

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

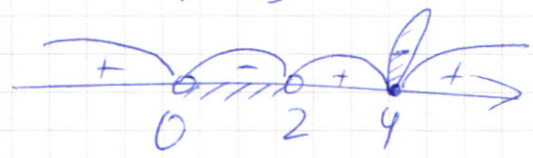
① $x \geq 3$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{3x^2 - 6x} \leq 0$$

② $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

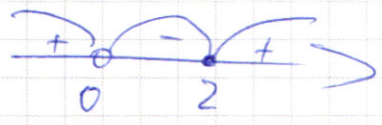
$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0 \quad \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$



$$\frac{x-2}{3x} \leq 0$$

$\begin{cases} x \in (0; 2) \cup [4; \infty) \\ x \geq 3 \end{cases}$
 $\Rightarrow x \in [4; \infty)$



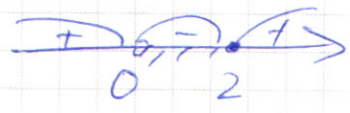
$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$
 $\begin{cases} x \in (0; 2] \\ \Rightarrow x \in [2; 3] \end{cases}$

③ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \leq 0$$

$$\frac{x-2}{x} \leq 0$$

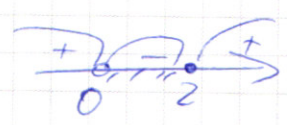
$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$
 $\begin{cases} x \in (0; 2] \\ \Rightarrow x \in (0; 2] \end{cases}$



④ $x \leq 0$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0$$

$$\frac{x-2}{3x} \leq 0$$



$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \in (0; 2] \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

№1 продолжение

1) $x \in \{4\}$

2) $x \in \{2\}$

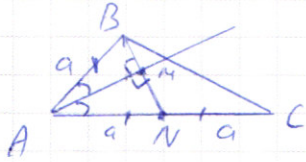
3) $x \in (0; 2]$

4) $x \in \emptyset$

$$\Rightarrow x \in (0; 2] \cup \{4\}$$

Ответ: $x \in (0; 2] \cup \{4\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№2

Пусть точка пересечения
медианы и бисс. это M

~~Пусть~~ А точка перес. медианы
с AC это N

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle AMN$ по II признаку рав. \triangle

$\Rightarrow AB = AN$ как соотв.
элементы

AM - общая
 $\angle BAM = \angle MAN$
 $\angle AMB = \angle ANM$

Пусть $AN = NC = AB = a$
и $BC = b$

$\Rightarrow P_{\triangle} = 3a + b = 600$
периметр

По неравенству \triangle
 $b > a$ и $b < 3a$

$$\frac{a}{2a} < \frac{b}{a+2a}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a > 100 \\ a < 150 \end{cases}$

Так как стороны целозисловые
 \Rightarrow рассмотрим и посчитаем
все случаи ($a = 101; 102; \dots; 149$)

всего 49

\Rightarrow всего
49 таких
 \triangle существует

Ответ: 49



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} & (1) \\ x+y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

№3

$$\begin{aligned} (1) \quad (x-2y)^2 &= xy \\ x^2 + 4y^2 - 5xy &= 0 \end{aligned}$$

решим это урав. относительно x

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{2} = \sqrt{4y}$$

$$\textcircled{2} \quad x = 4y$$

~~$$(1) \quad x = 4y \quad (2) \quad y^2 + 4y - 5 = 0$$~~

$$y = \sqrt{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 \quad \text{или} \quad x = -20$$

не подходит не подходит

~~$$\begin{aligned} (1) \quad y = 1 & \quad x - 2 = \sqrt{x} \\ x = 4 & \quad \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 2 = 0 \\ \sqrt{x} = 2, -1 & \\ x = 4 & \quad x + 10 = \sqrt{-5x} \\ x = -20 & \quad x^2 + 25x + 100 = 0 \\ x = -20 & \quad x = \sqrt{-20} \\ x = -5 & \end{aligned}$$~~

