) \quad 3 \cdot (100 - x) \neq 150$$

$$y: 3 \quad 3k+1 \quad 100 - x < 50.$$

$$75 > x > 50.$$

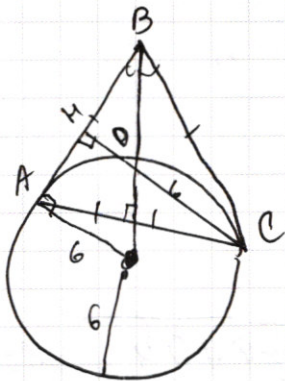
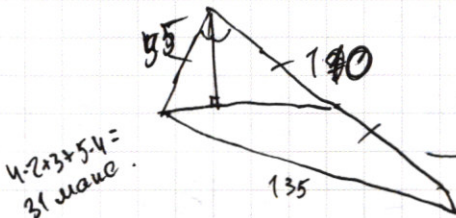
$$2x < 150$$

$$x < 75$$



74|3210
69|876543210
5987654321

24 Δ-ка



$$4. \quad AH^2 = HD \cdot HC = \frac{30 \cdot HD}{AB}$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{x}{y}$$

$$AB = BC.$$

$$CH = \frac{AB \cdot y}{x}$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot CH = 15.$$

$$\frac{AB \cdot y}{x} \cdot AB = 30.$$

$$AB \cdot CH = 30. \quad AB = \frac{30}{CH}$$

$$HC = HD + 2HD \cdot AB.$$

$$AC^2 + AH^2 = (AB - AH)^2 + AB^2$$

$$HC^2 + AB^2 - AH^2 - 2AH \cdot AB = AB^2$$

$$AC^2 + AH^2 = AB^2 - 2AB \cdot AH + AH^2$$

$$HC^2 = AH^2 + 2AH \cdot AB.$$

$$HC^2 = HD \cdot HC + 2AH \cdot AB$$

$$HD = HD \left(\frac{CH + 30}{CB} \right)$$