$$\textcircled{2} \quad x = y \quad (1) \quad y - 2y = y$$

~~$$y^2 + y - 5 = 0$$~~

~~$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$~~

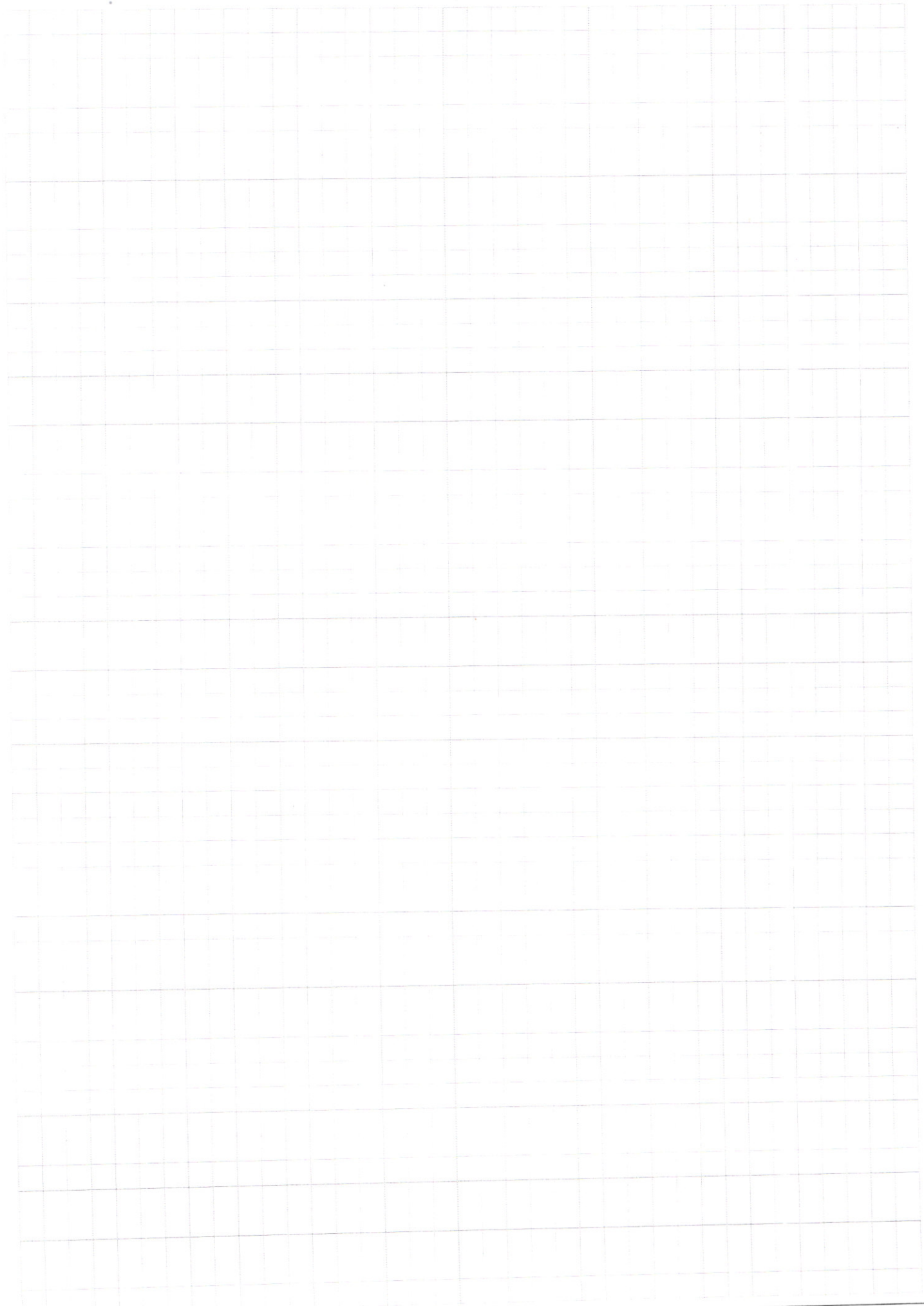
$$y = 3y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (1) \\ x = 5 & (2) \end{cases}$$

не имеет смысла

~~$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 & x = 4 \\ y = \end{cases}$$~~

$$y = 1 \quad x = 4$$

Ответ: $y = 1 \quad x = 4$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№ 5 продолжение

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AB} \Rightarrow DE = \frac{2}{3}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = p \quad p - \forall \text{ простое}$$

$$1 \leq x \leq 18$$

$$1 \leq y \leq 18$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \xrightarrow{f(1)}$$

$$f(1) = 0 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 3$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 4$$

ищем все
таким же образом ~~остальные~~
ОСТАЛЬНЫЕ

$$f(5) = 5 \quad \dots$$

Запишем в виде таблицы

$f(x)$

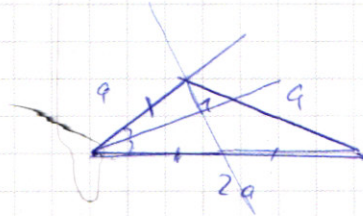
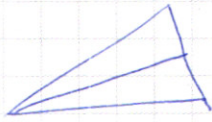
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

Из (1) следует, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{xy}{x}\right)$ Пример $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = -2$

Всё, что нам осталось сделать, это рассмотреть все случаи y . Мы будем брать какой-то y и смотреть в таблицу и искать $f(y)$ который соответствует нашему y (пример: $y=3$ $f(y)=3$). Далее мы будем считать все ост. $f(x)$ в этой таблице, которые $< f(y)$ (пример $y=3$

$$f(y)=3 \Rightarrow f(x)=0, 2 \text{ нам подходит} \Rightarrow 2 \text{ пары } x/y$$

~~$y=4$ $f(y)=4$~~



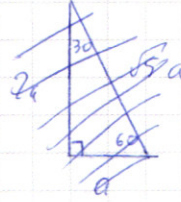
$$b^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cdot \cos d$$

$$b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos d + a^2$$

$$b = a$$

$$a(3 + \sqrt{5}) = 600$$

$$a = \frac{600}{3 + \sqrt{5}}$$



$$3a + b = 600$$

$$a = 1$$

$$a = 2$$

$$600 - 3 \quad 1)$$

$$600 - 3 \cdot 2 \quad 2)$$

$$600 - 3 \cdot 3 \quad 3)$$



$$a < 150$$

$$a < 100$$

$$b > a$$

$$3a + b < 6a$$

$$b < 3a$$

$$3a + b > 4a$$

$$b > a$$

$$b < 3a$$

$$a > 100$$

$$a < 150$$

49

$$a < 150$$

$$a > 100$$

$$420 + 180 = 600$$

$$180 + 420 = 600$$

$$110 \quad 330 + 270$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$y^2 + 2y = 5 - \sqrt{xy}$$

$$\left(y - \frac{2}{1}\right)^2 = 7 - \sqrt{xy}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4xy = xy$$

$$x = 5 - y^2$$

$$25 + y^4 - 10y^2 - 4y^2 - 20y + 4y^3 - 5y(5 - y^2) = 0$$

$$y^4 + 5y^3 - 25y - 10y^2 + 25 = 0$$

$$y^4 + 5y^3 - 5^2y - 2 \cdot 5y^2 + 5^2 = 0$$

$$f(4) = f(1) + f(4) \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 3 \quad f(5) = 5 \quad f(7) = 7$$

$$f(11) = 11 \quad f(13) = 13 \quad f(17) = 17$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \quad f(1) = 0 \quad f(14) = 9 \quad f(6) = 5$$

$$f(4) = 4 \quad f(8) = 6 \quad f(9) = 6$$

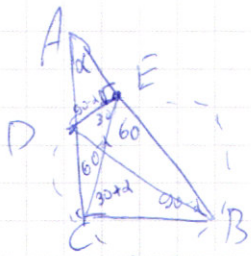
$$f\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad f(10) = 7 \quad f(12) = 7 \quad f(15) = 8$$

$$f(16) = 8 \quad f(18) = 8$$

$$x = 18$$

$$y \neq 1; 2; 3; 6; 9; 18$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9}$$



$$CA = \sqrt{7} \quad BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \quad \angle CED = 30^\circ$$

$$AB^2 = 7 + \frac{28}{3}$$

$$BA = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$y - 2y = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

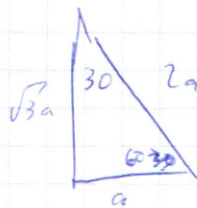
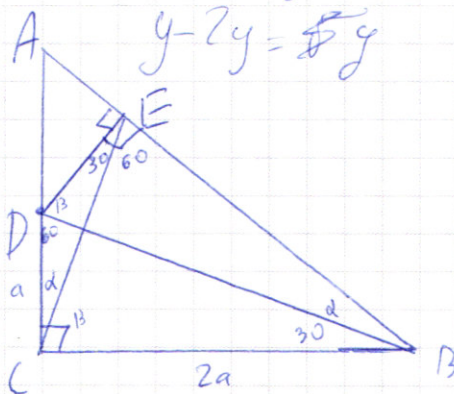
$$AD = \sqrt{7} - \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\frac{AD}{AC} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$y - 2y = \sqrt{y^2}$$

$$y^2 + 4y^2 - 5y^2 = 0$$

$$\sqrt{\frac{7}{3}}$$



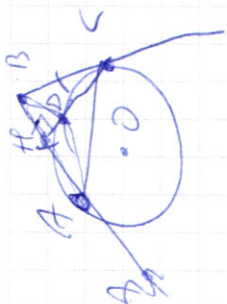
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

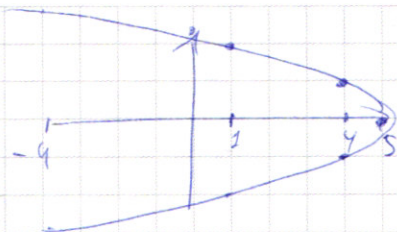
$$\frac{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$



$$x^2 + 4y^2 - 4xy = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

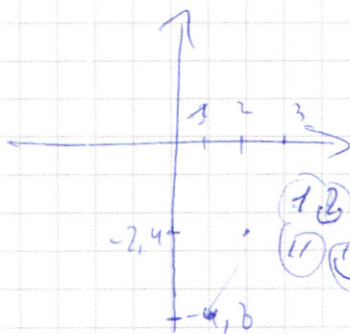
$$4x + 4y^2 - 20 = 0$$

$$x^2 - 5xy - 4x - 20 = 0$$

$$\frac{x^2 - 4x - 20}{5x} = \frac{8+y}{5}$$

$$\frac{9 \pm 4}{24}$$

$$\frac{4 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{6}$$



$$\pm \frac{1}{5}x - \frac{4}{5} - \frac{4}{x} = y$$

$$0,2x - 0,8 - \frac{4}{x} = y$$

$$x^2 + y^2 - 2(\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} - \frac{4}{x}) = 0$$

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x + 4y$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

$$f(1 \cdot 3) = f(1) + f(3)$$

$$f(x/y) = f(x) - f(y)$$

$$f(ab) = f(a) + f(b) =$$

$$f(p) = p \quad p - \text{простое любое}$$

$$1 \leq x \leq 13 \quad 1 \leq y \leq 18 \quad f(x/y) < 0$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \\ x+xy^2 = 5 \end{cases}$$

~~xy~~

$$x^2 + 4y^2 - 5xy = 0$$

$$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$$

$$x = \frac{5y \pm 3y}{2} = \begin{cases} 4y \\ y \end{cases}$$

$$AB^2 = \cancel{AD^2} + 9BD^2$$

$$x = 4y \\ y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$y = 1 \quad y = -5$$

$$y = -5$$

$$x + 10 = \sqrt{-5x}$$

$$x - 2 = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x} = 2; -1$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 4; 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{2} \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{17}{8} = \frac{1}{8} \cdot 17$$

f(x)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

$$y = 17$$

18

$$y = 2$$

5

$$y = 3$$

2

$$y = 4$$

3

$$y = 5$$

4

$$y = 6$$

4

$$y = 7$$

6

$$y = 8$$

6

$$y = 9$$

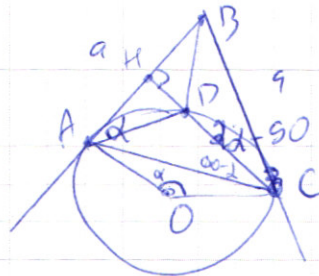
6

$$y =$$

$$R = \frac{AC}{2 \sin \alpha}$$

$$41 + 33 + 31 + 22 + 17 =$$

$$= 40 + 30 + 24 + 50 = 144$$



$$\beta + 90 - \alpha = d$$

$$\beta + = 2\alpha - 90$$

$$\beta + 2d - 50 = 90$$

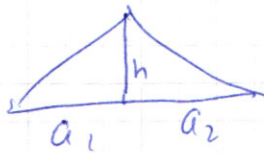
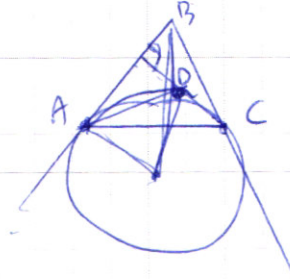
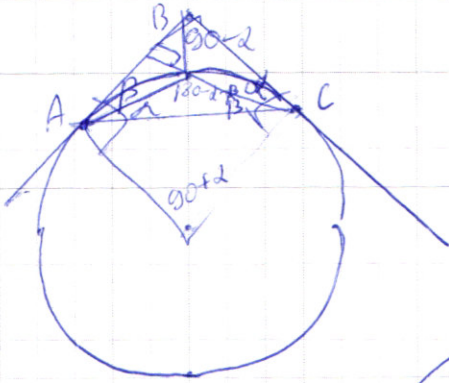
$$\beta = 180 - 2\alpha$$

$$HD \cdot AB = \frac{12}{2} = 12$$

$$AC = \frac{64 \sin^2 d}{\sin \alpha}$$

$$AC^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \sin \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{ha_1}{2} + \frac{ha_2}{2} = \frac{ha}{2}$$

$$270 = \beta$$

